CHƯƠNG 1

CÁC BÀI TOÁN BIẾN ĐỔI GÓC

Ở trung học cơ sở, chúng ta bắt đầu với việc học các kiến thức quan trọng của hình học phẳng: các khái niệm về các đối tượng hình học như điểm, đường thẳng, đoạn, tam giác, tứ giác, đường tròn, ... Các khái niệm về tam giác bằng nhau, tam giác đồng dạng, tỉ số lượng giác, góc trong đường tròn,....Cùng với đó, một tập các tính chất, định lý cũng được hình thành tạo thành một hệ thống hình học phẳng cổ điển logic chặc chẽ và đầy đủ.

Trong các phần hình học THCS, ta quan tâm đến các kĩ thuật biến đổi góc như: góc tạo bởi 1 đường thẳng cắt hai đường thẳng song song, mối liên hệ giữa vuông góc và song song, tổng các góc của một tam giác, đa giác, góc trong đường tròn, các kĩ thuật so sánh góc thường dùng là chứng minh tam giác bằng nhau, tam giác đồng dạng, tứ giác nội tiếp, tỉ số lượng giác, trong đó tứ giác nội tiếp là một nội dung cực kì quan trọng trong việc so sánh các góc. Trong nhiều bài toán, việc giải được hay không là việc phát hiện được các tứ giác nội tiếp có trong hình đó.

Chương đầu tiên, chúng tôi ưu tiên các bài toán về biến đổi góc, nhắc lại một số định lý, tính chất quan trọng ở hình học trung học cơ sở, các kiến thức này đôi lúc cũng đủ để giải các bài toán thi học sinh giỏi ở mức olympic, tất nhiên để giải các bài toán khó hơn ta phải học thêm nhiều kiến thức mới ở bật trung học phổ thông để có thêm cách nhìn khác. Nói nôm na là chương 1 giống như học đứng tấn trong học võ, lúc nào đứng tấn mà chắc thì sau đó mới học được các chiêu thức khác.

§1. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ TÍNH CHẤT QUAN TRỌNG

A ĐỊNH LÝ VÀ TÍNH CHẤT

Định nghĩa 1.1

Tứ giác nội tiếp là tứ giác có 4 đỉnh cùng nằm trên một đường tròn.

Sau đây là một tính chất để chứng minh tứ giác nội tiếp.

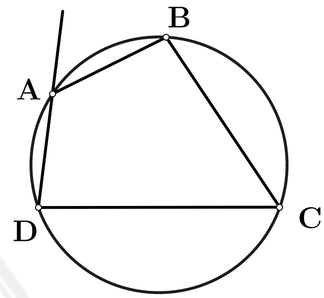
Tính chất 1.1.

(Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp) Một tứ giác là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi thỏa một trong các điều kiện sau:

(a) Hai góc đối bù nhau.

(b) Góc ngoài bằng góc đối trong.

(c) Hai đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.

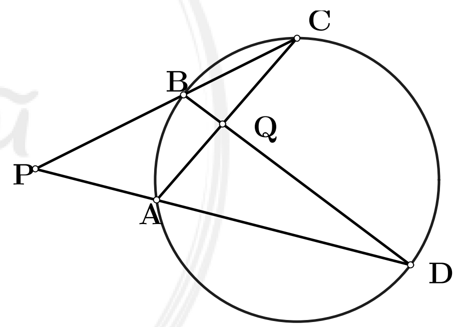


Tính chất 1.2.

(Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi P là giao điểm AD và BC; Q là giao điểm của AC và BD. Khi đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi thỏa một trong các điều kiện sau:

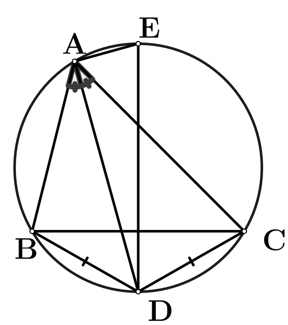
(a) $PA \cdot PD = PB \cdot PC$.

(b) $QA \cdot QC = QB \cdot QD$.



Tính chất 1.3.

(Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp) Trong một tam giác, giao điểm của trung trực một cạnh với đường phân giác trong (phân giác ngoài) của góc đỉnh còn lại thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.



! Chứng minh các dấu hiệu nhận biết trên dành cho bạn đọc.

Định lí 1.1

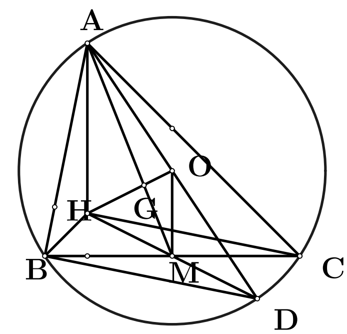
Trong một tam giác, trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp cùng thuộc một đường thẳng.

Chứng minh.

Vẽ đường kính AD, khi đó $BHCD$ là hình bình hành, trung điểm M của BC cũng là trung điểm HD.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, khi đó G thuộc AM và $AG = \dfrac{2}{3}AM$.

Xét tam giác AHD thì G thuộc trung tuyến AM và $AG = \dfrac{2}{3}AM$ nên cũng là trọng tâm, mà O là trung điểm AD nên G thuộc đoạn thẳng HO và $HG = 2GO$.



Định nghĩa 1.2

Dường thẳng đi qua trọng tâm, trực tâm, và tâm ngoại tiếp của một tam giác được gọi là đường thẳng Euler của tam giác đó.

Định lí 1.2

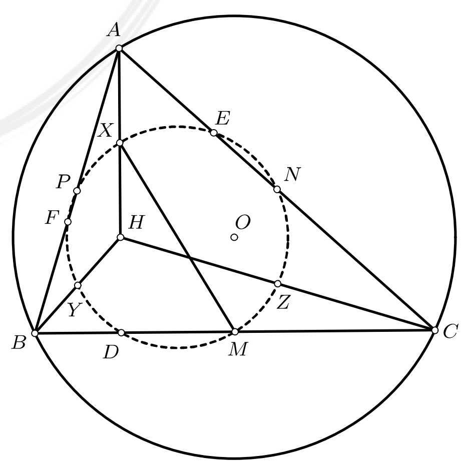
Trong một tam giác, chân ba đường cao, trung điểm ba cạnh và trung điểm đoạn thẳng nối trực tâm với đỉnh cùng thuộc một đường tròn, đường tròn này có tâm thuộc đường thẳng Euler của tam giác.

Chứng minh.

Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H; M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC, AB; gọi X, Y, Z là trung điểm các đoạn HA, HB, HC. Ta cần chứng minh $D, E, F, M, N, P, X, Y, Z$ cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $XN \parallel CH, MN \parallel AB$ mà $CH \perp AB$ nên $XN \perp MN$. Suy ra N thuộc đường tròn đường kính XM.

Chứng minh tương tự ta cũng có Z, Y, P thuộc đường tròn đường kính XM.



Tam giác EHA vuông tại E có X là trung điểm AH nên $EX = XA$, suy ra $\angle XEA = \angle XAE$. Tương tự $\angle MEC = \angle MCE$.

Mà

$$\angle XAE + \angle MCE = 90^\circ \Rightarrow \angle XEA + \angle MEC = 90^\circ$$

suy ra $\angle XEM = 90^\circ$, từ đó E thuộc đường tròn đường kính XM. Tương tự ta cũng có F thuộc

đường tròn đường kính XM.
Vậy 9 điểm cùng thuộc đường tròn đường kính XM.

Tâm đường tròn Euler là trung điểm của XM, mặt khác $XHMO$ là hình bình hành nên cũng là trung điểm của OH, tức là tâm đường tròn Euler thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Bán kính đường tròn Euler bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Định nghĩa 1.3

Đường tròn đi qua 9 điểm như định lý trên được gọi là đường tròn Euler của tam giác, hay còn được gọi là đường tròn 9 điểm.

