§2. TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG - TÂM ĐẲNG PHƯƠNG

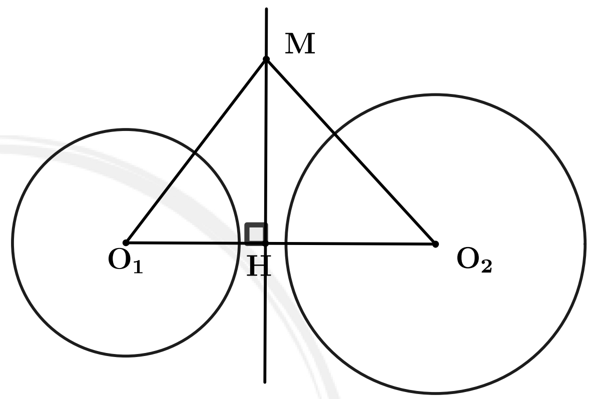
Định lí 3.2

Cho hai đường tròn không đồng tâm $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$. Tập hợp các điểm M mà phương tích của M đối với hai đường tròn bằng nhau là một đường thẳng.

Chứng minh. Gọi H là hình chiếu của M trên O_1O_2 và I là trung điểm O_1O_2. Khi đó:

$\mathscr{P}_{M/(O_1)} = \mathscr{P}_{M/(O_2)} \Leftrightarrow MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2$
$\Leftrightarrow MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$
$\Leftrightarrow (MH^2 + HO_1^2) - (MH^2 + HO_2^2) = R_1^2 - R_2^2$
$\Leftrightarrow HO_1^2 - HO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$
$\Leftrightarrow (\overline{HO_1} - \overline{HO_2})(\overline{HO_1} + \overline{HO_2}) = R_1^2 - R_2^2$

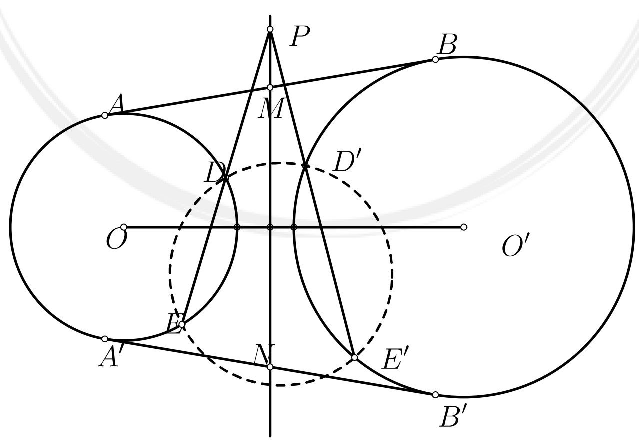
$\Leftrightarrow \overline{O_2O_1} \cdot 2\overline{HI} = R_1^2 - R_2^2$
$\Leftrightarrow \overline{IH} = \dfrac{R_1^2 - R_2^2}{2\overline{O_1O_2}}$ (1)



Từ (1) ta có H cố định, do đó quỹ tích các điểm có phương tích với hai đường tròn bằng nhau là đường thẳng qua H vuông góc với O_1O_2.

Định nghĩa 3.3

Đường thẳng trong định lý 3.2 được gọi là **trục đẳng phương** của hai đường tròn.



Tính chất 3.4. Cho hai đường tròn (O) và (I). Từ định lý 3.2 ta suy ra được các tính chất sau:

(a) Trục đẳng phương của hai đường tròn vuông góc với đường thẳng nối tâm.

(b) Nếu hai đường tròn cắt nhau tại A và B thì AB chính là trục đẳng phương của chúng.

(c) Nếu điểm M có cùng phương tích đối với (O) và (I) thì đường thẳng qua M vuông góc với OI là trục đẳng phương của hai đường tròn.

(d) Nếu hai điểm M, N có cùng phương tích đối với hai đường tròn thì đường thẳng MN chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

(e) Nếu 3 điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn thì 3 điểm đó thẳng hàng.

(f) Nếu (O) và (I) tiếp xúc nhau tại A thì đường thẳng qua A và vuông góc với OI chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

Định lí 3.3

Cho 3 đường tròn $(C_1), (C_2)$ và (C_3). Khi đó 3 trục đẳng phương của các cặp đường tròn trùng nhau hoặc song song hoặc cùng đi qua một điểm, điểm đó được gọi là tâm đẳng phương của ba đường tròn.

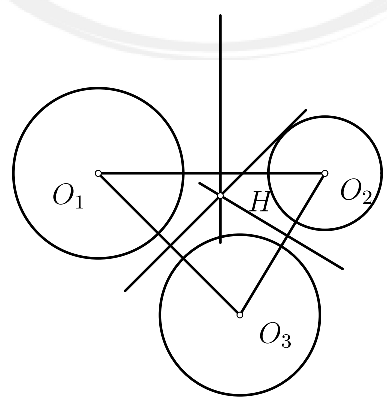
Chứng minh. Gọi d_{ij} là trục đẳng phương của hai đường tròn (C_i) và (C_j).
Ta xét hai trường hợp sau. Giả sử có một cặp đường thẳng song song, không mất tính tổng quát ta giả sử $d_{12} \parallel d_{23}$. Ta có $d_{12} \perp O_1O_2, d_{23} \perp O_2O_3$ suy ra O_1, O_2, O_3 thẳng hàng. Mà $d_{13} \perp O_1O_3$suy ra $d_{13} \parallel d_{23} \parallel d_{12}$.
Giả sử d_{12} và d_{23} có điểm M chung. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} \mathscr{P}_{M/(O_1)} = \mathscr{P}_{M/(O_2)} \\ \mathscr{P}_{M/(O_2)} = \mathscr{P}_{M/(O_3)} \end{cases} \Rightarrow \mathscr{P}_{M/(O_1)} = \mathscr{P}_{M/(O_3)} \Rightarrow M \in d_{13}$$

Từ đây suy ra nếu có hai đường thẳng trùng nhau thì đó cũng là trục đẳng phương của cặp đường tròn còn lại.
Nếu hai trục đẳng phương chỉ cắt nhau tại một điểm thì điểm đó cũng thuộc trục đẳng phương còn lại.

