ĐÁNH GIÁ VỀ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN 2019

(Lê Phúc Lữ tổng hợp và giới thiệu)

Bài viết này theo góc độ cá nhân của tác giả, chủ yếu muốn nhận xét, đánh giá từ tổng quan cho đến chi tiết từng câu trong đề thi HSG QG năm nay (sẽ không nêu các bài toán tương tự hay mở rộng, tổng quát như các năm trước). Trong bài viết này, tác giả có sử dụng lời giải, ý tưởng của các thầy: Nguyễn Ngọc Duy (GV PTNK TPHCM), Trần Quang Hùng (GV chuyên KHTN Hà Nội), Trần Xuân Hùng (GV THPT Vĩnh Xuân, Huế), Phạm Tiến Kha (GV ĐHSP TPHCM), Trần Quốc Luật (GV chuyên Lê Hồng Phong TPHCM), Nguyễn Văn Linh (SV ĐHSP Hà Nội), Nguyễn Song Minh (Hà Nội), Nguyễn Quang Tân (GV chuyên Lào Cai), Nguyễn Tăng Vũ (GV PTNK TPHCM) và bạn: Huỳnh Văn Y (KHTN TPHCM), Nguyễn Nguyễn (HS PTNK TPHCM).

Xin cám ơn thầy Trần Nam Dũng (GV PTNK TPHCM) và anh Võ Quốc Bá Cẩn (GV Archimedes Academy Hà Nội) đã động viên nhiều trước đó để tác giả thực hiện bài viết này.

Tổng quan.

- Ngày 1: từng bài toán đều có những cái khó riêng, hầu như nếu không nắm được các bổ đề thì không thể xử lý trọn vẹn. Có bài thì phát biểu đơn giản nhưng theo kiểu lý thuyết, có bài thì cách xây dựng cầu kỳ, rắc rối khiến các thí sinh ngay cả ở phần sở trường của mình cũng không thể phát huy tốt. Phân tích kỹ ra hơn, phải nói rằng có nhiều ý trong đề bài dường như chặn hết các đường suy luận của những thí sinh tiếp cận vấn đề theo hướng tự nhiên.
- Ngày 2: cả ba bài toán đều ít nhiều liên hệ tới các đề thi VMO cũ (1994, 2017, 2010) và đã được đề cập trong các bài giảng, tài liệu. Thí sinh đa số lấy được điểm ở bài 5 và 6 nhưng tính cũ của các bài phần nào đã khiến cho những thí sinh chưa đọc qua các đề thi trên gặp khó khăn. Phân bố khó dễ giữa hai ngày không hợp lý khi có bài mức độ nhẹ nhàng, đáng lẽ nên được sắp xếp ở ngày đầu để tạo tâm lý thoải mái, cũng là động lực cho thí sinh thì lại nằm ở ngày thứ hai.
- Đề thi chọn HSG quốc gia hàng năm luôn là đề được cộng đồng Olympic, từ giáo viên, học sinh và những bạn yêu Toán đón nhận nhiều nhất. Với quy mô toàn quốc, được đầu tư bởi các chuyên gia nhiều kinh nghiệm, VMO luôn hứa hẹn là đề thi mang tính sư phạm, chuyên môn, khách quan và gợi mở, định hướng phát triển phong trào nhất mỗi năm. Thật đáng tiếc rằng trong đề thi VMO 2019 này, thật khó để nhìn nhận ra được các đặc điểm như thế!

Ngày thi thứ nhất.

Bài 1. Cho hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to(0;+\infty)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}.$

b) Chứng minh rằng tồn tại hai dãy $(x_n),(y_n)$ với $x_n<y_n,\forall n=1,2,3,\ldots$ sao cho chúng cùng hội tụ tới một giới hạn và thỏa mãn $f(x_n)=f(y_n)$ với mọi $n.$

Lời giải.

a) Ta có định lý: *nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các điểm nào đó trên đoạn đó.*

Xét số $f(0)>0$, do $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ nên theo định nghĩa giới hạn tại vô cực thì tồn tại các giá trị a đủ nhỏ và b đủ lớn sao cho $f(x)<f(0),\forall x\le a$ và $f(x)<f(0),\forall x\ge b.$

Xét trên miền $[a;b]$ thì vì tính liên tục, $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là $M=f(c)$ với $M\ge f(0)$ với giá trị $c\in[a;b]$ nào đó (không nhất thiết c xác định duy nhất). Dễ thấy $\forall x\in(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$ thì $f(x)<f(0)\le M$ nên $f(x)\le M,\forall x\in\mathbb{R}.$

Vậy trên miền $\mathbb{R},$ $f(x)$ có giá trị lớn nhất là M, đạt được khi $x=c.$

b) Ta có định lý trung gian: *Hàm số $f(x)$ liên tục và tồn tại hai số $a<b$ sao cho $f(a)f(b)<0$ thì $f(x)=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(a;b).$*

Từ đây dễ dàng suy ra nếu $f(x)$ nhận hai giá trị A,B thì sẽ nhận mọi giá trị nằm giữa $A,B.$

Thật vậy, giả sử $f(u)=A<f(v)=B$ và xét $C\in(A;B)$ và hàm số $g(x)=f(x)-C$. Rõ ràng

$$g(u)=A-C<0 \text{ và } g(v)=B-C>0.$$

Suy ra $g(u)g(v)<0$ nên phương trình có nghiệm nằm giữa hai số u,v.

Trở lại bài toán, ta xét hai trường hợp sau:

(1) *Nếu tồn tại đoạn $[A;B]$ chứa số c sao cho $f(c)=M$ và $f(x)<M,\forall x\in[A;B]\setminus\{c\}.$*

Do $f(x)$ liên tục trên $[A;c]$ và $[c;B]$ nên sẽ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên hai đoạn này, đặt lần lượt là m_1,m_2. Giả sử $m=\max\{m_1,m_2\}.$ Theo định lý trung gian, tồn tại $x_1\in[A;c]$ và $y_1\in[c;B]$ sao cho $f(x_1)=f(y_1)=m$; ngoài ra ta cũng có $x_1<c<y_1.$

Lại áp dụng định lý trung gian trên $[x_1;c]$ và $[c;y_1]$, ta thấy tồn tại x_2,y_2 sao cho

$$f(x_2)=f(y_2)=\frac{m+M}{2} \text{ và } x_2<c<y_2.$$

Cứ thế, ta xét dãy số (u_n) sao cho $u_1 = m$ và $u_{n+1} = \frac{u_n + M}{2}, \forall n \ge 1.$ Dễ thấy dãy số này hội tụ về M và với mỗi $n \ge 2$, luôn tồn tại các số $x_n \in [x_{n-1}; c], y_n \in [c; y_{n-1}]$ sao cho

$$f(x_n) = f(y_n) = u_n \text{ và } x_n < c < y_n.$$

Dãy số (x_n) tăng và bị chặn trên bởi c nên có giới hạn là $l \le c.$ Nếu $l < c$ thì do tính liên tục, ta có $M = \lim u_n = \lim f(x_n) = f(l) < M$, vô lý. Tương tự ta có $\lim y_n = c.$

Vì thế nên hai dãy số $(x_n), (y_n)$ xây dựng như trên thỏa mãn đề bài.

(2) *Nếu không tồn tại đoạn $[A; B]$ như trên, nghĩa là mọi đoạn $[A; B]$ chứa c đều tồn tại giá trị $x \in [A; B] \setminus \{c\}$ mà $f(x) = M$.*

Ta xét các khoảng có dạng $D_n = \left[c - \frac{1}{n}; c + \frac{1}{n}\right]$ với $n = 1, 2, 3, \ldots$ thì theo trên, luôn tồn tại số $z_n \in D_n$ để $f(z_n) = M.$ Ta xét hai dãy số $x_n = \min\{z_n, c\}$ và $y_n = \max\{z_n, c\}$. Rõ ràng $z_n \ne c$ nên ta luôn có $x_n < y_n$, và vì hai đầu mút của đoạn D_n dần thu hẹp về c nên $\lim z_n = c$, kéo theo $\lim x_n = \lim y_n = c.$ Do đó, các dãy này cũng thỏa mãn.

Vậy trong mọi trường hợp, bài toán luôn được giải quyết.

Nhận xét.

(1) Nhiều bạn nói rằng đây là bài toán hay, đánh giá được kiến thức nền tảng về giải tích của thí sinh, không đi theo lối mòn "giới hạn dãy số" như nhiều năm trở lại đây. Tuy nhiên, trên thực tế thì rất ít thí sinh tiếp cận được bài, thậm chí có nhiều thí sinh làm xong nhưng không rõ có bị ngộ nhận hay không, cái nào cần chứng minh, cái nào được dùng.