!

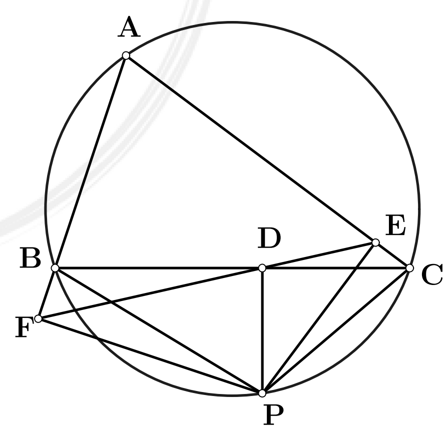
- Trong tam giác ABC có H là trực tâm. Khi đó xét 4 điểm A, B, C, H thì mỗi điểm là trực tâm của tam giác tạo bởi 3 điểm còn lại. Từ đó đường tròn Euler của các tam giác ABC, ABH, ACH và BCH trùng nhau.
- Mô hình 4 điểm A, B, C, H được gọi là mô hình trực tâm, thường được sử dụng để quy các bài toán lạ về quen thuộc.

Định lí 1.3

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn w, P là điểm bất kì trên w, khi đó hình chiếu của P trên các đường thẳng BC, AC, AB cùng thuộc một đường thẳng, đường thẳng này được gọi là đường thẳng Simson của tam giác ABC ứng với điểm P.

Chứng minh.

Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của P trên BC, AC, AB. Ta xét vị trí P và các điểm như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.



Ta có các tứ giác $ABPC, PDBF, PDEC$ nội tiếp, suy ra

$\angle PDB = \angle PBF, \angle PDE + \angle ACP = 180°, \angle PBF = \angle ACP$

suy ra

$$\angle PDF + \angle PDE = \angle PDE + \angle ACP = 180°$$

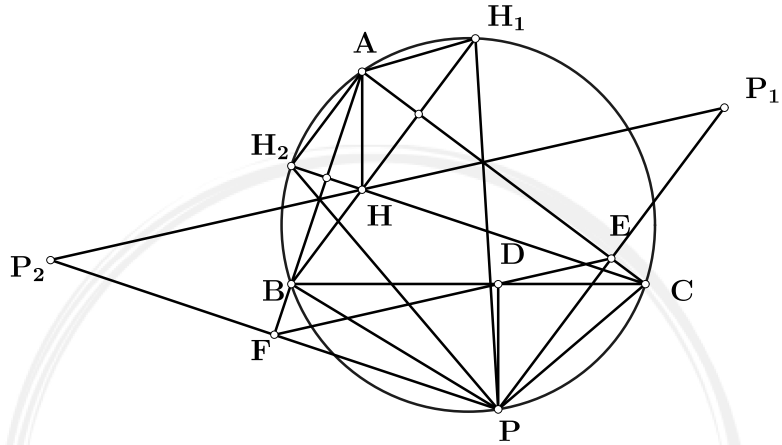
do đó D, E, F thẳng hàng.

Nhận xét: Dường thẳng Simson cũng có chiều đảo, tức là nếu D, E, F thẳng hàng thì P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, bạn đọc tự chứng minh.

Định lí 1.4

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn w, P là một điểm thuộc w, khi đó các điểm đối xứng của P qua các đường thẳng BC, AC, AB cùng thuộc một đường thẳng và đường thẳng này qua trực tâm của tam giác ABC. (Đường thẳng này được gọi là Đường thẳng Steiner của tam giác ABC ứng với điểm P).

Chứng minh.



Gọi P_1, P_2, P_3 đối xứng của P qua AC, AB, BC, do D, E, F thẳng hàng nên P_1, P_2, P_3 thẳng hàng. Ta cần chứng minh P_1P_2 qua trực tâm H của tam giác ABC.

Gọi H_1, H_2 là giao điểm của BH, CH với w, khi đó H_1, H_2 đối xứng của H qua AC, AB.
Theo tính chất đối xứng trục ta có $\triangle AHP_1 = \triangle AH_1P$, suy ra $\angle AHP_1 = \angle AH_1P$, tương tự thì $\angle AHP_2 = \angle AH_2P$.

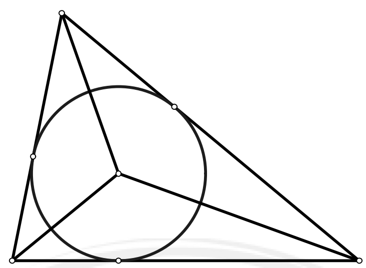
Khi đó $\angle AHP_1 + \angle AHP_2 = \angle AH_1P + \angle AH_2P = 180^\circ$, suy ra $H \in P_1P_2$, điều cần chứng minh.

! Các định lý về đường thẳng euler, đường tròn euler, đường thẳng simson, đường thẳng steiner được khai thác nhiều và được mở rộng trong các bài viết chuyên sâu. Nhìn chung, chứng minh các định lý này không khó, các em học sinh có thể tự chứng minh được, do đó trong các bài thi học sinh giỏi ở bậc trung học phổ thông thì không cần phải chứng minh lại, mà có thể sử dụng giải quyết các bài toán.

Tiếp theo ta qua một số tính chất của đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp, những tính chất này cũng được khai thác nhiều trong các bài toán hình học phẳng.

Định nghĩa 1.4

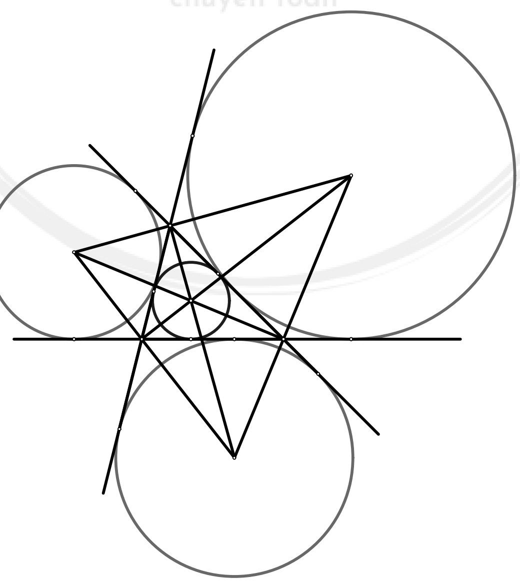
Đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác.
Tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác.



Định nghĩa 1.5

Đường tròn bàng tiếp là đường tròn nằm ngoài tam giác tiếp xúc với một cạnh và phần kéo dài của hai cạnh còn lại.
Tâm đường tròn bàng tiếp là giao điểm của hai đường phân giác ngoài và một đường phân giác trong.

Trong mỗi tam giác có ba đường tròn bàng tiếp ứng với ba đỉnh của tam giác.



Tính chất 1.4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB tại D, E, F. Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn ứng với các đỉnh A, B, C. (I_a) tiếp xúc với BC, AC, AB tại D', E', F'. Đặt $p = \dfrac{AB+BC+AC}{2}, S = S_{ABC}$. Ta có một số tính chất sau:

(a) $AE = AF = p - a$ và $AE' = AF' = p$ và $BD = CD' = \dfrac{AB+BC-AC}{2}$.

(b) K là điểm đối xứng của D qua I thì A, K, D' thẳng hàng.

(c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua trung điểm các cạnh của tam giác $I_aI_bI_c$.

