CHƯƠNG 3

PHƯƠNG TÍCH - TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG

Phương tích trục đẳng phương là một nội dung quan trọng trong chương trình chuyên toán, là một phương pháp sử dụng phổ biến và hữu hiệu trong việc chứng minh các tính chất hình học phẳng. Nội dung lý thuyết của phần này không quá phức tạp khi hầu hết định nghĩa đều dễ hiểu và các định lí tính chất được chứng minh không quá khó, tuy nhiên việc ứng dụng là rất phong phú đa dạng, đó chính là cái thú vị của chuyên đề này.

§1. PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI ĐƯỜNG TRÒN

A LÍ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

Định lí 3.1

Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm M cố định, $OM = d$. Một đường thẳng thay đổi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Khi đó

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = d^2 - R^2 \tag{3.1}$$

Chứng minh.

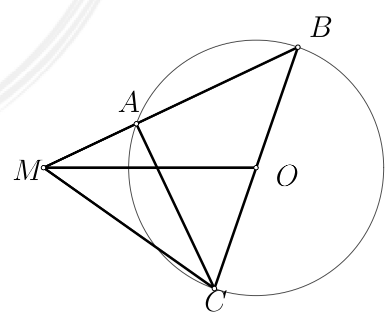
Vẽ đường kính BC. Khi đó ta có:

$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$

$= \overrightarrow{OM}^2 - \overrightarrow{OB}^2$

$= OM^2 - R^2$

$= d^2 - R^2.$



Định nghĩa 3.1

Giá trị không đổi $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = d^2 - R^2$ trong định lý 3.1 được gọi là **phương tích** của điểm M đối với đường tròn $(O; R)$ và kí hiệu là $\mathscr{P}_{M/(O)}$. Ta có

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = d^2 - R^2$$

Chú ý, trong trường hợp đường tròn suy biến thành 1 điểm, tức là đường tròn có bán kính bằng 0 thì phương tích của điểm M đến đường tròn điểm tâm O là OM^2.

Tính chất 3.1. Hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại M. Khi đó A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$$

Chứng minh.

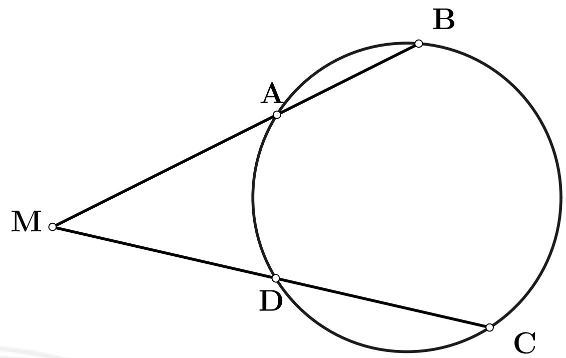
Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt CD tại D'. Khi đó ta có theo định lý 3.1 ta có

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD'}$$

suy ra

$$\overline{MC} \cdot \overline{MD} = \overline{MC} \cdot \overline{MD'} \Rightarrow D \equiv D'$$

từ đó 4 điểm A, B, C và D cùng thuộc một đường tròn.



Tính chất 3.2. Ta có tính chất sau:

(a) Khi M nằm trên (O) thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = 0$

(b) Khi M nằm ngoài đường tròn (O) và MT là tiếp tuyến của (O) thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2$

(c) Nếu A, B cố định và $\overline{AB} \cdot \overline{AM}$ không đổi thì M cố định.

Tính chất 3.3. Cho 4 điểm A, B, C, D là hàng điểm điều hòa. Gọi I là trung điểm đoạn AB và K là trung điểm đoạn CD. Khi đó:

- $\overline{IA}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$ (Hệ thức Newton).
- $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AK}$ (Hệ thức Maclaurin).

Định nghĩa 3.2

Nếu đường tròn suy biến thành điểm, tức là đường tròn có bán kính bằng 0 thì phương tích của điểm M đến đường tròn đó bằng d^2, với d là khoảng cách từ M đến điểm đó.