(2) Thật ra học sinh THPT tiếp xúc với Giải tích ở mức độ không sâu, các kiến thức nền hầu hết là thừa nhận chứ không được chứng minh chặt chẽ (về định lý trung gian, định lý Fermat về cực trị, ...) bởi vậy thật khó đòi hỏi thí sinh có thể thoải mái đón nhận một bài toán mang phong cách lý thuyết thế này. Và một câu hỏi đặt ra là: *sắp tới, để giải được những bài như thế này, học sinh cần phải làm gì, phải ôn luyện như thế nào? Lý thuyết quá hàm lâm khô cứng liệu rằng có tạo sức hút cho các thí sinh hay không, đặc biệt khi nhiều bạn đã có tâm lý hơi chán và sợ Toán Olympic*?

(3) Các bài toán về giới hạn dãy số lâu nay gần gũi hơn vì nó còn mang trong đó yếu tố đại số, có biến đổi, có đánh giá bất đẳng thức, yếu tố giải tích đóng vai trò dẫn dắt lập luận xem cần phải làm gì; sẽ "can thiệp thêm" vào các đoạn mà đại số thuần túy không xử lý được như xét tính đơn điệu bằng đạo hàm, các tính chất của giới hạn, ... Tất nhiên, chúng ta vẫn luôn ủng hộ sự sáng tạo, đổi mới, nhưng còn nhiều lựa chọn để có một bài toán ứng dụng Giải tích đẹp và ấn tượng. Chẳng hạn, trong đề IMO Shortlist gần đây, thỉnh thoảng ta vẫn thấy các bài Giải tích như thế xuất hiện, chẳng hạn bài A2 Shortlist 2014:

Hàm số $f:(0;1)\to(0;1)$ *xác định bởi* $f:\begin{cases} x+\dfrac{1}{2} \ , \ \forall x\in D_1 \\ x^2 \quad\ \ , \ \forall x\in D_2 \end{cases}$ *với* $D_1=\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$ *và* $D_2=\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Xét $a,b\in(0;1)$ *và* $a<b$, *xây dựng hai dãy* $(u_n),(v_n)$ *theo công thức* $u_{n+1}=f(u_n), v_{n+1}=f(v_n)$ *và* $u_1=a, v_1=b$. *Chứng minh rằng tồn tại các số hạng* u_n, v_n *không thuộc cùng miền* D_1, D_2.

(4) Như thế, lâu nay thí sinh đã rất quen với kiểu bài "ứng dụng" của giải tích, và có thể nói rằng hầu như các bạn luôn xem đây là câu nhẹ nhàng nhất trong đề thi, tiên quyết phải xử lý được. Năm 2016, trong đề thi HSGQG của Việt Nam, chúng ta đã chứng kiến một bài Giải tích ứng dụng trong số học cực đẹp và trên thực tế, các bài thi, kiểm tra tại các các trường hè, trường đông, đề thi cấp khu vực cũng gặp không ít các bài như thế.

(5) Lại nói về bài toán trên, ta có thể xem đây là một bài giải tích thuần túy, không hề có đóng góp của các yếu tố đại số, số học, … như thường thấy.

- Câu a nếu thí sinh tưởng tượng ra đồ thị của hàm liên tục là đường liền thì thấy vấn đề hiển nhiên, và không hiểu là đề bài muốn làm rõ điều gì ở đây (*có lẽ đề bài muốn thí sinh dùng định lý về tồn tại min/max trong SGK lớp 12 một cách hợp lý*). Nếu dùng hướng phản chứng, nhiều học sinh cũng bị ngộ nhận rằng nếu hàm số không đạt giá trị lớn nhất thì sẽ có $x_0\in\mathbb{R}$ để $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

- Câu b thì thí sinh dễ bị thiếu trường hợp thứ hai mà thường nghĩ rằng hàm sẽ đạt max tại một điểm và giá trị trên lân cận của nó sẽ nhỏ hơn. Ngay ở trường hợp chính, thí sinh cũng phải có những khéo léo và cực kỳ chặt chẽ. Thực ra nếu có các kiến thức về ***inf, sup*** – *cận trên đúng và cận dưới đúng* của Toán cao cấp thì mọi thứ sẽ sáng sủa hơn. Nhiều học sinh bị ngộ nhận trong lời giải khi không biết rằng có nhiều hàm số không sơ cấp có những tính chất lạ, nằm ngoài các suy nghĩ thông thường, chẳng hạn *có những hàm số đạt giá trị lớn nhất tại những điểm hữu tỷ và đạt giá trị bé hơn tại các điểm vô tỷ; như thế thì không tồn tại lân cận nào như trường hợp 1*. Cơ bản thì học sinh cần cẩn thận với kiến thức ít ỏi về Giải tích ở bậc THPT của mình.

  Câu này vẫn còn cách tiếp cận khác, không nhất thiết phải cho hai dãy hội tụ về điểm đạt max mà có thể hội tụ về một điểm cực trị nào đó của hàm số f vẫn được.

(6) Nếu nói rằng bài toán này có mục tiêu định hướng cho học sinh học Giải tích bài bản để có nền tảng sau này học trên Đại học thì không đúng hoàn cảnh, vì đây là kỳ thi chọn HSG, hướng tới kỳ thi lớn hơn như IMO. Và đã từ lâu rồi, IMO không có một bài giải tích thuần túy như thế này, mà đều lồng ghép vào những tình huống đẹp, thân thiện hơn.

Góp ý chỉnh sửa. *Ta có thể giữ nguyên ý a để gợi mở, nhưng ý b nên thay bằng một hàm số cụ thể nào đó có tính chất giống như hàm số ban đầu, có thể phức tạp, có chia nhánh cũng được, nhưng phải có số cụ thể (để loại đi các hàm số không sơ cấp có thể có nhiều tính chất "lạ"). Khi đó, học sinh sẽ tự tin lập luận hơn chứ không còn mù mờ nữa.*

Bài 2. Cho dãy số nguyên dương (x_n) thỏa mãn $0 \le x_0 < x_1 \le 100$ và

$$x_{n+2} = 7x_{n+1} - x_n + 280, \quad \forall n \ge 0.$$

a) Chứng minh rằng nếu $x_0 = 2, x_1 = 3$ thì với mỗi số nguyên dương $n,$ tổng các ước nguyên dương của $x_n x_{n+1} + x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+2}x_{n+3} + 2018$ thì chia hết cho $24.$

b) Tìm tất cả các cặp số (x_0, x_1) để số $x_n x_{n+1} + 2019$ là số chính phương với vô số số $n.$

Lời giải.

a) Bổ đề: *Số $n \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $24 \mid n+1$ thì tổng các ước dương $\sigma(n)$ của nó chia hết cho* $24.$

Thật vậy, nếu d là ước của n thì $\dfrac{n}{d}$ cũng là ước của $n.$ Do $n \equiv 2 \pmod 3$ nên nó không thể là số chính phương, chứng tỏ các ước của nó có thể chia cặp với dạng $d + \dfrac{n}{d} = \dfrac{d^2 + n}{d}.$

Chú ý rằng $n \equiv 2 \pmod 3$ và $d^2 \equiv 1 \pmod 3$ nên tổng trên chia hết cho $3.$

Mặt khác, $n \equiv 7 \pmod 8$ và $d \equiv 1,3,5,7 \pmod 8$, suy ra $d^2 \equiv 1 \pmod 8$ nên tổng trên cũng chia hết cho $8.$ Vì $(3,8) = 1$ nên tổng trên chia hết cho $24,$ bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán,

Đặt $y_n = x_n x_{n+1} + x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+2}x_{n+3}$, ta cần chứng minh rằng $\sigma(y_n + 2018)$ chia hết cho $24.$ Ta cũng có $2018 \equiv 2 \pmod{24}$ nên theo bổ đề, ta cần có $y_n \equiv -3 \pmod{24}$.