Chứng minh. (a) Ta có $AE = AF, BD = BF, CD = CE$, khi đó

$$AB + AC - BC = AF + BF + AE + CE - BD - CD = AE + AF = 2AE$$

suy ra

$$AE = \frac{AB+AC-BC}{2} = \frac{AB+BC+AC}{2} - BC = p - a$$

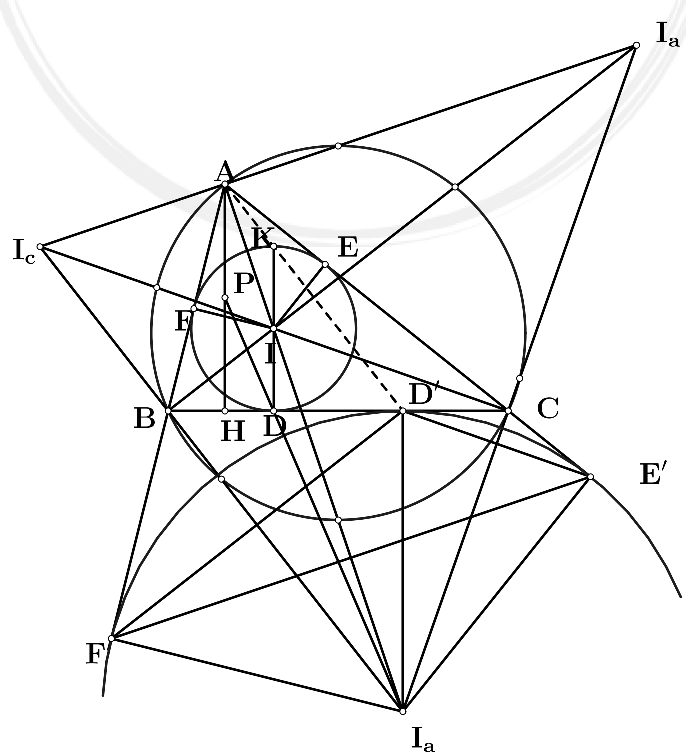
Ta có $BD' = BF, CD' = CE$, suy ra

$$AB+AC+BC = AB+BD'+CD'+AC = AB+BF'+AC+CE' = AE'+AF' = 2AE' \Rightarrow AE' = AF' =$$

Chứng minh tương tự thì

$$BD = p - b, CD' = CE' = AE' - AC = p - b$$

do đó $BD = CD'$.



(b) Ta có $IK = IE, I_aD' = I_aE'$ nên $\dfrac{IK}{I_aD'} = \dfrac{IE}{I_aE'}$, hơn nữa $IE \parallel I_aE'$ nên $\dfrac{IE}{I_aE'} = \dfrac{AI}{AI_a}$; từ đó $\dfrac{AI}{AI_a} = \dfrac{IK}{I_aD'}$, suy ra

$$\triangle AIK \backsim \triangle AI_aD' \Rightarrow \angle IAK = \angle I_aAD'$$

từ đó A, K, D' thẳng hàng.

(c) Dễ thấy, tam giác $I_aI_bI_c$ thì I_aA, I_bB, I_cC là 3 đường cao cắt nhau tại I, khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC chính là đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$, do đó qua trung điểm 3 cạnh của tam giác này.

Tính chất 1.5. Cho tam giác ABC, đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AC, AB tại D, E, F. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, AC. Khi đó EF, BI, MN đồng quy.

Chứng minh. Gọi K là giao điểm của BI và EF, ta chứng minh K, M, N thẳng hàng.
Ta có

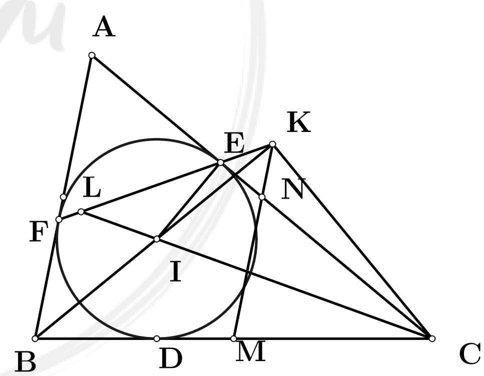
$$\angle KEC = \angle AEF = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$$

và

$$\angle KIC = \angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 90^\circ - \angle BAC$$

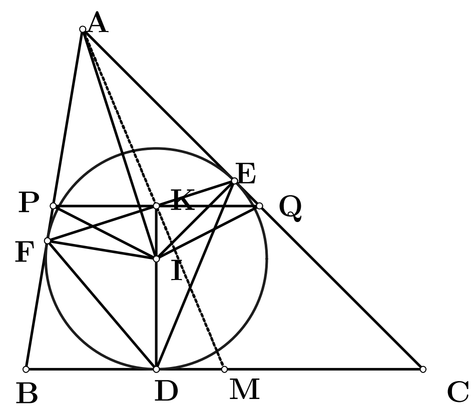
Suy ra $\angle KEC = \angle KIC$, tứ giác $KEIC$ nội tiếp, do đó $\angle BKC = 90^\circ$.

Tam giác KBC vuông tại K có KM trung tuyến nên $MK = MB = MC$, suy ra $\angle KMC = 2\angle KBC = \angle ABC$, suy ra $KM \parallel AB$. (1)
Mặt khác tam giác ABC có MN là đường trung bình nên $MN \parallel AB$. (2)
Từ (1) và (2) ta có K, M, N thẳng hàng.



Tính chất 1.6. Cho tam giác ABC, đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AC, AB tại D, E, F. ID cắt EF tại K, khi đó AK đi qua trung điểm M của BC.

Chứng minh.



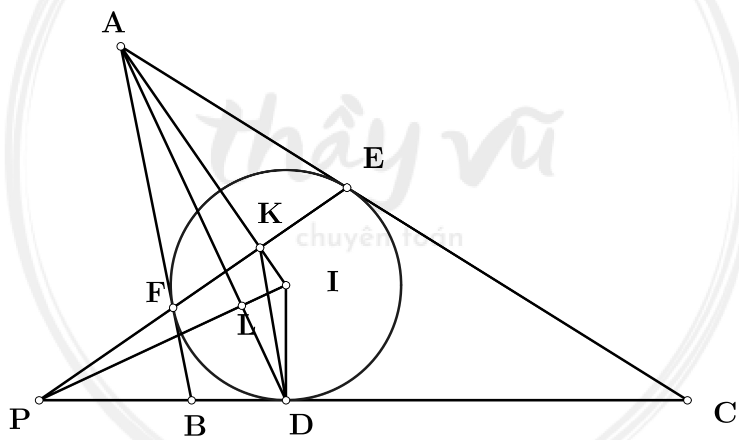
Qua K vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại P và Q, ta chứng minh K là trung điểm PQ.

Ta có $\angle IK \perp PQ$, từ đó suy ra $IKPF, IKEQ$ nội tiếp, suy ra $\angle IPK = \angle IFK, \angle IQK = \angle IEK$ mà IEF cân tại I nên $\angle IEK = \angle IFK$, suy ra $\angle IPQ = \angle IQK$. Tam giác IPQ cân nên K là trung điểm PQ.

Gọi M là giao điểm của AK với BC, ta có $\dfrac{KP}{MB} = \dfrac{AK}{AM} = \dfrac{KQ}{MC}$, mà $KP = KQ$ nên $MB = MC$, hay M là trung điểm cạnh BC.

Tính chất 1.7. Cho tam giác ABC, đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F. EF cắt BC tại P. Khi đó $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{DB}{DC}$ và $IP \perp AD$.

Chứng minh.



- Theo định lý menelaus ta chứng minh được $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{DB}{DC}$.
- Gọi K là giao điểm của IA và EF ta có $\angle IKP = 90^\circ$, suy ra $IKPD$ nội tiếp, do đó $\angle IPD = \angle IKD$.