B CÁC VÍ DỤ

Ta thường sử dụng phương tích để thiết lập các đẳng thức hình học, chứng minh tứ giác nội tiếp, ta bắt đầu với công thức tính khoảng cách giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của cùng một tam giác.

Ví dụ 3.1. (**Công thức Euler**) Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp là $(O;R)$ và đường tròn nôi tiếp là $(I;r)$. Chứng minh rằng

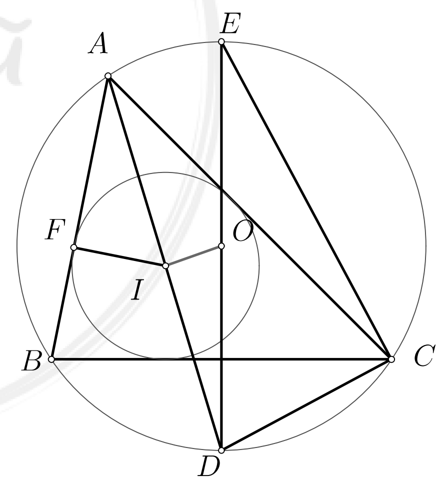
$$OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

Lời giải

Nhận xét:

- Xét phương tích của I đối với (O) ta có $\mathscr{P}_(I/(O)) = R^2 - IO^2$
- Ta cần tính phương tích của điểm I đối với đường tròn O theo R, r.

Từ nhận xét trên, ta có lời giải như sau:



Ta có

$$\mathscr{P}_{I/(O)} = IA \cdot ID = R^2 - OI^2$$

suy ra

$$OI^2 = R^2 - IA \cdot ID$$

Vẽ đường kính DE, ta có tam giác AFI và ECD đồng dạng, suy ra $AI \cdot CD = IF \cdot DE$.
Mà

$$CD = ID, IF = r, DE = 2R \Rightarrow IA \cdot ID = 2Rr$$

Vậy

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \Rightarrow IO = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Ví dụ 3.2. (**IMO 2009**) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, các điểm Q, P trên cạnh AB, AC. Gọi M, L, K là trung điểm của PQ, CQ, BP. Giả sử PQ là tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KLM. Chứng minh $OP = OQ$.

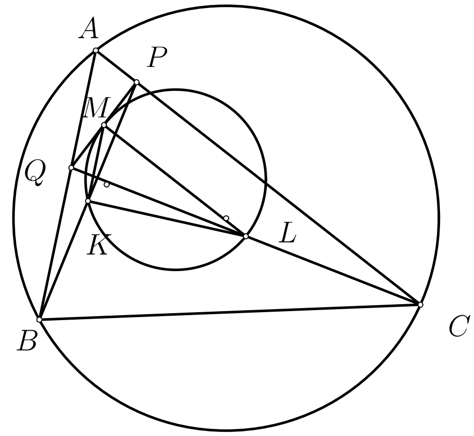
Lời giải

Nhận xét: Để chứng minh hai điểm cách đều tâm O ta cần chứng minh phương tích của hai điểm đối với (O) là bằng nhau.

Ta có $AB \parallel MK$ và $AC \parallel AC$ nên $\angle BAC = \angle KML$ và $\angle AQP = \angle QMK = \angle KLK$, suy ra $\triangle AQP \backsim \triangle MLK$, Từ đó

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} = \frac{QB}{CP} \Rightarrow AQ \cdot QA = AP \cdot CP$$

Do đó phương tích của P và Q đến (ABC) bằng nhau nên $OP = OQ$.



Ví dụ 3.3. (**Bổ đề Haruki**) Cho đường tròn w và hai dây cung AB, CD. P là một điểm thuộc đường tròn trên cung AB không chứa C, D. PC, PD cắt AB lần lượt tại E và F.Chứng minh rằng

$$\frac{AE \cdot BF}{EF}$$

không phụ thuộc vào vị trí điểm P.