Xét chu kỳ của số dư khi chia cho 3 của dãy thông qua nhận xét $x_{n+2} \equiv x_{n+1} - x_n + 1 \pmod 3$ ta có $2,0,2,0,2,0,\ldots$ dãy số dư này tuần hoàn theo chu kỳ 2 và

$$y_n \equiv 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0 \pmod 3.$$

Lại xét chu kỳ của số dư khi chia cho 8 của dãy thông qua nhận xét $x_{n+2} \equiv -x_{n+1} - x_n \pmod 8$ ta có $2,3,3,2,3,3,2,3,3,\ldots$ nghĩa là dãy này tuần hoàn với chu kỳ 3 và

$$y_n \equiv 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 5 \pmod 8.$$

Suy ra $y_n + 3$ vừa chia hết cho $3,$ vừa chia hết cho 8 nên $y_n \equiv -3 \pmod{24}$. Ta có đpcm.

b) Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. *Xét dãy số nguyên (z_n) thỏa mãn $z_{n+2} = az_{n+1} - z_n + b$ thì đại lượng sau đây là hằng số*

$$z_{n+1}^2 - z_n z_{n+2} - bz_{n+1} \text{ với mọi } n \ge 0.$$

Thật vậy, ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned}
&z_{n+1}^2 - z_n z_{n+2} - bz_{n+1} = z_{n+1}(z_{n+1} - b) - z_n(az_{n+1} - z_n + b) \\
&= z_{n+1}(az_n - z_{n-1}) - z_n(az_{n+1} - z_n + b) \\
&= z_n^2 - z_{n-1}z_{n+1} - bz_n
\end{aligned}$$

Đẳng thức trên đúng với mọi $n \ge 0$ nên $z_{n+1}^2 - z_n z_{n+2} - bz_{n+1} = z_1^2 - z_0 z_2 - bz_1 = const.$

Thay vào bài toán, ta thấy rằng tồn tại $C \in \mathbb{Z}$ để $x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2} - 280x_{n+1} = C$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
&x_{n+1}^2 - x_n(7x_{n+1} - x_n + 280) - 280x_{n+1} = C \\
&\Leftrightarrow x_{n+1}^2 + x_n^2 - 7x_{n+1}x_n - 280(x_{n+1} + x_n) = C \\
&\Leftrightarrow (x_{n+1} + x_n - 140)^2 = 9(x_{n+1}x_n + 2019) - 9 \cdot 2019 + C + 140^2 \\
&\Leftrightarrow u_n^2 = v_n^2 + C + 1429
\end{aligned}$$

trong đó, $u_n = x_{n+1} + x_n - 140, v_n = 3\sqrt{x_{n+1}x_n + 2019}$ với mọi $n \ge 0.$

Vì dãy (x_n) tăng mà các giá trị đều là số nguyên nên dãy này không bị chặn, do đó, (u_n) tăng và không bị chặn. Đồng thời, nếu $x_n x_{n+1} + 2019$ là số chính phương thì $v_n \in \mathbb{Z}^+.$

Do đó, $u_n + v_n \mid C + 1429$ với vô hạn giá trị $n.$ Rõ ràng điều này chỉ xảy ra khi $C + 1429 = 0.$ Vì thế nên ta có đẳng thức

$$(x_{n+1} + x_n - 140)^2 = 9(x_{n+1}x_n + 2019) \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

Ta có $(x_0 + x_1 - 140)^2 \ge 2019 \cdot 9 > 44^2 \cdot 3^2 = 132^2$ nên $|140 - x_0 - x_1| \ge 133$ mà $0 \le x_0 < x_1 < 101$ nên $140 - (x_0 + x_1) \ge 133$, tức là $x_0 + x_1 \le 7.$ Ta cũng có

$$C = x_1^2 + x_0^2 - 7x_1x_0 - 280(x_1 + x_0) = -1429.$$

Để ý rằng $x_1^2 + x_0^2 \le 49$ nên $-1429 = C < 49 - 280(x_1 + x_0),$ kéo theo $x_0 + x_1 \ge 5.$

Với $x_1 + x_0 = 7$ thì $x_1^2 + x_0^2 - 7x_1x_0 = 531$ và với $x_1 + x_0 = 6$ thì $x_1^2 + x_0^2 - 7x_1x_0 = 251,$ dễ thấy đều không thỏa. Do đó $x_0 + x_1 = 5$, kéo theo $x_0x_1 = 6$ nên dễ thấy $x_0 = 2, x_1 = 3.$

Vậy cặp giá trị cần tìm là $(x_0; x_1) = (2; 3)$.

Nhận xét.

(1) Nói về mặt nội dung, đây là một bài Toán đẹp mắt và mới về dãy số nguyên sai phân cấp hai, đòi hỏi kết hợp nhiều kiến thức mới xử lý được. Tình huống đặt ra không quá xa lạ, thậm chí có nét quen thuộc nhưng trên thực tế, cũng không nhiều thí sinh làm được bài này, hoặc là chỉ làm được ý a hoặc ý b. Vậy thì nguyên nhân do đâu? Ta phân tích kỹ hơn nội dung của các câu như bên dưới.

(2) Bổ đề được dùng ở câu a: đã xuất hiện từ trước đó, là một bài điển hình trong **PEN – tuyển tập số học** của diễn đàn *artofproblemsolving.com*. Ngay trong đề chọn đội tuyển lần 2 của Việt Nam năm 2005, bổ đề này cũng có xuất hiện ở vị trí bài 2. Các chuyên đề Số học về hàm tổng các ước cũng có không ít lần đề cập tới bổ đề này. Một hình thức khác của nó là: "Nếu $m,n \in \mathbb{Z}^+$ và $mn+1$ chia hết cho 24 thì $m+n$ chia hết cho 24". Tuy nhiên, ta phải cũng cảm nhận được sự **nguy hiểm** của nó, bởi vì kết quả của bổ đề chỉ có tính 1 chiều. Tức là không nhất thiết các số có tổng các ước chia hết cho thì nó phải đồng dư theo chẳng hạn số hoặc số Bởi vậy, một học sinh <u>không biết trước bổ đề này</u> thì không có cơ hội nào để tìm ngược ra nó và giải quyết được nhẹ nhàng bài a như trên.

(3) Xin hãy xem lại bài VN TST 2005: *Xét số* $A = 2004^{2005} - 2005^{2004} - 2052^{1991}$*, chứng minh rằng* A *là hợp số dương có tổng các ước dương chia hết cho* 24.

Bài toán này có nét dễ hơn bài 2a VMO năm nay, vì có ý chứng minh hợp số là cho điểm; và ít nhất thì đây là số cụ thể, ta có thể đánh giá số dư của nó không khó. Ở bài dãy số trên, số cho quá lớn, không thể tính vài giá trị để dự đoán gì được, <u>các đường lập luận và tư duy</u> của học sinh trở nên khó khăn. Bài toán hoàn toàn có thể đổi cặp số $280, 2019$ thành các số nhỏ hơn, nhưng có lẽ phải là số 280 để tương ứng thu được số 2019 cho đẹp!

Góp ý chỉnh sửa. *Chứng minh rằng nếu* $x_0 = 2, x_1 = 3$ *thì với mỗi số nguyên dương* n, *ký hiệu* $y_n = x_n x_{n+1} + x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+2}x_{n+3} + 2018$*; chứng minh rằng* $y_n + 1$ *chia hết cho* 24*. Từ đó suy ra rằng tổng các ước dương của* y_n *chia hết cho* 24.

Bài toán sẽ nhẹ nhàng đi nhiều, nhưng cũng đòi hỏi học sinh cả các kỹ năng: *tìm tính tuần hoàn của dãy số dư khi chia cho* 24*, biết dùng ý tưởng thặng dư Trung Hoa để chia thành hai hệ thặng dư của* 3 *và của* 8 *để giảm tính toán; cuối cùng, phải biết cách chứng minh bổ đề (là một kết quả đẹp) để kết thúc bài*. Bài toán tuy mang tính lắp ghép nhưng nó vừa vẹn ở mức 2-3đ của đề thi.

(4) Câu b là một bài toán đẹp và mới. Tuy nhiên, độ khó của nó có lẽ nó vượt quá tầm của đề thi VMO. Vấn đề phải suy luận được bổ đề cần dùng vẫn lặp lại tương tự. Dãy số nguyên sai phân tuyến tính cấp hai dạng thuần nhất thì kết quả: *" là cấp số nhân"* là không mới, nó xuất hiện nhiều lần ở các đề thi của Việt Nam cũng như các sách chuyên đề; cho nên việc học sinh nắm và ứng dụng vào bài là yêu cầu hợp lý. Tuy nhiên, khi có cộng thêm số thì câu chuyện lại khác nhiều!

Góp ý chỉnh sửa. *Thay yêu cầu "tồn tại vô số" thành "với mọi".*

Khi đó, học sinh có thể từ vài số hạng đầu để tìm ra cặp số nhờ việc đánh giá phương trình nghiệm nguyên (không dễ lắm, và phải rất cơ bắp nhưng dù sao cũng tự nhiên). Một khi đã có dãy số cụ thể rồi thì có thể có nhiều cách tiếp cận, thậm chí dùng cả công thức tổng quát cũng được, nói chung là hướng xử lý sẽ phong phú hơn. Yêu cầu tồn tại vô số như trên nguy hiểm ở chỗ phải tìm ra được <u>đúng đẳng thức liên hệ</u> để mà kẹp, học sinh cũng không có cách xoay xở nào khác khi số lớn và không được dùng máy tính.

