STAR-EDUCATION
WWW.STAR-EDUCATION.NET

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
HƯỚNG DẪN: **TOÁN CHUYÊN**

ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM

Bài 1. (**2 điểm**)

(a) Tìm m để phương trình $\dfrac{x^2-(3m+1)x+2m^2+2m}{x}=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa

$$(\sqrt{x_1-m}+\sqrt{x_2-m})^4=(2m-1)^2$$

(b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2-y}=z-1 \\ \sqrt{y^2-z}=x-1 \\ \sqrt{z^2-x}=y-1 \end{cases}$

Lời giải.

a) (1 điểm) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình

$$x^2-(3m+1)x+2m^2+2m=0$$

có hai nghiệm phân biệt khác 0. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta=(3m+1)^2-4(2m^2+2m)>0 \\ 2m^2+2m\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (m-1)^2>0 \\ m\neq 0 \text{ và } m\neq -1 \end{cases} \iff m\notin\{0,\pm 1\}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x_1-m}+\sqrt{x_2-m}\right)^2 &= (x_1+x_2)-2m+2\sqrt{x_1x_2-m\left(x_1+x_2\right)+m^2} \\ &= m+1+2\sqrt{m}.\end{aligned}$$

nên điều kiện trong đề bài tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} m+2\sqrt{m}+1=2m-1 \\ m+2\sqrt{m}+1=-2m+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{m}=1+\sqrt{3} \\ \sqrt{m}=0 \end{array}\right..$$

Đối chiếu lại điều kiện của m, ta suy ra $m=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$.

b) (1 điểm) Điều kiện xác định: $x,y,z\geq 1$.
Bình phương hai vế 3 phương trình của hệ rồi cộng lại theo vế, ta suy ra $x+y+z=3$, từ kết quả này, cộng vế 3 phương trình của hệ, ta có

$$\sqrt{x^2-y}+\sqrt{y^2-z}+\sqrt{z^2-x}=0,$$

suy ra $x^2-y=y^2-z=z^2-x=0$. Do đó $x^2+y^2+z^2=3$. Tuy nhiên, chú ý rằng

$$3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2=9,$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ nên ta suy ra $x=y=z=1$.
Thử lại, ta kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=z=1$

Bài 2. (**1.5 điểm**) Cho các số x, y, z nguyên dương thỏa $x > y > z$.

a) Cho $(x; y; z)$ thỏa $yz + x(x + y + z) = 2021$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2$$

b) Chứng minh rằng nếu y không nhỏ hơn trung bình cộng của x và z thì

$$(x + y + z)(xy + yz + xz - 2) \geq 9xyz$$

Lời giải.

a) (0.75 điểm) Ta có $(x + y)(x + z) = 2021 = 43 \cdot 47 = 1 \cdot 2021$.
Mà $x + y > x + z > 2$. Suy ra $x + y = 47, x + z = 43$.
Khi đó $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = (2x - 47)^2 + (2x - 43)^2 + 16$
$= 8x^2 - 360x + 43^2 + 47^2 + 16 = 8(x^2 - 45x) + 4074$.
Do $x + y = 47, x > y$ suy ra $x \geq 24$.
Suy ra $x^2 - 45x = (x - 24)(x - 21) - 504 \geq -504$.
Do đó $A \geq 4074 - 8 \cdot 504 = 42$.
Đẳng thức xảy ra khi $x = 24, y = 23, z = 19$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 42 khi $x = 24, y = 23, z = 19$.

b) (0,75) Ta có $x \geq y + 1 \geq z + 2$. Suy ra

$$(x - y)^2 \geq 1, \quad (y - z)^2 \geq 1, \quad (x - z)^2 \geq 4$$

Suy ra

$$x^2 + y^2 \geq 2xy + 1, \quad y^2 + z^2 \geq 2yz + 1, \quad x^2 + z^2 \geq 2xz + 4$$

Từ đó

$$zx^2 + zy^2 \geq 2xyz + z, \quad xy^2 + xz^2 \geq 2xyz + x, \quad yx^2 + yz^2 \geq 2xyz + 4y$$

Cộng lại ta có

$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) \geq 6xyz + x + 4y + z$$

Suy ra $(x + y + z)(xy + yz + zx - 2) \geq 9xyz - x + 2y - z$.

Vì $y \geq \dfrac{1}{2}(x + z)$ nên ta có điều cần chứng minh.

Bài 3. (**2 điểm**) Cho x, y là các số nguyên không đồng thời bằng 0 sao cho $x^3 + y$ và $x + y^3$ chia hết cho $x^2 + y^2$.

(a) (0.5 điểm) Tìm x, y nếu $xy = 0$.

(b) Chứng minh rằng $xy \neq 0$ thì x, y là nguyên tố cùng nhau.

(c) Tìm tất cả cặp số nguyên (x, y) thỏa đề bài.