Lời giải

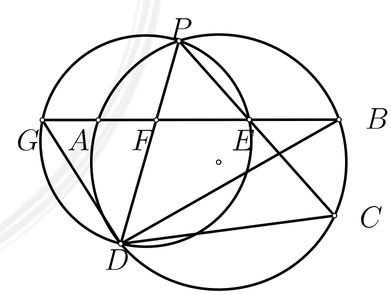
Đường tròn ngoại tiếp tam giác PED cắt AB tại điểm G.
Ta có $\angle DGE = \angle DPE$ không đổi, suy ra G là giao điểm của AB và cung chức góc $\angle DPC$ dựng trên đoạn BD nên G cố định.
Ta có

$$FA \cdot FB = FP \cdot FC = FE \cdot FG$$

hay

$$(AE + FE)FB = FE(FB + BG)$$

suy ra $\dfrac{AE \cdot FB}{EF} = BG$ không đổi.



Từ bổ đề Haruki ta có một cách chứng minh khác cho định lí con bướm nổi tiếng.

Ví dụ 3.4. (**Định lí con bướm**) Cho đường tròn w và dây cung PQ, M là trung điểm PQ. Hai dây cung AB, CD qua M sao cho A, C cùng phía đối với PQ. Gọi E, F là giao điểm của AD và BC với PQ. Chứng minh M là trung điểm của EF.

Lời giải

Áp dụng bổ đề Haruki ta có:

$$\frac{EP \cdot MQ}{ME} = \frac{FQ \cdot MP}{MF}$$

Mà $MP = MQ$ nên $\dfrac{EP}{EM} = \dfrac{FQ}{MF} \Rightarrow \dfrac{EP + EM}{EM} = \dfrac{FQ + FM}{MF} \Rightarrow ME = MF$.

Ví dụ 3.5. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao từ B cắt đường tròn đường kính AC tại D, E; đường cao từ C cắt đường tròn đường kính AB tại F, G. Chứng minh rằng 4 điểm D, E, F, G cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

Gọi P, Q, R là chân đường cao từ B, C và A; H là trực tâm tam giác.
Ta có $HE \cdot HD = HA \cdot HR = HF \cdot HG$. Suy ra D, E, F, G cùng nằm trên một đường tròn.□

Ví dụ 3.6. (**Chọn đội tuyển trường PTNK năm 2008**). Cho tam giác ABC có đỉnh A cố định và B, C thay đổi trên đường thẳng d cố định sao cho nếu gọi A' là hình chiếu của A lên d thì $\overline{A'B} \cdot \overline{A'C}$ âm và không đổi. Gọi M là hình chiếu của A' lên AB. Gọi N là hình chiếu của A' lên AC, K là giao điểm của các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'MN$ tại M và N. Chứng minh rằng K thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải

Nhận xét:

- Việc đầu tiên ta có thể dự đoán được quỹ tích K thông qua việc vẽ hình.
- Để giải bài toán, trước hết ta phải tìm được các yếu tố cố định phụ.
- Chú ý các yếu tố cố định có sẵn, và khai thác giả thiết $\overline{A'B} \cdot \overline{A'C}$ không đổi, liên tưởng đến phương tích của A' đối với (ABC) và AA' là đường thẳng cố định, từ đó tìm được các điểm cố định ban đầu trong bài này.

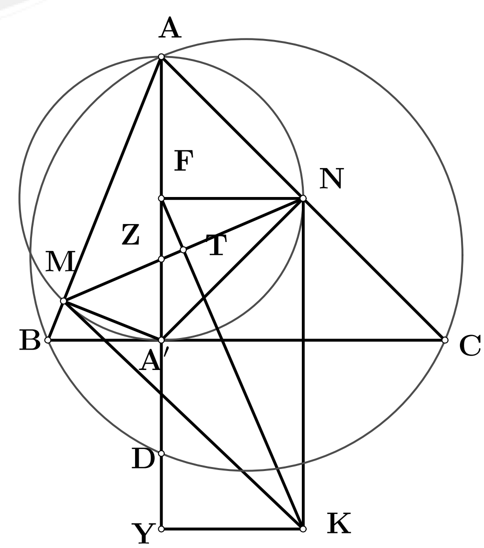
Gọi F là trung điểm AA', D là giao điểm của AA' và (ABC). Từ

$$A'A \cdot A'D = A'B \cdot A'C$$

ta có D cố định.
Gọi Z là giao điểm của MN và AA'.
Ta có $BDZM$ nội tiếp, suy ra

$$AZ \cdot AD = AM \cdot AB = AA'^2$$

suy ra Z cố định.