(5) Ngoài ra, tác giả bài viết cũng thấy hơi bất ngờ; khi tham khảo lại nội dung trong công văn của Bộ GD-ĐT về cấu trúc đề thi HSG QG môn Toán từ năm 2011. Chẳng hạn: https://dantri.com.vn/giao-duc-khuyen-hoc/bo-gd-dt-ban-hanh-cau-truc-de-thi-hsg-quoc-gia-nam-2011-1292601122.htm hoặc http://ninhbinh.edu.vn/van-ban-cong-van/van-ban-bo-gd-dt/cau-truc-de-thi-chon-hsg-quoc-gia-lop-12.html Dưới đây là nội dung trong đó:

***Đề thi ngày thứ nhất**: gồm 4 bài toán; cụ thể như sau:*

- Một bài về phân môn Đại số;
- Một bài về phân môn Giải tích;
- Một bài về phân môn Hình học;
- Một bài về phân môn Tổ hợp.

Phân bố điểm cho các bài: *mỗi bài 5 điểm*.

***Đề thi ngày thứ hai**: gồm 3 bài toán; cụ thể như sau:*

- Một bài về phân môn Đại số;
- Một bài về phân môn Số học;
- Một bài về phân môn Tổ hợp hoặc Hình học.

Phân bố điểm cho các bài: *một bài 6 điểm; hai bài còn lại, mỗi bài 7 điểm*.

Chú ý: *Các phân môn trong cấu trúc trên được sắp xếp theo thứ tự a, b, c. Các bài toán trong đề thi không nhất thiết phải sắp xếp theo thứ tự đã liệt kê ở trên*.

Rõ ràng câu số 2 của đề thi này thuộc phân môn Số học, và kéo theo ngày thứ nhất không có phân môn Tổ hợp, chưa đúng lắm với cấu trúc mà Bộ GD-ĐT đã thông báo từ 2010.

Bài 3. Với mỗi đa thức $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, đặt

$$\Gamma(f(x))=a_0^2+a_1^2+\cdots+a_m^2.$$

Cho đa thức $P(x)=(x+1)(x+2)\ldots(x+2020)$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2019 đa thức đôi một phân biệt $Q_k(x)$ với $1\le k\le 2^{2019}$ với các hệ số dương thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $\deg Q_k(x)=2020$.

ii) $\Gamma\left(Q_k(x)^n\right)=\Gamma\left(P(x)^n\right)$ với mọi số nguyên dương n.

Lời giải. Trước hết, ta xét bổ đề sau:

Bổ đề. $\Gamma(f(x))$ *bằng hệ số tự do trong khai triển của* $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$, *ký hiệu là* $\delta\left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Thật vậy, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ nên

$$\delta\left(f(x) f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)\left(\frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{x} + a_0\right)$$

khai triển ra được hệ số tự do là $a_n^2 + a_{n-1}^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2$.

Từ đó ta thấy rằng với mọi đa thức $f(x)$ và mọi số nguyên dương n thì

$$\begin{aligned}\Gamma\left((ax+b)^n f(x)\right) &= \delta\left((ax+b)^n \left(\frac{a}{x} + b\right)^n f(x) f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \delta\left(\left(a + \frac{b}{x}\right)^n (a+bx)^n f(x) f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \Gamma\left((bx+a)^n f(x)\right).\end{aligned}$$

Do đó, trong mỗi nhị thức của $P(x) = (x+1)(x+2)\ldots(x+2020)$, việc đổi chỗ $x+k \to kx+1$ với $2 \le k \le 2020$ sẽ không làm thay đổi giá trị của $\Gamma(P(x)^n)$.

Vì mỗi nhị thức ta có thể lựa chọn giữa việc giữ nguyên hoặc thay đổi nên có tổng cộng 2^{2019} cách thay đổi, ứng với 2^{2019} đa thức phân biệt thỏa mãn đề bài.

Nhận xét.

(1) Đây cũng là một bài toán đẹp, nhưng lại quá đánh đố. Kết quả nêu ra ở đầu lời giải thực ra rất hiển nhiên, không có gì để chứng minh, nhưng để nghĩ ra việc ứng dụng của nó vào bài này thì lại không dễ. Phải bắt tay vào giải và suy nghĩ nghiêm túc thì mới thấy được tính đánh đố của bài toán. Nếu có sẵn đáp án thì chắc hẳn ai cũng công nhận đây là bài toán đại số nhẹ nhàng, cơ bản, có kiểm tra được kiến thức biến đổi đại số.

(2) Nếu bài toán chỉ yêu cầu xây dựng 2^{2019} đa thức $Q_k(x)$ để $\Gamma\left(Q_k(x)\right) = \Gamma\left(P(x)\right)$ thì có phần sáng sủa hơn. Thí sinh có thể mạnh dạn thử với các đa thức bậc thấp để tìm ra quy luật. Việc thêm mũ vào thực ra đối với lập luận trên không cần thiết, không ảnh hưởng gì; nhưng đối với phần lớn thí sinh khi chưa hình dung được hướng tiếp cận sẽ bị "choáng" vì điều kiện quá chặt chẽ, chỉ ra đa thức thôi là đã khó huống gì là 2^{2019} đa thức!

(3) Bài toán cũng không nói rõ $f(x)$ đang xét có hệ số thực hay hệ số nguyên; điều mà hầu hết các đề thi ở quy mô khu vực, toàn quốc đều rất cẩn thận trong việc định nghĩa này.

(4) Bên cạnh đó, đây là một bài không phải mới. Như mọi người cũng đã biết, bài toán tương tự là đề Putnam 1985. Ngay năm trước, tại lớp ôn luyện thi Toán quốc tế 2018, bài này cũng đã được giới thiệu với các bạn trong đội tuyển và mọi người đều công nhận tính "đánh đố" của nó *(không có bạn nào làm được trong vòng 30 phút).*

Góp ý chỉnh sửa. *Với mỗi đa thức* $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, *ta ký hiệu* $\Omega(P)$ *là tổng bình phương các hệ số của đa thức* $P(x)$.

a) Chứng minh rằng $\Omega(P)$ *cũng chính là số hạng không chứa* x *của biểu thức* $P(x)P\left(\frac{1}{x}\right)$.

Từ đó chứng minh rằng tồn tại đa thức $Q(x)$ *monic mà*

$$\Omega((P(x)^n) = \Omega((2x^2+7x+3)^n) \text{ với mọi } n \in \mathbb{Z}^+.$$

b) Chứng minh rằng với mọi đa thức khác hằng, monic $P(x), Q(x)$, *ta đều có*

$$\Omega(P(x)Q(x)) \geq P^2(0) + Q^2(0).$$

Bài toán trên là một bài trong bộ đề ôn tập mà tác giả bài viết này vào giữa tháng 11 năm trước, có trên group "***Hướng tới VMO 2019***" (*group này có các thành viên đến từ rất nhiều đội tuyển thi VMO vừa rồi*). Bài toán nhẹ hơn ở chỗ có ý dẫn dắt; ngoài ra, ý b có nét đại số thể hiện rõ hơn và cũng cần dùng tính chất ở bổ đề mới có thể lập luận thuận tiện được.

Bài 4. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I và trực tâm H. Trên các tia AB, AC, BC, BA, CA, CB lần lượt lấy các điểm $A_1, A_2, B_1, B_1, C_1, C_2$ sao cho $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = AC, CC_1 = CC_2 = AB$. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(BB_1, CC_1); (CC_1, AA_1); (AA_1, BB_1)$.

a) Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ không vượt quá diện tích tam giác ABC.

b) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp $A'B'C'$. Các đường thẳng AJ, BJ, CJ lần lượt cắt BC, CA, AB theo thứ tự tại R, S, T. Gọi K là điểm chung của các đường tròn ngoại tiếp AST, BTR, CRS. Giả sử tam giác ABC không cân, chứng minh $IHJK$ là hình bình hành.

Lời giải.