Lời giải.

a) (0.5 điểm) Nếu $xy = 0$, giả sử $y = 0$ thì x^3 chia hết cho x^2 (hiển nhiên) và x chia hết cho x^2 nên nếu $x \neq 0$ thì $|x| \geq x^2$, do đó $x = \pm 1$. Từ đó suy ra tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn đề bài là $(x, y) = (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$.

b) (0.75 điểm) Đặt $\gcd(x, y) = d$ thì $x = da, y = db, \gcd(a, b) = 1, a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ta có $d^2 \mid x^2 + y^2$ nên $d^2 \mid x + y^3 = da + d^3b^3$ nên $d \mid a$. Tương tự $d \mid b$ nên $d = 1$.

c) (0.75 điểm) Từ ý a), ta chỉ cần xét trường hợp $xy \neq 0$. Lúc này, ta có $\gcd(x, y) = 1$ và $x^2 + y^2 \mid x^3 + y$, $x^2 + y^2 \mid x(x^2 + y^2)$ nên

$$x^2 + y^2 \mid y - xy^2 = y(1 - xy).$$

Mà $\gcd(x, y) = 1$ nên ta suy ra $x^2 + y^2 \mid 1 - xy$. Từ đó ta có

$$|xy| + 1 \geq |xy - 1| \geq x^2 + y^2 \geq 2xy$$

nên $|xy| \leq 1$. Mà $xy \neq 0$ nên $|xy| = 1$. Từ đó ta tìm được $(x, y) = (1, 1)$, $(1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.

Bài 4. (**3 điểm**) Cho tam giác ABC nhọn, có trực tâm H; AH cắt BC tại D. Trên tia đối tia DH lấy điểm M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MBH cắt AB tại E cắt BC tại K; đường tròn ngoại tiếp tam giác MCH cắt AC tại F và BC tại L.

(a) Chứng minh $BEFC$ nội tiếp và $\angle EMA = \angle FMA$.

(b) ME cắt CH tại P, MF cắt BH tại Q. Chứng minh PQ vuông góc OA với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(c) HK cắt AC tại U, HL cắt AB tại V. Chứng minh UV luôn song song với một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

Lời giải.

a) (1 điểm) Ta có tứ giác $EBMH$ nội tiếp nên $\angle AEH = \angle AMB$, suy ra hai tam giác AEH và AMB đồng dạng, kéo theo $AE \cdot AB = AH \cdot AM$. Chứng minh tương tự ta thu được $AF \cdot AC = AH \cdot AM = AE \cdot AB$, từ đó dễ dàng có được hai tam giác AEF và ABC đồng dạng (cạnh - góc - cạnh) nên $\angle AEF = \angle ACB$, suy ra $BEFC$ nội tiếp. Ta có $HMBE$ và $HMCF$ là các tứ giác nội tiếp nên

$$\angle HME = \angle HBE = 90^\circ - \angle A = \angle HCF = \angle HMF.$$

b) (1 điểm) Ta có $\angle AEF = \angle ACB = 90^\circ - \angle BAO$ nên $AO \perp EF$. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $PQ \parallel EF$.
Thật vậy, ta có MH là phân giác góc PMQ và

$$\angle PHQ = 90^\circ + \angle ACH = 90^\circ + \angle HMQ = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle PMQ$$

nên H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PMQ. Do đó

$$\angle PQM = 2\angle PHM - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle MHC = 180^\circ - \angle ABC.$$

Lại có

$$\angle EFM = \angle EFC - \angle MFC = 180^\circ - \angle ABC - \angle MHC = 180^\circ - 2\angle ABC.$$

Suy ra $\angle PQM = \angle EFM$ nên $PQ \parallel EF$, kéo theo $PQ \perp AO$.

c) (1 điểm) Ta có

$$\angle HUF = \angle UKB - \angle ACB = \angle AEH - \angle AEF = \angle FEH$$

nên $FHEU$ nội tiếp. Chứng minh tương tự ta cũng có $FHEV$ nội tiếp nên $UVFE$ nội tiếp. Suy ra $\angle FUV = \angle VEF = \angle FCB$ nên $UV \parallel BC$. Vậy UV luôn luôn song song với BC cố định.

Bài 5. (**1.5 điểm**) Trong một hội nghị Toán quốc tế có n người, mỗi người trong họ có thể nói được nhiều nhất 3 ngôn ngữ. Trong 3 người bất kì thì luôn có 2 người có thể nói chung một ngôn ngữ.

(a) Chứng minh rằng nếu $n \geq 9$ thì có một ngôn ngữ mà có thể nói bởi không ít hơn 3 người.

(b) Nếu $n = 8$, điều kết luận của câu a) còn đúng không? Tại sao?

Lời giải.

a) Giả sử mọi ngôn ngữ đều được bởi nhiều nhất là 2 người.

- Khi đó mỗi người có thể giao tiếp được với nhiều nhất 3 người khác với 3 ngôn ngữ khác nhau. Tức là A có thể nói với nhiều nhất B, C, D với ngôn ngữ khác nhau. Nếu ngược lại A nói thêm với E thì theo nguyên lí Dirichlet sẽ nói cùng ngôn ngữ với A hoặc B hoặc C. Khi đó có một ngôn ngữ có 3 người nói, mâu thuẫn.
- Ta có A nói với B, C, D với 3 ngôn ngữ khác nhau. Xét người E thì E cùng giao tiếp với 3 người là F, G, H. Do đó còn một người X ngoài nhóm này. Khi đó A, E, X không nói chung ngôn ngữ nào. Vô lý.

b) Kết luận không còn đúng, ví dụ: chia 8 người thành 2 nhóm, A, B, C, D và E, F, G, H. Hai người trong cùng nhóm nói với nhau, mỗi cặp nói ngôn ngữ khác nhau. Khi đó sẽ thỏa đề bài. Xem hình vẽ: