



ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 24/02/2023

Đề thi gồm 01 trang, 04 bài

Bài 1 (5,0 điểm)

Xét dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ và $0 \leq a_n \leq 1$, với mọi $n \geq 1$.

- Chứng minh rằng dãy (a_n) xác định duy nhất và có giới hạn hữu hạn.
- Cho dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = (1 + 2a_1)(1 + 2^2a_2) \cdots (1 + 2^n a_n)$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5,0 điểm)

Cho các số nguyên a, b, c, α, β và dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \text{ với mọi } n \geq 1.$$

- Chứng minh rằng nếu $a = 3, b = -2, c = -1$ thì có vô số cặp số nguyên $(\alpha; \beta)$ để $u_{2023} = 2^{2022}$.
- Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho có duy nhất một trong hai khẳng định sau là đúng:
 - Có vô số số nguyên dương m để $u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_{n_0+m}$ chia hết cho 7^{2023} hoặc 17^{2023} ;
 - Có vô số số nguyên dương k để $u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_{n_0+k} - 1$ chia hết cho 2023.

Bài 3 (5,0 điểm)

Tìm số thực dương k lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{kab + c^2} + \frac{1}{kbc + a^2} + \frac{1}{kca + b^2} \geq \frac{k+3}{a^2 + b^2 + c^2}$$

đúng với mọi bộ ba số thực dương $(a; b; c)$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$.

Bài 4 (5,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ có $DB = DC$ và nội tiếp một đường tròn. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AC và J, E, F tương ứng là các tiếp điểm của đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với BC, CA, AB . Đường thẳng MN cắt JE, JF lần lượt tại K, H ; IJ cắt lại đường tròn (IBC) tại G và DG cắt lại (IBC) tại T .

- Chứng minh rằng JA đi qua trung điểm của HK và vuông góc với IT .
- Gọi R, S tương ứng là hình chiếu vuông góc của D trên AB, AC . Lấy các điểm P, Q lần lượt trên IF, IE sao cho KP và HQ đều vuông góc với MN . Chứng minh rằng ba đường thẳng MP, NQ và RS đồng quy.

----- HẾT -----

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.