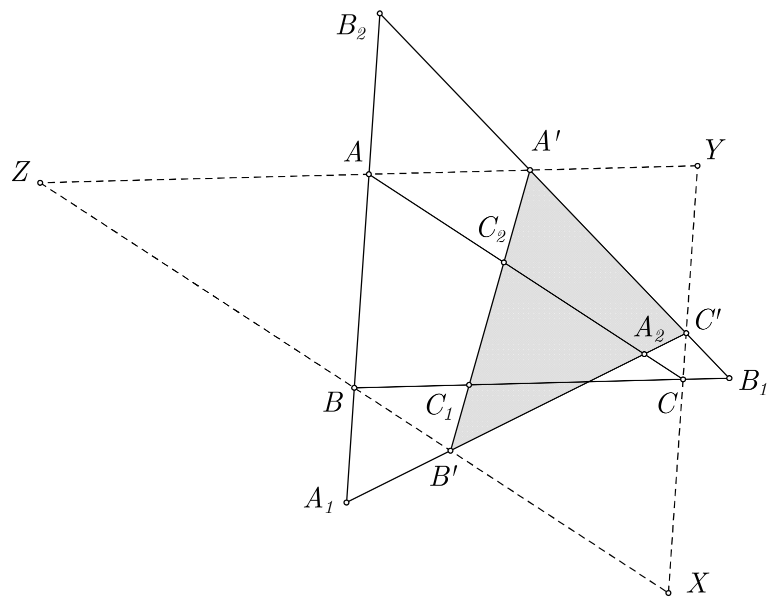
a) Gọi X, Y, Z lần lượt là điểm đối xứng của A, B, C qua trung điểm BC, CA, AB. Gọi A'' là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác XYZ với YZ.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $AC \geq AB$. Ta có

$$AA'' = \frac{1}{2}(A''Z - A''Y) = \frac{1}{2}\left(\frac{XZ+YZ-XY}{2} - \frac{YX+YZ-XZ}{2}\right) = \frac{1}{2}(XZ - XY) = AC - AB.$$

Do đó, $AA'' = AB_2$, kết hợp với $AA'' \parallel BC$ ta có $\angle AB_2A'' = \angle BB_2B_1 = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}$ hay A'' nằm trên B_1B_2. Chứng minh tương tự thì $A'' \in C_1C_2$ hay $A' \equiv A''$.

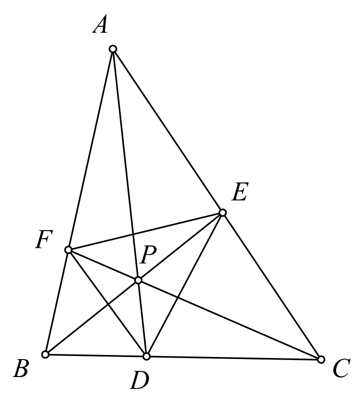
Một cách tương tự, ta cũng có B', C' cũng là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp của tam giác XYZ với các cạnh XZ, XY.



Để ý rằng $S_{XYZ} = 4S_{ABC}$ nên để chứng minh $S_{ABC} \ge S_{A'B'C'}$, ta đưa về chứng minh $S_{XYZ} \ge 4S_{A'B'C'}$.

Bổ đề. Cho tam giác ABC, điểm P bất kỳ nằm trong tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là giao điểm của các tia AP, BP, CP với BC, CA, AB. Khi đó, $S_{DEF} \le \frac{1}{4} S_{ABC}$.

Thật vậy,



Đặt $\frac{BD}{BC} = a, \frac{CE}{CA} = b, \frac{AF}{AB} = c$. Ta cần chứng minh $P = a \cdot (1-c) + b \cdot (1-a) + c \cdot (1-b) \ge \frac{3}{4}$.

Mặt khác, theo định lý Ceva thì $abc = (1-a)(1-b)(1-c)$ hay $1 - P = 2abc$. Mặt khác

$$(abc)^2 = [a(1-a)][b(1-b)][c(1-c)] \le \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \text{ nên } 2abc \le \frac{1}{4}.$$

Bổ đề được chứng minh. Áp dụng bổ đề vào bài toán, ta có ngay đpcm.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B, C và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Ta thấy J chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

Bổ đề. *Gọi N là điểm Nagel của tam giác ABC thì I, G, N thẳng hàng và $NG = 2GI$.*

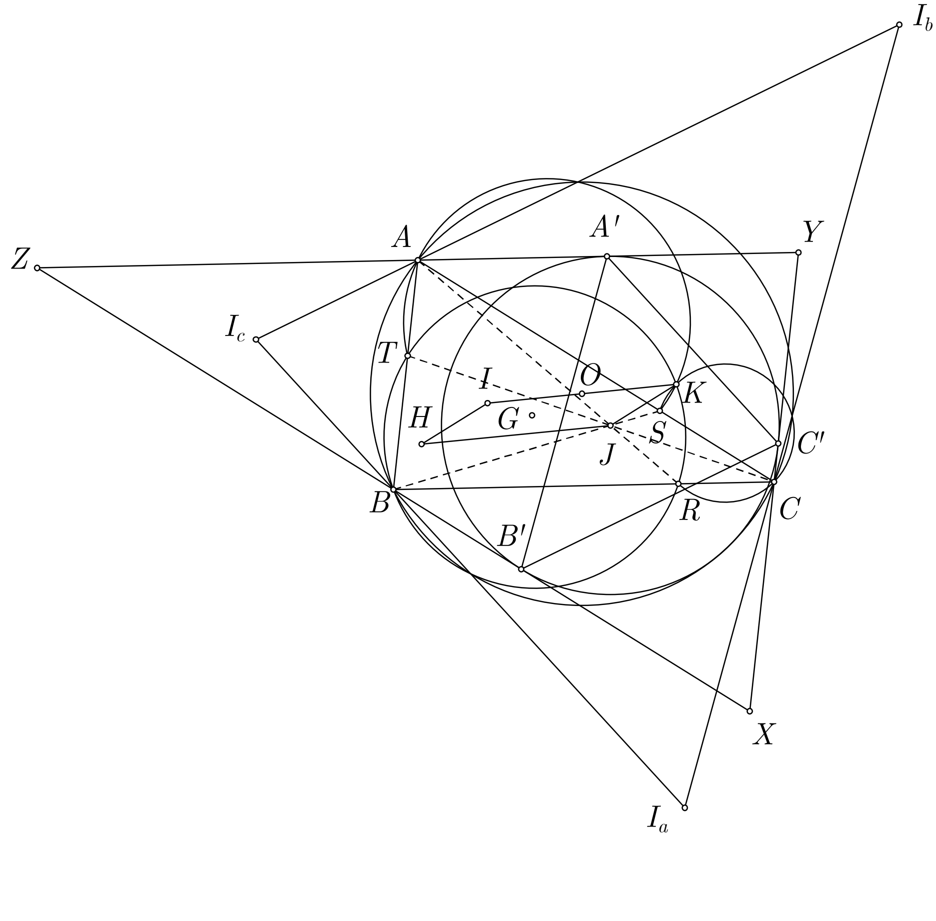
Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$ và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ thì dễ dàng có được các tọa độ tỷ cự

$$\begin{cases} a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NB} + c\overrightarrow{NC} = 2p\overrightarrow{NI}, \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow p\overrightarrow{NA} + p\overrightarrow{NB} + p\overrightarrow{NC} = 3p\overrightarrow{NG}, \\ (p-a)\overrightarrow{NA} + (p-b)\overrightarrow{NB} + (p-c)\overrightarrow{NC} = \vec{0}. \end{cases}$$

Từ đây suy ra $3p\overrightarrow{NG} = 2p\overrightarrow{NI} \Rightarrow \overrightarrow{NG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{NI}$ nên bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán,

Xét phép vị tự tâm G tỉ số -2 lần lượt biến các điểm A, B, C thành X, Y, Z. Mà I, J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, XYZ nên $\dfrac{\overline{GI}}{\overline{GJ}} = -\dfrac{1}{2}$ hay $J \equiv N$ chính là điểm *Nagel* tam giác ABC. Điều này chứng tỏ R là tiếp điểm của (I_a) lên BC hay $I_aR \perp BC$.



Gọi K' là điểm đối xứng của I qua O. Do trung điểm của đoạn thẳng II_a cũng là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn (O) nên đường trung bình song song với $K'I_a$ của tam giác II_aK' vuông góc với BC hay $K'R \perp BC.$ Chứng minh tương tự thì $K'S \perp CA, K'T \perp AB.$ Do đó $K' \in (AST).$ Tương tự, $K' \in (BTR), (CRS)$ nên $K' \equiv K.$

Khi tam giác ABC không cân, các điểm đều phân biệt. Theo định lý *Thales*, ta có $IO \parallel HJ$ và $IO = HJ$ mà O là trung điểm IK nên $IHJK$ là hình bình hành.

Nhận xét.