  Mặt khác $IK \cdot IA = IE^2 = ID^2$, suy ra $\triangle IKD \backsim \triangle IDA \Rightarrow IKD = \angle IDA$.

  Do đó $\angle IPD = \angle IDA$, suy ra $DA \perp IP$.

Trên đây là một số định lý và tính chất quan trọng trong chương trình trung học cơ sở, nhiều bài toán thi ở bậc phổ thông vẫn còn sử dụng các tính chất này, tất nhiên ở mức khó nhận diện hơn.

B CÁC VÍ DỤ

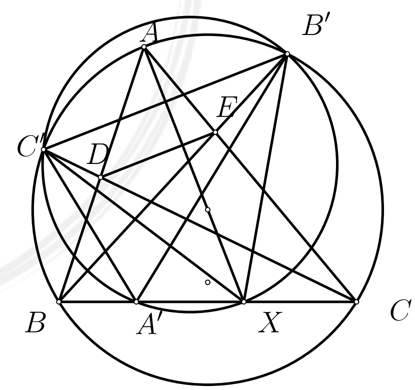
Trong phần này ta xét một số ví dụ, khi giải bài toán xong thì nói sao cũng được chấp nhận, bản thân người viết cũng không nhớ rõ mình đã suy nghĩ gì trong lúc giải các bài toán này, tuy vậy để giúp học sinh tập làm quen với suy luận thì tác giả cũng nêu ra một số nhận xét về bài toán, đó có thể là chìa khóa giúp giải được bài toán, tuy vậy để giải bài toán không phải chỉ có một chìa khóa mà có thể nhiều chìa khác nhau, nên hầu hết các nhận xét này là mang tính chất cá nhân, các bạn có thể lưu ý hoặc không.

Ví dụ 1.1. Cho tam giác ABC, một đường tròn thay đổi qua B, C cắt các cạnh AB, AC tại D, E. Gọi B' là giao điểm của BE và (ABC), C' là giao điểm của CD và (ABC). Trên BC lấy điểm A' sao cho $\angle C'A'B = \angle B'A'C$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Nhận xét:

- Vẽ hình và dự đoán điểm cố định, xem mối liên hệ với các điểm có trong hình. Có thể vẽ một trường hợp đặc biệt là w là đường tròn đường kính BC.
- $BDEC$ nội tiếp thì $OA \perp DE$;
- Chứng minh được $B'C' \parallel DE$;



Gọi X là giao điểm của AO và BC, thì X cố định. Ta chứng minh $X \in (A'B'C')$.
Ta có

$$\angle ABC' = \angle ACC' = \angle ABB' = \angle AC'B'$$

suy ra tam giác $AB'C'$ cân tại A, từ đó AO là trung trực của $B'C'$, suy ra $XB' = XC'$;
Xét tam giác $A'B'C'$ có $A'X$ là phân giác ngoài của $B'A'C'$ và X thuộc trung trực $B'C'$ nên theo tính chất 1.3 thì X thuộc $(A'B'C')$, ta có điều cần chứng minh.

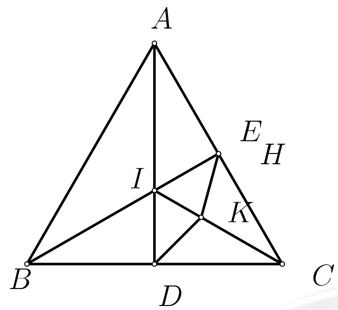
Ví dụ 1.2. (IMO 2009) Cho tam giác ABC cân tại A. Phân giác trong góc A và B cắt BC và AC lần lượt tại D và E. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD. Cho $\angle BEK = 45°$. Tìm tất cả các giá trị của $\angle BAC$.

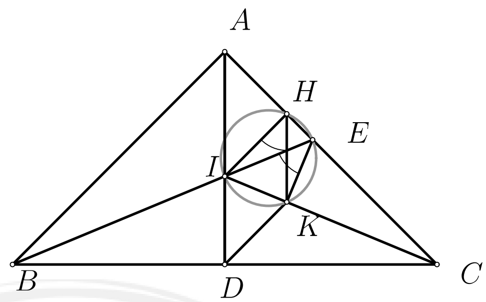
Lời giải

Nhận xét:

- Đây là một bài toán khá thú vị, tìm góc, ở trình độ IMO, nhiều bạn vào giải thì cố gắng đặc góc và tìm một phương trình, từ đó giải phương trình lượng giác để ra góc cần tìm. Cách này ta sẽ giải trong chương sau.

- Một trường hợp dễ thấy đó là tam giác ABC đều thì giả thiết đúng, tuy vậy đây chưa phải là đáp án duy nhất.
- Tính chất phân giác gợi ý cho ta về phép đối xứng trục, $\angle IED = \angle IDK = 45^\circ$ và D, E nằm khác phía với IC, nếu ta lấy điểm đối xứng của D qua IC sẽ tạo ra tứ giác nội tiếp; đây cũng là kĩ thuật vẽ thêm cần lưu ý.





Gọi I là giao điểm của AD và BE; H là hình chiếu của I trên AC. Ta xét hai trường hợp.

- Nếu $H \equiv E$. Khi đó tam giác ABC là tam giác đều, rõ ràng thỏa đề bài.
- Nếu H không trùng E. Ta có
$$\angle IHK = \angle IDK = 45^\circ = \angle IEK$$
suy ra I, E, H, K đồng viên.

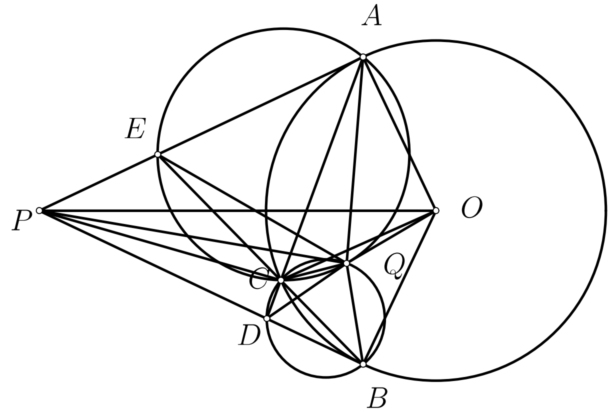
  Từ đó
$$\angle IKE = \angle IHE = 90^\circ \Rightarrow \angle ICA + \angle IEC = 90^\circ$$
  Khi đó tam giác IKE vuông cân tại K, suy ra $\angle EIK = 45^\circ$. Từ đó tính được $\angle BAC = 90^\circ$.

Ví dụ 1.3. Cho đường tròn (O) và dây cung AB khác đường kính. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại điểm P. Trên cung nhỏ AB lấy điểm C sao cho CAB khác tam giác cân. Các đường thẳng CA và BP cắt nhau tại D, BC và AP cắt nhau tại E. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACE, BCD và OPC thẳng hàng.

Lời giải

Nhận xét:

- Bài này chứng minh 3 đường tròn cùng đi qua hai điểm, trong đó đã có 1 điểm chung là C;
- Do đó khi gọi giao điểm còn lại của 2 đường tròn thì bài toán quy về chứng minh tứ giác nội tiếp.



Gọi Q là giao của (ACE) và (BCD) (Q khác C).