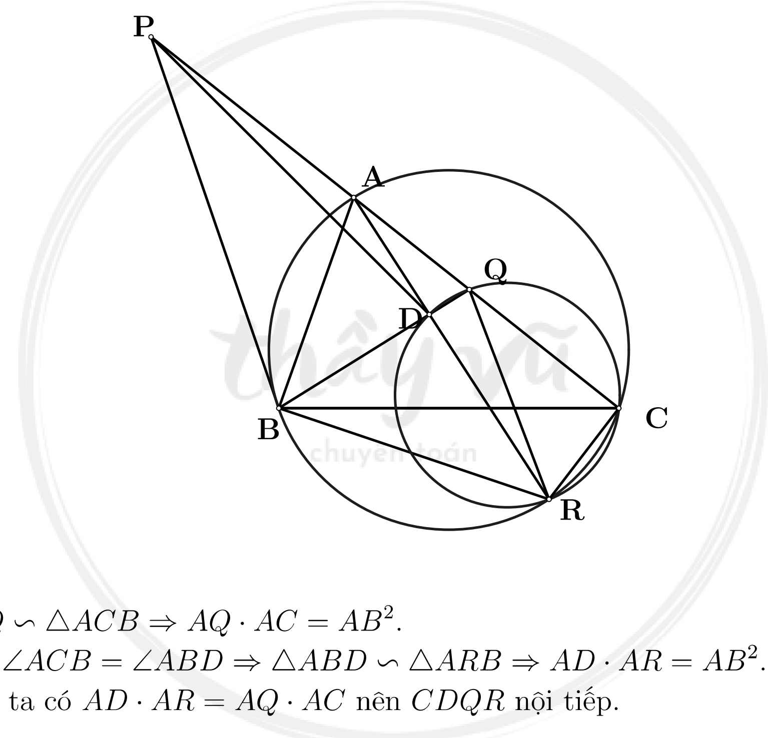
Gọi T là giao điểm của AK và MN, Y là hình chiếu của K trên AA', ta có tứ giác $ZTKY$ nội tiếp, do đó

$$FZ \cdot FY = FT \cdot FK = FN^2 = FA^2$$

đẳng thức trên kết hợp với F, Z cố định FA không đổi, nên Y cố định, mà YK song song với BC từ đó K nằm trên đường thẳng qua Y song song với BC cố định.

Ví dụ 3.7. (**IMOSL 2013**) Cho ABC là tam giác có $\angle B > \angle C$. Gọi P và Q là hai điểm khác nhau trên đường thẳng AC sao cho $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$ và A nằm giữa P và C. Giả sử rằng tồn tại một điểm trong D của đoạn BQ mà tại đó $PD = PB$. Cho tia AD cắt đường tròn ABC tại $R \neq A$. Chứng minh rằng $QB = QR$.

Lời giải



- Ta có $\triangle ABQ \backsim \triangle ACB \Rightarrow AQ \cdot AC = AB^2$.
  Và $\angle ARB = \angle ACB = \angle ABD \Rightarrow \triangle ABD \backsim \triangle ARB \Rightarrow AD \cdot AR = AB^2$.
  Từ (1) và (2) ta có $AD \cdot AR = AQ \cdot AC$ nên $CDQR$ nội tiếp.
- $\angle PBA = \angle ACB$ nên PB là tiếp tuyến của (ABC), suy ra $PA \cdot PC = PB^2 = PD^2$, từ đó $\triangle PDC \backsim \triangle PAD \Rightarrow \angle PDA = \angle PCD = \angle QRA$.
- Khi đó
  $$\angle QRB = \angle ARB + \angle ARQ = \angle ACB + \angle ADP$$
  và
  $$\angle QBR = \angle QDR - \angle ARB = \angle ADB - \angle ACB = \angle ADP + \angle PDB - \angle ACB = \angle ADP + \angle ACB$$
  Từ đó $\angle QBR = \angle QRB$,suy ra tam giác QBR cân tại Q.