(1) Điểm mấu chốt của bài toán chính là AA' song song với $BC.$ Nếu phát hiện được ý này, học sinh sẽ không khó để dựng ra được tam giác XYZ và khôi phục lại được mô hình gốc. Kỳ thực nếu vẽ bằng phần mềm, ta dễ dàng nhận ra và chứng minh rất tự nhiên. Tuy nhiên, với điều kiện dựng bằng tay, mọi thứ lại rất không đơn giản.

Góp ý chỉnh sửa. Câu a yêu cầu chỉ chứng minh $AA' \parallel BC$, bỏ yếu tố BĐT không cần thiết đi.

(2) Ý a cũng có nét tương tự với bài toán sau (được xây dựng từ đề VMO 2014):

Cho tam giác ABC nhọn không cân. Trung trực AB cắt AC ở A_1, trung trực AC cắt AB ở A_2. Các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 được định nghĩa tương tự. Các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cắt nhau đôi một tạo thành tam giác $A'B'C'.$ Chứng minh rằng $(ABC), (A'B'C')$ tiếp xúc nhau.

Ở ý a, ta thấy trong tam giác thì là tam giác trung bình, còn là tam giác có các đỉnh là ba tiếp điểm của đường tròn nội tiếp lên cạnh. Theo định lý Feuerbach thì hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau. Ở bài toán vừa nêu trên thì nếu xét tam giác tạo bởi giao điểm các tiếp tuyến của ở ta sẽ có kết quả tương tự.

(3) Tiếp theo đó, vì phần lớn học sinh không nhận ra được bản chất mô hình nên dù có chứng minh được ý a *bằng cách này hay cách khác* thì không thể giải quyết tiếp ý b. Thực ra học sinh Việt Nam đã quen với các bài toán lắp ghép cầu kỳ, phức tạp; tuy nhiên, một khi đã ghép thì tác giả ít giấu đi các điểm mấu chốt vì trong điều kiện hình khó thì việc dựng yếu tố phụ quả thật rất đánh đố (*nếu hình đẹp như bài 6 đề IMO 2018 thì việc dựng đường phụ không phải bàn*). Ở bài toán này, tác giả ***vừa lắp ghép, vừa giấu điểm đi***.

(4) Hãy cùng xem lại bài sau trong đề ôn tập của đội tuyển PTNK TPHCM năm 2017-2018:

Cho tam giác ABC nhọn không cân trực tâm H, tâm nội tiếp I và có M, N, P lần lượt là trung điểm $BC, CA, AB.$ Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là đường thẳng qua M, N, P và vuông góc với đường phân giác trong các góc A, B, C tương ứng. Giả sử d_1, d_2, d_3 cắt nhau đôi một tạo thành tam giác DEF và K là tâm ngoại tiếp DEF. Chứng minh rằng K là trung điểm HI.

Không khó để thấy rằng bài này với bài 4 là một, chẳng qua bài số 4 của đề thi đã ***xây dựng ngược*** tam giác trung bình trước rồi giấu tam giác gốc đi.

Ngày thi thứ hai.

Bài 5. Xét đa thức $f(x)=x^2-\alpha x+1$ với $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Khi $\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$, hãy viết $f(x)$ thành thương của hai đa thức với các hệ số không âm.

b) Tìm tất cả các giá trị α để $f(x)$ có thể viết được thành thương của hai đa thức với các hệ số không âm.

Lời giải.

a) Ta xét phép biến đổi sau

$$\left(x^2-\frac{\sqrt{15}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{15}}{2}x+1\right)=(x^2+1)^2-\frac{15}{4}x^2=x^4-\frac{7}{4}x^2+1,$$

$$\left(x^4-\frac{7}{4}x^2+1\right)\left(x^4+\frac{7}{4}x^2+1\right)=(x^4+1)^2-\frac{49}{16}x^4=x^8-\frac{17}{16}x^4+1,$$

$$\left(x^8-\frac{17}{16}x^4+1\right)\left(x^8+\frac{17}{16}x^4+1\right)=(x^8+1)^2-\frac{289}{256}x^8=x^{16}+\frac{223}{256}x^8+1$$

Từ đó suy ra $f(x)$ chính là thương của

$$x^{16}+\frac{223}{256}x^8+1 \text{ và } \left(x^2+\frac{\sqrt{15}}{2}x+1\right)\left(x^4+\frac{7}{4}x^2+1\right)\left(x^8+\frac{17}{16}x^4+1\right).$$

b) Giả sử $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=x^2-\alpha x+1$ với P,Q là các đa thức hệ số không âm. Thay $x=1,$ ta có

$$2-\alpha=\frac{P(1)}{Q(1)}>0 \text{ nên } \alpha<2.$$

Ta sẽ chứng minh rằng mọi số thực $\alpha<2$ đều thỏa mãn đề bài. Thật vậy,

Nếu $\alpha\le 0$ thì chính đa thức $f(x)$ đã thỏa mãn nên ta có thể chọn $P(x)=f(x),Q(x)=1$.

Nếu $\alpha\in(0;2),$ tương tự câu a, ta thực hiện phép nhân

$$(x^2-\alpha x+1)(x^2+\alpha x+1)=x^4+(2-\alpha^2)x^2+1.$$

Tiếp tục như thế, ta thấy rằng hệ số của số hạng đầu và cuối của đa thức thu được luôn là 1, còn hệ số ở giữa được xác định bởi dãy số

$$(u_n):\begin{cases}u_0=\alpha,\\ u_{n+1}=2-u_n^2,\ n\ge 0\end{cases}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại số hạng dương trong dãy này. Giả sử ngược lại rằng với mọi $n \ge 1$ thì $u_n < 0.$ Khi đó, vì $\alpha \in (0;2)$ nên bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $-2 < u_n < 0, \forall n \ge 1.$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 2 - u_n - u_n^2 = (2+u_n)(1-u_n) > 0$ nên $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \ge 1$; chứng tỏ dãy này tăng. Mà dãy bị chặn trên bởi 0 nên có giới hạn là $L \in (-2;0].$ Ngoài ra,

$$L = 2 - L^2 \Leftrightarrow L = 1 \vee L = -2.$$

Điều mâu thuẫn này cho thấy điều giả sử phản chứng là sai, tức là tồn tại $n = N$ để $u_N \ge 0.$

Đến đây, ta xét dãy đa thức $f_n(x) = x^{2^{n+1}} + u_n x^{2^n} + 1$ với $n = 1,2,3,\ldots,N$ thì dễ thấy rằng $f(x)$ chính là thương của hai đa thức $f_N(x)$ và $f_1(x)f_2(x)\ldots f_{N-1}(x)$.

Rõ ràng các đa thức này đều có hệ số không âm và thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nhận xét.

(1) Trước hết, có thể nói đây là bài toán hay và mức độ rất phù hợp với đề VMO. Câu a mang tính dẫn dắt, câu b thì điều kiện cần và một phần của điều kiện đủ (trường hợp $\alpha \le 0$) là tự nhiên. Thực tế thì cũng có nhiều thí sinh chọn hướng xây dựng đa thức $g(x)$ bậc cao rồi đồng nhất hệ số, giải bất phương trình để cho tích $f(x)$ thu được có hệ số không âm; nhưng đều không thể thành công! Có thể chứng tỏ rằng đa thức thỏa mãn có bậc nhỏ nhất là 16; nếu điều chỉnh số α ở câu a để có đa thức bậc 8 thỏa mãn thì bài toán sẽ nhẹ nhàng hơn.

(2) Nếu nói rằng ngày 1 gồm nhiều bài "mẹo" thì ngày 2 sẽ được mô tả bằng từ "cũ". Bài toán trên có liên hệ với ba bài toán sau: *IMO Shortlist 1997, VMO 1994 và USA TST 2017.* Cả ba đều liên quan đến cùng chủ đề đa thức biểu diễn thành thương của hai đa thức với hệ số không âm, thậm chí bài IMO Shortlist là tổng quát của bài toán này khi xét dạng đặc biệt $(x+1)^n f(x)$ với n đủ lớn sẽ có tất cả các hệ số đều không âm. Bên cạnh đó, bài USA TST còn biện luận được cả bậc nhỏ nhất của $f(x), g(x)$, tùy theo giá trị của $\alpha \in (0;2).$

(3) Ngoài cách tiếp cận bằng cách xây dựng dãy số, để ý rằng $\alpha \in (0;2)$ và $\alpha \to 2 - \alpha^2$, ta cũng có thể sử dụng lượng giác. Đặt $\alpha = 2\cos\varphi$ với $\varphi \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $2 - \alpha^2 = 2\cos 2\alpha$ và ta cũng thu được kết luận không khó vì sẽ tồn tại số nguyên dương k để $2^k \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right).$

(4) Bởi tính gợi mở, dẫn dắt của ý a và tính phong phú trong hướng tiếp cận của ý b, ta có thể nói rằng bài toán này là phù hợp nhất cho kỳ thi VMO 2019. Nếu nó được đặt vào vị trí bài 1 ngày 1, tin rằng nhiều thí sinh sẽ giải được và đề thi tổng thể sẽ thân thiện hơn nhiều. Bài này cũng có yếu tố giải tích, có thể thay thế cho cho câu dãy và đa thức của ngày 1. Tuy nhiên, khi đặt vào ngày 2, bài toán có phần không hay khi trước đó đã có một câu đa thức, các thí sinh có thế mạnh ở các mảng đại số như BĐT hay PTH không có cơ hội thể hiện.