Ta có $\angle BDQ = \angle BCQ = \angle QAE$, suy ra tứ giác $AQDP$ nội tiếp. Tương tự thì $BQEP$ nội tiếp. Khi đó

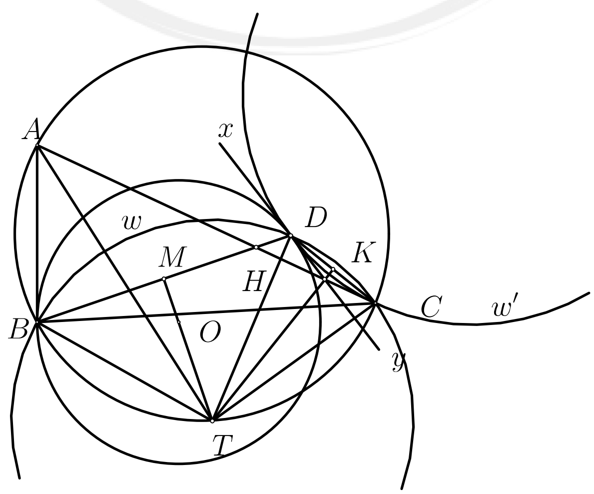
$$\angle PQC = \angle EQC - \angle EQP = \angle PAC - \angle PBE = \frac{1}{2}(\angle AOC - \angle BOC) = \angle POQ$$

suy ra tứ giác $OPCQ$ nội tiếp.

Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACE, BCD, OCP cùng đi qua hai điểm C và Q nên tâm của chúng thẳng hàng.

Ví dụ 1.4. (IMO SL 2002) Cho đường tròn w, B là một điểm w. Trên tiếp tuyến tại B của w lấy điểm A; lấy điểm C sao cho đoạn thẳng AC cắt w tại hai điểm phân biệt. Đường tròn w' tiếp xúc với AC tại C, tiếp xúc với w tại D sao cho D khác phía B đối với AC. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



Vẽ tiếp tuyến chung tại D của w và w'.
Ta có

$$\angle BDC = \angle BDy + \angle yDC = 180^\circ - \angle xDB + DCH + \angle 180^\circ - \angle ACD + \angle DCH =$$
$$\angle BAC + \angle AHB + \angle DCH = \angle BAC + 180^\circ - \angle BDC$$

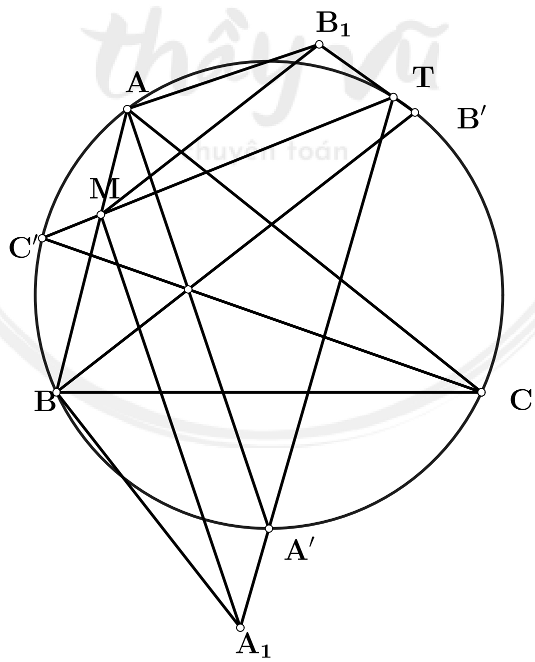
Suy ra $2\angle BDC = 180^\circ + \angle BAC$. (1)
Mặt khác $\angle BTC = 2(180^\circ - \angle BDC)$, suy ra $2\angle BDC = 360^\circ - \angle BTC$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $\angle BAC + \angle BTC = 180^\circ$, vậy tứ giác $ABTC$ nội tiếp.

Ví dụ 1.5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn w. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Các đường thẳng AI, BI, CI cắt w lần lượt tại A', B', C'. M là một điểm trên cạnh AB. Đường thẳng qua M và song song với AI cắt đường thẳng qua B vuông góc với BI tại điểm A_1; đường thẳng qua M song song với BI và cắt đường thẳng qua A vuông góc với AI tại điểm B_1. Chứng minh rằng $A'A_1, B'B_1$ và $C'M$ đồng quy.

Lời giải

Nhận xét:

- Dự đoán điểm đồng quy là điểm thuộc đường tròn w, tạm gọi là T.
- $AMTB_1$ nội tiếp;
- Vai trò A, B là như nhau.



Gọi T là giao điểm của $B'B_1$ và (O). Ta có $\angle MB_1T = \angle BB'T = \angle MAT$, suy ra tứ giác $AMTB_1$ nội tiếp, kéo theo $\angle AB_1M = \angle ATM$. (1)

Ta chứng minh được $B'C' \perp AA'$, suy ra $AB_1 \parallel B'C'$, từ đó ta có $\angle AB_1M = \angle C'B'lB$. (2)

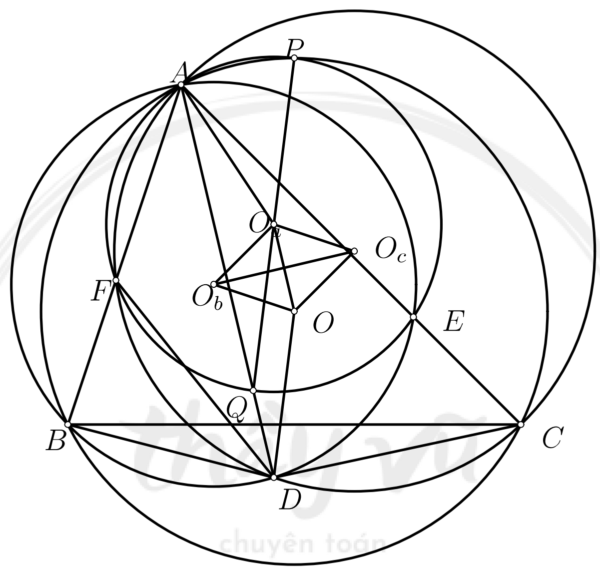
Từ (1) và (2), suy ra T, M và C' thẳng hàng. Chứng minh tương tự thì giao điểm của $A'A_1$ và (O) cũng thuộc $C'M$. Từ đó ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 1.6. Cho tam giác ABC, D là điểm thuộc phân giác trong của góc $\angle BAC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt AC tại E, đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt AB tại F. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng EF vuông góc với OD.

Lời giải

Nhận xét:

- Chứng minh được $BF = CE$; từ đó thì (AEF) sẽ qua điểm chính giữa cung BC chứa A;
-



Gọi O, O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm các đường tròn $(ABC), (AEF), (ABD), (ACD)$.

Gọi P là giao điểm thứ hai của (AEF) và (ABC); Q là giao điểm của AD và EF, do AD phân giác nên $QE = QF$.

Dễ thấy $\triangle DBF = \triangle DCE$, suy ra $BF = CE$.
Khi đó $\triangle PBF = \triangle PCE$, suy ra $PB = PC$, $PE = PF$, suy ra P là điểm chính giữa cung BC của (O) và P là điểm chính giữa cung EF của (AEF), do đó PQ là đường kính, suy ra $AP \perp AD$.

Ta có $OO_aO_bO_c$ là hình bình hành. Hơn nữa O_bO_c là trung trực của AD và OO_a là trung trực của AP. Mà $AP \perp AD$ nên $OO_a \perp O_bO_c$, suy ra $OO_aO_bO_c$ là hình thoi.

Ta có O_bO_c là trung trực của OO_a, AD nên AO_aOD là hình thang cân.
Ta có $\angle O_aQA = \angle O_aAD = \angle ODA$, suy ra $OD \parallel O_aQ$, mà $O_aQ \perp EF$ nên $OD \perp EF$.