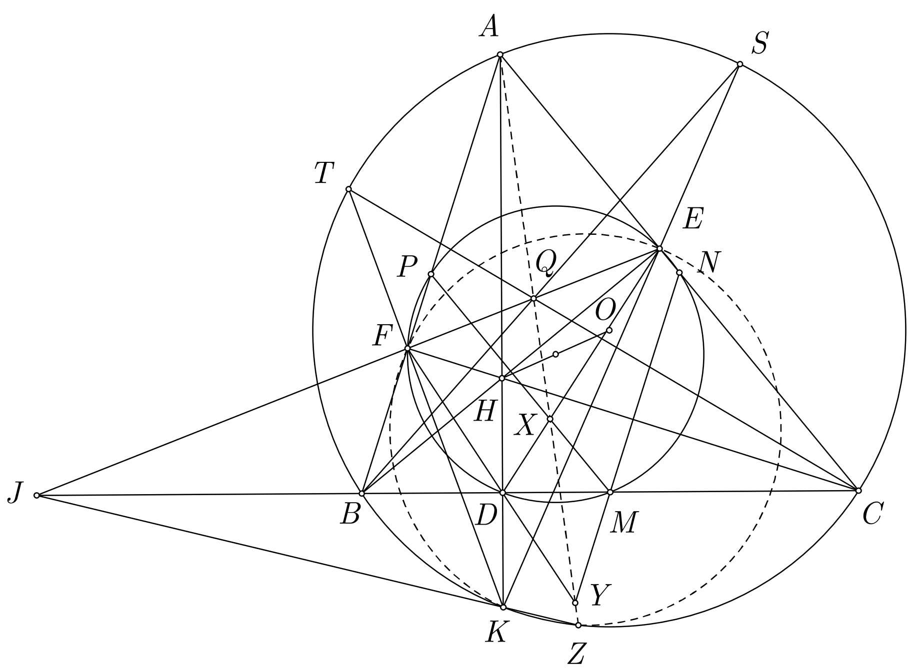
Bài 6. Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm cạnh BC,CA,AB và D,E,F lần lượt là chân đường cao ứng với các đỉnh A,B,C của tam giác ABC. Gọi K là đối xứng của H qua BC. Hai đường thẳng DE,MP cắt nhau tại X; hai đường thẳng DF,MN cắt nhau tại Y.

a) Đường thẳng XY cắt cung $\overset{\frown}{BC}$ của (O) tại Z. Chứng minh rằng K,Z,E,F đồng viên.

b) Hai đường thẳng KE,KF cắt lại (O) tại S,T. Chứng minh rằng BS,CT,XY đồng quy.

Lời giải.

a) Trước hết, áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} D & P & N \\ M & E & F \end{pmatrix}$ cùng nằm trên đường tròn *Euler* của tam giác ABC, ta thu được giao điểm các cặp đường thẳng $(DE,MP);(DF,MN);(PF,NE)$ thẳng hàng hay nói cách khác là A,X,Y thẳng hàng.



Dễ thấy rằng, $180° - \angle BAC = \angle BHC = \angle BKC$ nên $K \in (O)$. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng XY chia đôi EF.

Ta có MN,MP là các đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel AB, MP \parallel AC$. Do đó, theo định lý *Thales*, ta có

$$\frac{\overline{YD}}{\overline{YF}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{MB}}, \frac{\overline{XE}}{\overline{XD}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MD}}.$$

Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng XY, EF. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác DEF, ta có $\frac{\overline{QF}}{\overline{QE}} = \frac{\overline{XD}}{\overline{XE}} \cdot \frac{\overline{YF}}{\overline{YD}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{MC}} = -1$ hay Q là trung điểm EF. Từ đây suy ra AQ, AM đẳng giác trong góc $\angle BAC$ nên AQ chính là đường đối trung của tam giác ABC. Vì thế nên tứ giác $ABZC$ điều hòa.

Gọi J là giao điểm của EF, BC thì $(JD, BC) = -1$ nên $K(JD, BC) = -1$, mà $K(ZA, BC) = -1$ kéo theo KZ đi qua J.

Cuối cùng, ta có $\overline{JE} \cdot \overline{JF} = \overline{JB} \cdot \overline{JC} = \overline{JK} \cdot \overline{JZ}$ hay các điểm K, Z, E, F đồng viên.

b) Ta có $\angle EBF = \angle ECH = \angle EDH, \angle HED = \angle HCD = \angle BEF$ vì các tứ giác $BCEF, EHDC$ nội tiếp. Do đó, $\triangle BEF \sim \triangle DEH (g.g)$. Từ đó, ta có biến đổi tỉ số

$$\frac{HK}{2EH} = \frac{HD}{EH} = \frac{BF}{EF} = \frac{BF}{2FQ},$$

kết hợp với $\angle BFQ = \angle EHK$, ta thu được $\triangle BFQ \sim \triangle KHE (c.g.c)$ nên

$$\angle FBQ = \angle EKH = \angle ABS$$

nên các điểm B, Q, S thẳng hàng. Tương tự thì các điểm C, T, S cũng thẳng hàng.

Do đó, BS, CT, XY đồng quy tại Q.

Nhận xét.

(1) Có lẽ đây là bài toán được nhiều thí sinh làm nhất. Tuy hình vẽ có phức tạp nhưng cách đặt vấn đề quen thuộc nên không quá khó để thí sinh giành trọn vẹn điểm. Hướng tiếp cận cho câu a, b cũng rất phong phú. Yếu tố X, Y trong đề bài tuy đơn giản nhưng cũng khá mới mẻ; và như thế, ý a của bài toán này là bài toán hay và đẹp. Vấn đề nêu ra ở câu a cũng có xuất hiện trong đề ***Sharygin 2015***:

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có AS là đối trung và $S \in (O)$. Đường tròn (O') thay đổi qua B, C và cắt AB, AC ở D, E. Đặt $BE \cap CD = I$, $AI \cap (O) = T$. Chứng minh rằng $S \in (DET)$.

(2) Tiếp theo, hãy so sánh ý b với ***bài 3 trong đề VMO 2017***:

Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp trong (O) và có trực tâm H, các đường cao BE, CF. Giả sử AH cắt lại (O) ở $D \neq A$. Các đường thẳng DE, DF cắt (O) lần lượt ở P, Q. Đường tròn (AEF) cắt (O) và AO ở R, S. Chứng minh rằng BP, CQ, RS đồng quy.

Bài toán này sau đó đã xuất hiện nhiều lần trong năm vừa rồi. Kết quả quan trọng thu được từ bài toán trên là: BP, CQ chia đôi đoạn thẳng EF. Nếu đã biết trước điều này thì ý b của bài 6 xem như nhẹ nhàng, chỉ cần chứng tỏ thêm XY chia đôi EF là được.

Bài 7. Có một số mảnh giấy hình vuông có cùng kích thước, mỗi mảnh được chia caro thành 5×5 ô vuông ở cả hai mặt. Ta dùng n màu để tô các mảnh giấy sao cho mỗi ô của mỗi mảnh giấy được tô cả hai mặt bởi cùng một màu. Hai mảnh giấy màu được coi là giống nhau nếu có thể xếp chúng chồng khít lên nhau sao cho các cặp ô vuông ở cùng vị trí có cùng màu. Chứng minh rằng ta thu được không quá $\frac{1}{8}\left(n^{25}+4n^{15}+n^{13}+2n^{7}\right)$ mảnh giấy đôi một không giống nhau.

Lời giải.