Nhận xét:Trong trường hợp đặt biệt nếu I là tâm đường tròn nội tiếp thì ta có bài toán: *Cho tam giác ABC sao cho $AB > BC, AC > BC$, trên các cạnh AB, AC lấy điểm D, E sao cho $BD = BC = CE$. Khi đó EF vuông góc với IO, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp và I là tâm đường tròn nội tiếp.*

Ví dụ 1.7. (VMO 2014) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi I là trung điểm cung BC không chứa A. Trên AC lấy điểm K khác C sao cho $IK = IC$. Đường thẳng BK cắt (O) tại D $(D \neq B)$ và cắt đường thẳng AI tại E. Đường thẳng DI cắt đường thẳng AC tại F.

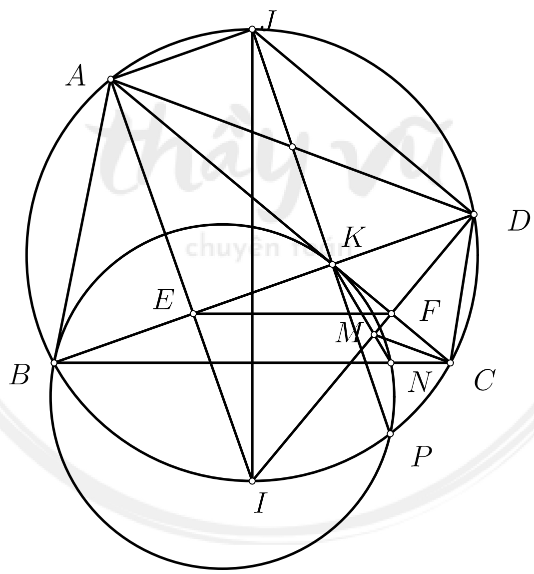
(a) Chứng minh rằng $EF = \dfrac{BC}{2}$.

(b) Trên DI lấy điểm M sao cho CM song song với AD. Đường thẳng KM cắt đường thẳng BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt (O) tại P $(P \neq B)$. Chứng minh rằng đường thẳng PK đi qua trung điểm đoạn thẳng AD.

Lời giải

Nhận xét: Để làm câu b, cần có 2 nhận xét sau:

- K là trực tâm tam giác AID; do đó nếu PK qua trung điểm AD cắt (O) tại 1 điểm J sẽ tạo ra hình bình hành $AJDK$;
- $CM \parallel AD$, nên M là trực tâm tam giác ICK;



(a) Chứng minh $\angle AKI = \angle ABI$ (cùng bù $\angle ACI$).
Tam giác ABI, AKI bằng nhau, suy ra E là trung điểm của BK.
Chứng minh F là trung điểm CK.

(b) Tam giác AID có DE, AF là đường cao cắt nhau tại K nên K là trực tâm, suy ra $IK \perp AD$, do đó $CM \perp IK$. Suy ra M là trực tâm tam giác IKC.
Khi đó AC là tiếp tuyến của (BKN). Hơn nữa

$$\angle CKP = \angle KBP = \angle DIP$$

suy ra $KFPI$ nội tiếp, do đó $\angle IPK = 90°$, suy ra IJ là đường kính của (O), mà K là trực tâm tam giác AID thì theo tính chất quen thuộc ta có $JAKD$ là hình bình hành.

Tiếp sau là một số tính chất liên quan đến đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp của tam giác mà ta cũng thường sử dụng để giải toán.

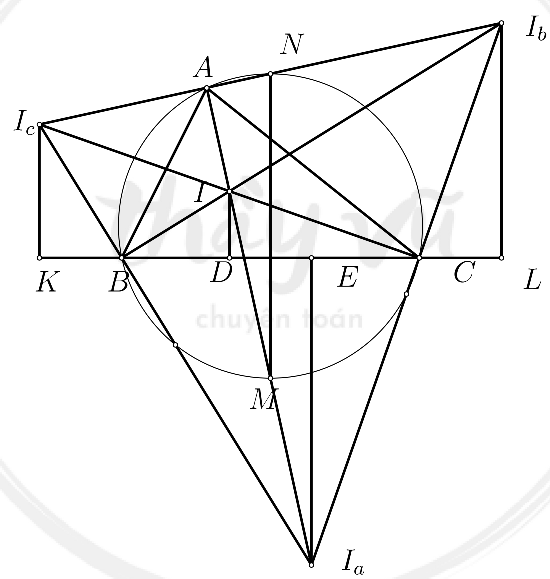
Ví dụ 1.8. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp là r, đường tròn ngoại tiếp là R và bán kính đường tròn bàng tiếp lả r_a, r_b, r_c. Khi đó

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

Lời giải

Nhận xét:

- Bài toán này có nhiều cách để giải, có thể đưa độ dài các bán kính về diện tích và độ dài cạnh, từ đó sử dụng công thức hê-rông. Tuy vậy đây là cách tính toán, có thể thấy trong các chương sau.
- Ý tưởng chủ yếu là: đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC chính là đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$, do đó khi ta vẽ các các kính r, r_a, r_b, r_c sẽ tạo ra các hình thang, việc liên hệ được rõ ràng hơn.



Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$, (ABC) cắt I_bI_c tại N và cắt AI_a tại M, khi đó N là trung điểm của I_aI_b và II_a. Ta có MN là đường kính của (ABC).

Gọi K, L là hình chiếu của I_c, I_b trên đường thẳng BC và E là hình chiếu của I_a trên BC.

Tứ giác I_bLKI_c là hình thang vuông có NP là đường trung bình nên

$$I_cK + I_bL = 2NP$$

hay

$$r_b + r_c = 2NP$$

Tương tự

$$r_a - r = 2MP$$

Do đó

$$r_b + r_c + r_a - r = 2NP + 2MP = 2MN = 4R \Rightarrow r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

Ví dụ 1.9. (IMO shortlist 2005) Cho tam giác ABC có $AB + AC = 3BC$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC tại D và E. Gọi K, L là điểm đối xứng của E, D qua I. Chứng minh $BKLC$ nội tiếp.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của BK và AC; N là giao điểm của CL và AB.
Theo tính chất 1.4 ta có

$$BN = AD = \frac{AB + AC - BC}{2} = BC$$

tương tự $CM = AE = BC$.

Mà $BD = CF$ nên $DN = CF = CE$, từ đó ta có

$$\triangle NDL = \triangle CEK \Rightarrow LN = CK$$

Chứng minh tương tự $\triangle BDL = \triangle MEK \Rightarrow BL = KE$, do đó

$$\triangle BNL = \triangle KCM(c.c.c) \Rightarrow \angle MKC = \angle BLN$$

suy ra $\angle BKC = \angle BLC$, tứ giác $BKLC$ nội tiếp.

Ví dụ 1.10. (VMO 2003) Cho tam giác không cân ABC. Kí hiệu (I) là đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và D, E, F là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Đường thẳng qua E vuông góc BI cắt (I) tại K khác E, đường thẳng qua F vuông góc CI cắt (I) tại L khác F. Gọi J là trung điểm KL.

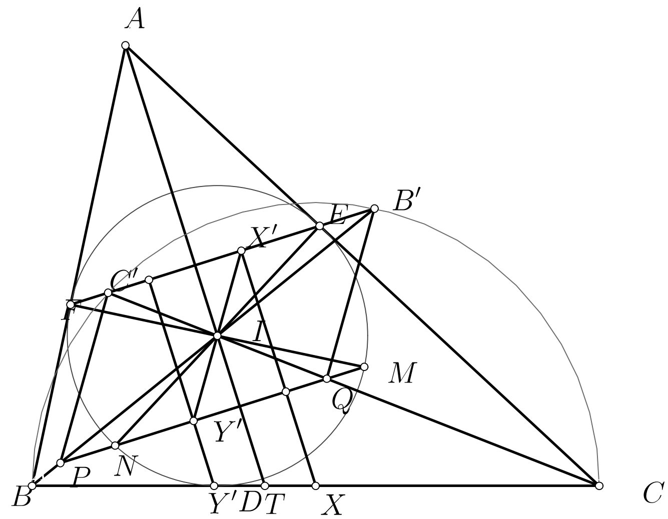
(a) Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

(b) Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC}$ không đổi. Gọi M, N tương ứng là các giao điểm IE, IF với (I) (M khác E, N khác F). MN cắt IB, IC tại P và Q. Chứng minh đường trung trực PQ luôn qua 1 điểm cố định.