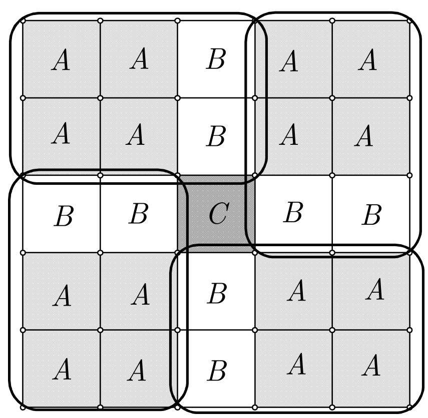
Ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Cho số nguyên dương $m=2k+1$ với $k\ge 1$, xét bảng ô vuông $m\times m$ mà mỗi ô được tô bởi một trong n màu. Khi đó số cách tô khác nhau (không nhận được nhau qua phép quay) bằng

$$\frac{n(a^4+a^2+2a)}{4} \text{ với } a=n^{k^2+k}.$$

Thật vậy,

Trước hết, ta thấy rằng ô ở giữa, ký hiệu là C như trên hình, không bị ảnh hưởng qua các phép biến hình nên luôn có n cách tô cho nó.



Ta chia nhóm 4 hình vuông $k\times k$ ở các góc, ký hiệu là các nhóm loại A và nhóm các ô tạo thành hình chữ thập (không tính ô C), ký hiệu là các nhóm loại $B.$ Theo chiều kim đồng hồ, ta xét 4 hình chữ nhật trên bảng xoay xung quanh C, mà mỗi cặp gồm hai nhóm A,B nằm cạnh nhau sao cho B nằm liền sau A.

Dễ thấy số ô có trên mỗi cặp $(A-B)$ như thế là k^2+k nên số cách tô cho mỗi nhóm là $a=n^{k^2+k}$. Đến đây, ta coi mỗi cặp đó như là một "đỉnh" của một hình vuông $XYZT$ khác. Ta sẽ đếm số cách tô màu cho các "đỉnh" X,Y,Z,T sao cho chúng không nhận được nhau qua phép quay. Ta có các trường hợp sau:

(1) Cả bốn được tô cùng màu, có a cách.

(2) Tô màu theo chu kỳ $2,$ ta quan tâm đến cách tô cho 2 đỉnh kề nhau nào đó với số cách là $\frac{a^2-a}{2}$.

(3) Tồn tại một cặp giống nhau không theo chu kỳ 2, khi đó số cách tô là $a^4-(a^2-a)-a$. Các cách tô màu này lại có hoán vị vòng tròn nên sẽ sinh ra $\frac{a^4-a^2}{4}$ cách tô khác nhau.

Cộng lại ta được $\frac{a^4-a^2}{4}+\frac{a^2-a}{2}+a=\frac{a^4+a^2+2a}{4}$. Vậy nên số cách tô cần tìm là

$$n\left(\frac{a^4+a^2+2a}{4}\right) \text{ với } a=n^{k^2+k}.$$

Trở lại bài toán,

Sử dụng bài toán trên khi $2k+1=5$, ta có số cách tô mảnh giấy 5×5 không tạo ra nhau qua phép quay là $n\left(\frac{n^{24}+n^{12}+2n^6}{4}\right)=\frac{n^{25}+n^{13}+2n^7}{4}.$ Gọi S là tập hợp các cách tô màu này.

Tuy nhiên, theo giả thiết thì các phép đối xứng trục cũng có ảnh hưởng đến số lượng (vì các mảnh giấy có đến hai mặt). Ta xét trong S hai loại mảnh giấy là A,B: các mảnh giấy có thể và không thể tạo ra chính nó thông qua phép đối xứng trục.

Nhận thấy rằng mỗi mảnh giấy loại A tạo ra 2 mảnh giấy khác nhau trong S (đáng lẽ chỉ được tính là 1 ở trong bài toán ta đang quan tâm); trong khi đó, mỗi mảnh giấy loại B tạo ra đúng 1 mảnh giấy trong $S.$ Do đó $2A+B=\frac{n^{25}+n^{13}+2n^7}{4}$.

Ngoài ra, dễ dàng đếm được $B=n^{15}$ (tô màu cho một nửa bên trái của mảnh giấy, xét luôn đường ở giữa). Từ đó ta tính được

$$2A+2B=(2A+B)+B=\frac{1}{4}(n^{25}+n^{13}+2n^7)+n^{15} \text{ nên}$$

$$A+B=\frac{n^{25}+4n^{15}+n^{13}+2n^7}{8}.$$

Đây chính là số lượng mảnh giấy khác nhau cần đếm. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Nhận xét.

(1) Thí sinh cần phải nhận thấy rằng đề bài tô màu hai mặt của mảnh giấy như nhau để loại bỏ đi các trường hợp ***trùng nhau do phép đối xứng.*** Thoạt nhìn, nhiều bạn sẽ tưởng rằng việc hai mặt (mà mỗi mặt tô giống nhau) như thế là dư thừa và sẽ chưa cảm nhận được độ khó của bài toán.

(2) Yêu cầu đếm có xét cả phép đối xứng là mới mẻ và rõ ràng là bài toán đếm nâng cao đòi hỏi phải thật tập trung mới có hy vọng xử lý được. Nếu không biết công cụ như bổ đề đã nêu, hoặc các kết quả liên quan đến **định lý Burnside của lý thuyết nhóm** thì việc đếm thuần túy sẽ vô cùng khó khăn, các phép bù trừ thường gặp dễ bị sai đáp số.

(3) Nếu chỉ xét phép quay, ta có ngay "***phiên bản đổi số***" của bài VMO 2010:

Cho bảng ô vuông 3×3 và số nguyên dương n. Tìm số cách tô màu không như nhau khi tô mỗi ô của bảng bởi một trong n màu (hai cách tô được xem là như nhau nếu cách này nhận được từ cách kia thông qua phép quay quanh tâm).

Như thế thì đây lại là một bài toán cũ, ít nhất là ở cách đặt vấn đề, lấy lại một đề thi trước đó chưa được 10 năm; sẽ lại tạo lợi thế cho các thí sinh đã đọc được lời giải bài cũ.

(4) Trên thực tế, có nhiều thí sinh yêu thích các bài toán tổ hợp rời rạc nhưng cũng phải "đầu hàng" trước bài toán này, bởi tính cồng kềnh và khô khan của nó. Nếu đề bài chỉ muốn dừng lại ở việc ước lượng kết quả (chắc rằng sẽ có tiếp cận dễ hơn) mà không cần phải tính ra chính xác thì có thể đưa ra một ước lượng ít chặt hơn, chẳng hạn số cách tô $\ge \frac{n^{25}}{8}$ và $\le \frac{n^{25}+7n^{15}}{8}$ chia thành hai ý. Các thí sinh sẽ có thể có nhiều cách xoay sở hơn và ít nhất thì thì hình thức cũng thân thiện hơn.

Góp ý chỉnh sửa. *Có thể thêm ý a khi xét số nhỏ như $n=2,3,\ldots$; việc tô màu lên bảng sẽ có các tính chất đặc biệt, chẳng hạn như: tồn tại các hình chữ nhật có đỉnh cùng màu hay tồn tại các hàng/cột được tô bởi cùng màu hoặc đủ n màu, …*

Khi đó, học sinh có thể vận dùng ý tưởng Dirichlet, đếm bằng hai cách, … để giải quyết một cách nhẹ nhàng hơn cho dù nó không liên hệ với bài toán đếm như đề gốc. Đề thi lúc đó cũng thể hiện sự đầu tư hơn và cũng tạo điều kiện cho thí sinh yêu tổ hợp giành được các điểm thành phần chứ không bỏ trắng.

(5) Lại nói về một bài đòi hỏi đếm cẩn thận (nhưng không quá cầu kỳ, rắc rối), ta xem thử một bài tổ hợp thi thử VMO được phát triển dựa trên ý tưởng của bài 4 đề IMO 2018.

Cho bàn cờ vua 8×8 (các ô đôi một phân biệt vì theo luật cờ vua, các ô được ký hiệu tọa độ $a\to h$ và $1\to 8$). Hỏi có bao nhiêu cách đặt hai quân mã đen, hai quân mã đỏ lên bàn cờ sao cho mỗi quân đặt lên một ô và không có hai quân cùng màu nào có thể ăn nhau?

(6) Thật ra việc đếm, ước lượng cũng là kỹ năng quan trọng trong tổ hợp và cũng xuất hiện không ít ở các kỳ thi quy mô khu vực và quốc tế. Tuy nhiên, các bài đòi hỏi <u>phép đếm quá cơ bắp, xử lý nhiều bước và phải tính toán bù trừ rắc rối</u> thì sẽ làm mất đi ý nghĩa của nó; nhất là đối với các thí sinh chịu áp lực thời gian như kỳ thi vừa rồi. Rõ ràng đây ***chưa phải là một lựa chọn hay, hợp tình hợp lý*** cho bài cuối của đề thi lần này!