Lời giải

Nhận xét:

- Mô hình này gợi nhớ đến tính chất 1.5 nên việc kéo dài BI, CI cắt EF để các điểm B', C' xuất hiện là việc làm khá tự nhiên.
- Hơn nữa lấy M, N là đối xứng của F, E qua tâm I.
- Điểm cố định này không có tính chất gì đặc biệt, đây là cái khó của bài toán này, do đó cần tạo ra các điểm cố định phụ, từ đó tìm mối liên hệ điểm cố định cần tìm với các điểm cố định phụ này.



(a) Do tính đối xứng nên $DL = EF = DK$. Mà $IK = IL$ nên DI là trung trực của KL, do đó ID qua J.

(b) Gọi T là chân phân giác trong của A nên $\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{AB}{AC}$ không đổi, suy ra T cố định.

Gọi X' là trung điểm $B'C'$ và Y' là trung điểm PQ.

Theo tính chất 1.5 thì ta có $BC'B'C$ nội tiếp đường tròn đường kính BC; do đó trung điểm X của BC thuộc trung trực của $B'C'$.

Xét phép đối xứng tâm I ta có P đối xứng với B qua I; Q đối xứng với C' qua I. Khi đó X' đối xứng với Y' qua I.

Trung trực của PQ cắt BC tại Y.

Dễ thấy YY', IT, XX' cùng vuông góc EF.

Khi đó hình thang $YXY'X'$ thì IT là đường trung bình nên T là trung điểm của XY, do đó Y cố định.

Vậy trung trực của PQ luôn đi qua điểm Y cố định.

Ví dụ 1.11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD, trên đoạn AD lấy điểm E, trên tia BE, CE lấy các điểm F, L sao cho $CL = CA, BF = BA$. BF, CL cắt nhau tại K. Chứng minh rằng tam giác KFL cân.

Lời giải

Gọi M, N là giao điểm của BE, CE với (ABC).
Khi đó CM, BN, AD đồng quy tại H.

Ta có

$$BN \cdot BH = BD \cdot BC = BA^2 = BF^2$$

suy ra $BF \perp AF$. Tương tự thì $CL \perp AL$.
Khi đó

$$AF^2 = AN \cdot AB = AM \cdot AC = AL^2 \Rightarrow AF = AL$$

Từ đó ta có $KF = KL$.

Ví dụ 1.12. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, AD cắt (O) tại K. KF cắt (O) tại L.

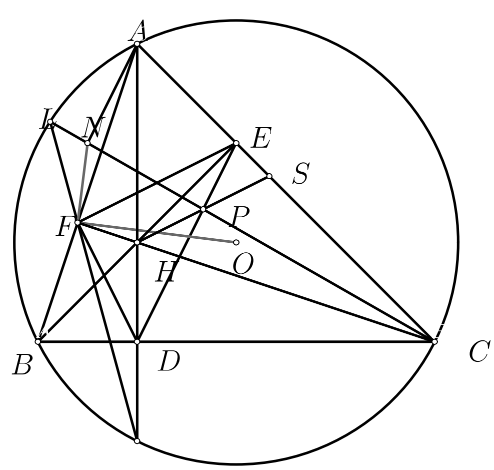
(a) Chứng minh CL đi qua trung điểm của EF.

(b) Đường thẳng qua A song song với DE cắt CL tại N. Chứng minh $\angle OFN = 90°$.

Lời giải

Nhận xét:

- Để chứng minh $\angle OFN = 90°$ thì cần chứng minh $\triangle COF \backsim \triangle ANF$; dẫn đến việc chứng minh các đẳng thức độ dài;
- Một kinh nghiệm trong việc tính toán độ dài thì các độ dài mới được tạo ra do đề bài thì cần quy về tính theo các độ dài có sẵn trong tam giác, cụ thể ở đây là các độ dài NA là mới được tạo ra, trong khi các độ dài OC, AF, CF đã có sẵn, do đó ta chỉ cần xử lí độ dài NA nữa là xong việc.
- Trong khi tính toán thì cẩn thận và phải có niềm tin là sau khi tính hợp lý ta sẽ có điều cần chứng minh.
- Đây là một ví dụ phù hợp để rèn luyện việc tính toán độ dài.



(a) Gọi P là giao điểm của CL và DE, HP cắt AC tại D.
Ta có $CH \cdot CF = CA \cdot CE = CP \cdot CL$ nên $LFHP$ nội tiếp.
Suy ra $\angle CHP = \angle CLF = \angle CAD = \angle CFE$, do đó $HP \parallel FE$.
Ta có EH là phân giác $\angle DEF$, suy ra $\angle PHE = \angle HEF = \angle HEP$, suy ra $PE = PH$.Hơn nữa tam giác HES vuông, nên P là trung điểm HS. Từ đó ta có M là trung điểm của EF.

(b) Ta chứng minh $\triangle FAN \backsim \triangle FOC$ đồng dạng. Vì có $\angle FCO = \angle FAN$ nên ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{NA}{OC} = \dfrac{AF}{CF}$. (1)
Ta tính AN, ta có $\dfrac{AN}{PE} = \dfrac{AC}{CE}$, suy ra $AN = \dfrac{AC \cdot PE}{CE}$.
Ta có $PE = \dfrac{1}{2}HS = \dfrac{CH \cdot EF}{2CF}$.
Suy ra $\dfrac{AN}{OC} = \dfrac{CA \cdot EF \cdot CH}{CE \cdot CF \cdot 2OC}$, ta cần chứng minh

$$\frac{CA \cdot EF \cdot CH}{CE \cdot CF \cdot 2OC} = \frac{AF}{CF} \Leftrightarrow \frac{AF}{EF} = \frac{CA}{CE} \cdot \frac{CH}{2R} \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CA}{CE} \cdot \frac{CH}{2R} \Leftrightarrow \frac{CE}{CH} = \frac{AB}{2R}$$

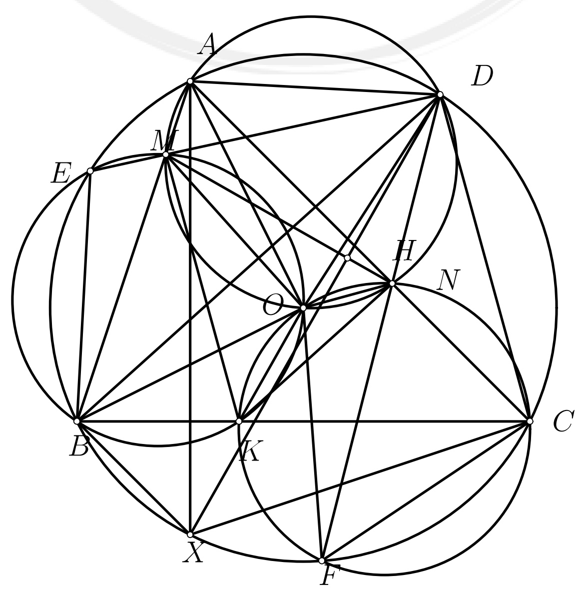
Đẳng thức cuối là đúng, từ đó ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 1.13. (Chọn đội tuyển PTNK năm 2017) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và điểm D di động trên cung BC chứa điểm A ($D \neq A$). Trên AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $MD = MB, NC = ND$.

(a) Chứng minh đường cao DH trong tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.

(b) DM, DN theo thứ tự cắt (O) tại E, F (E, F khác D). Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp các tam giác EMB, FNC cắt nhau tại điểm K thuộc đường thẳng BC và đường cao KI của tam giác KMN luôn qua một điểm cố định.

Lời giải



(a) Gọi Q là giao điểm của $(M; MB)$ và $(N; NC)$. Ta có

$$\angle MQB = \angle MBQ, \angle NQC = \angle NCQ, \angle MQN = \angle MDN = \angle MAN.$$

Suy ra $\angle MQB + \angle NQC + \angle MQN = 180^\circ$ nên B, Q, C thẳng hàng.

Giả sử DQ cắt (O) tại X. Khi đó

$$\frac{XB}{XC} = \frac{\sin \angle BDX}{\sin \angle CDX} = \frac{\sin \dfrac{\angle BMQ}{2}}{\sin \dfrac{CNQ}{2}} = \frac{\cos \angle ABC}{\cos \angle ACB}$$

không đổi, nên X cố định.

(b) Ta có $\angle MEB = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle BOM$, suy ra $OMEB$ nội tiếp. Tương tự $CNOF$ nội tiếp. Khi đó (OMB) và (OCN) cắt nhau tại K thuộc BC. Ta có

$$\angle OMK = \angle OBC, \angle\angle MKN = \angle MKO + \angle NKO = \angle OBA + \angle OCA = \angle BAC.$$

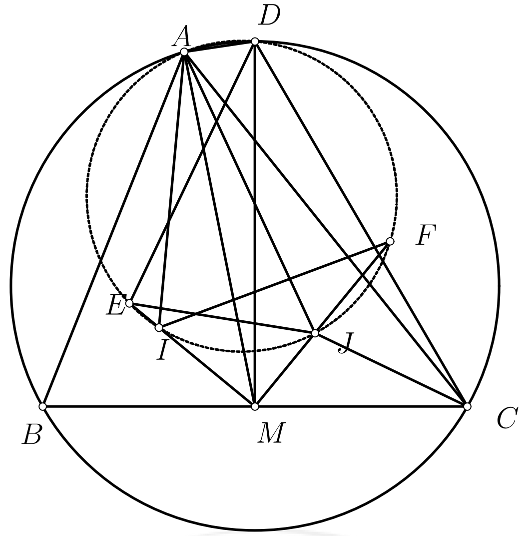
Suy ra $\angle OMK + \angle MKN = \angle BAC + \angle OBC = 90^\circ$, suy ra $MO \perp KN$. Chứng minh tương tự thì $ON \perp KM$. Do đó O là trực tâm tam giác KMN. Vậy $KO \perp MN$, từ đó KI qua O cố định.

Ví dụ 1.14. (Russia 2002) Cho đường tròn w và dây cung BC cố định. A là điểm thay đổi trên cung lớn BC, M là trung điểm BC. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABM, ACM. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Nhận xét:

- Điểm cố định dễ tìm được là điểm D chính giữa cung BC chứa A, tuy vậy chứng minh tứ giác nội tiếp thì khó.
- Để giải bài này ta phải vẽ thêm tạo ra những điểm mới và dùng kĩ thuật đồng dạng, kĩ thuật này các bạn sẽ được thấy rõ hơn ở bài vị tự quay cùng tâm;
- Chú ý rằng $\angle CMD = \angle JMI$;



Gọi D là điểm chính giữa cung BC chứa A.

Trên tia MI lấy điểm E sao cho $\dfrac{ME}{MD} = \dfrac{MJ}{MC}$, suy ra tam giác MJE và MCD đồng dạng, khi đó

$$\angle IEJ = \angle MDC = \frac{1}{2}\angle A = \angle IAJ$$

do đó tứ giác $EAJI$ nội tiếp (1)

Từ tam giác MJE và MCD đồng dạng dẫn đến MJC và MED đồng dạng,suy ra $\angle MED = \angle MJC$. Do đó

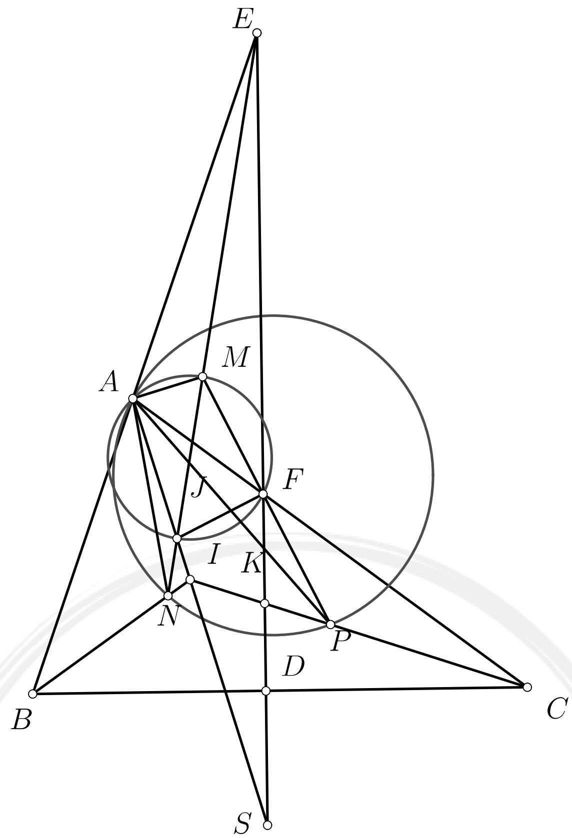
$$\angle JED = \angle MED - \angle MEJ = \angle MJC - \angle MCJ = 90^\circ + \angle JAC - \frac{1}{2}\angle A = \angle JAC + \angle CAD = \angle JAD$$

suy ra $ADJE$ nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) ta có D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ hay (AIJ) đi qua điểm D cố định.

Ví dụ 1.15. (Đề thi HSG Quốc Gia Việt Nam năm 2010) Cho tam giác ABC không cân có $\angle ABC$ và $\angle ACB$ nhọn. D là điểm di chuyển trên cạnh BC sao cho AD không vuông góc BC. Đường thẳng qua D vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB, AC tại E và F. Gọi M, N, P là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, BDE, CDF. Chứng minh rằng A, M, N, P cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi d đi qua tâm nội tiếp của tam giác ABC.

Lời giải



Gọi I là tâm nội tiếp của tam giác ABC. Gọi J là giao điểm của AI và EN, suy ra FJ là phân giác góc AFD.

Ta có $FKC = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle ACB = \angle JIN$.

Tứ giác $AMFJ$ nội tiếp, suy ra $\angle NJI = \angle AJM = \angle AFM = \angle KFP$ (K là giao điểm của d và IC).

Từ đó $\triangle NIJ \backsim \triangle PFK$, suy ra $\dfrac{IJ}{FK} = \dfrac{JN}{FP}$.

Ta có A, M, P, N đồng viên khi và chỉ khi

$$\angle ANJ = \angle APF \Leftrightarrow \triangle AJN \backsim \triangle AFP \Leftrightarrow \frac{AF}{AJ} = \frac{FP}{JN}$$

Mặt khác $\dfrac{AF}{AJ} = \dfrac{FS}{JS}$ (với S là giao điểm của AI và d).

Vậy A, M, P, N đồng viên khi và chỉ khi $\dfrac{IJ}{KF} = \dfrac{FS}{JS}$, điều này chỉ đúng khi I trùng S. Vì nếu I khác S thì $IK \parallel FJ$ (!)