Định nghĩa 3.4

Điểm đồng quy trong định lý 3.3 trên được gọi là tâm đẳng phương của ba đường tròn.



Tính chất 3.5. Từ định lý trên, ta có:

(a) Nếu 3 đường tròn đôi một cắt nhau thì các dây cung chung cùng đi qua một điểm.

(b) Cho 3 đường tròn w_1, w_2, w_3 có tâm lần lượt là O_1, O_2, O_3. Gọi d_{ij} là trục đẳng phương của w_i, w_j. Khi đó nếu d_{12} và d_{13} cắt nhau tại P thì P là tâm đẳng phương của 3 đường tròn. Khi đó trục đẳng phương d_{23} là đường thẳng qua P và vuông góc với O_2O_3

Từ các tính chất trên để chứng minh các đường thẳng vuông góc thì ta có thể chứng minh đường thẳng này là trục đẳng phương của hai đường tròn, và đường thẳng còn lại thì song song hoặc trùng với đường thẳng qua tâm hai đường tròn đó, vấn đề là làm sao để xác định được trục đẳng phương và trục đẳng phương của hai đường tròn nào, đây là vấn đề kinh nghiệm làm bài và khả năng suy luận của các bạn. Tất nhiên ta phải xuất phát từ các ví dụ cơ bản và đơn giản nhất.

Ví dụ 3.8. (**Định lí bốn điểm**) Cho các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng AB vuông góc CD khi và chỉ khi

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$$

Lời giải

Xét các đường tròn $(C; CA)$ và $(D; DA)$ ta có

$$BC^2 - CA^2 = BD^2 - BD^2 \Leftrightarrow \mathscr{P}_{B/(C;CA)} = \mathscr{P}_{B/(D;DA)}$$

Do đó AB là trục đẳng phương của (C) và (D) nên $AB \perp CD$.

Nhận xét:

- Định lý bốn điểm được chứng minh ở cấp hai bằng định lí Pitago, ở đây thì ta dùng trục đẳng phương, tuy vậy chứng minh định lí về trục đẳng phương cũng từ Pitago nên bản chất các cách chứng minh là như nhau.
- Định lí 4 điểm cũng là một tiêu chuẩn hay để chứng minh hai đường thẳng vuông.

Định lí bốn điểm là một định lí khá nhẹ nhàng áp dụng trong việc chứng minh vuông góc, ta xem một ví dụ của định lí này nhé.

Ví dụ 3.9. Cho tam giác ABC, các đường phân giác trong góc B, C lần lượt là BE, CF. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Chứng minh rằng OI_a vuông góc với EF.

Lời giải

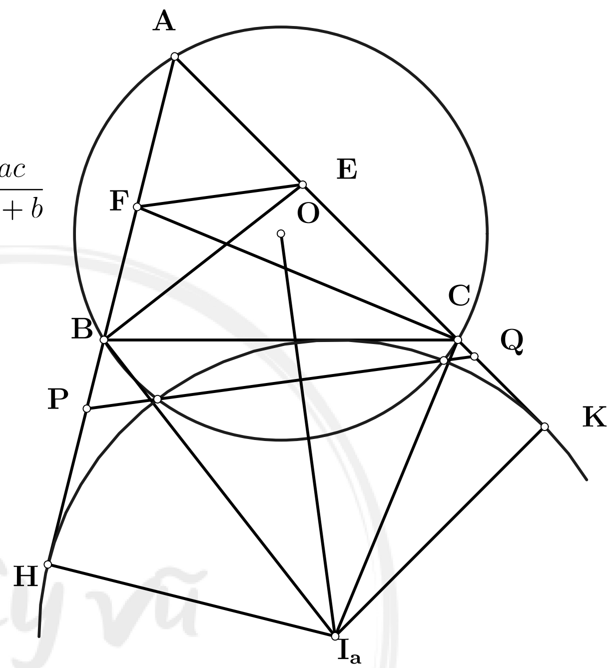
Nhận xét:

- Sử dụng 4 điểm thì ta cần chứng minh $OE^2 - OF^2 = I_aE^2 - I_aF^2$
- Kinh nghiệm tính toán là ta đưa các độ dài về các độ dài của tam giác gốc ABC; ở đây chính là độ dài cạnh của tam giác ABC;

- Để xử lí OE^2, OF^2 ta cần sử dụng phương tích của E, F đối với (O).
- Ở đây tôi trình bày 2 lời giải với mức độ tính toán khác nhau chút, tuy vậy lời giải chân phương ít suy nghĩ nhiều thì tính toán có vẻ phức tạp hơn, nhưng theo tôi đó là lời giải tự nhiên hơn.

Cách 1.

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c, p = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Ta tính được các độ dài:

$$AE = \frac{bc}{a+c}, CE = \frac{ab}{a+c}, AF = \frac{bc}{a+b}, BF = \frac{ac}{a+b}$$

Khi đó

$$OF^2 = R^2 + \overline{FA}\cdot\overline{FB} = R^2 - \frac{abc^2}{(a+b)^2}$$

và

$$OE^2 = R^2 - \frac{acb^2}{(a+c)^2}$$

Suy ra

$$OF^2 - OE^2 = \frac{acb^2}{(a+c)^2} - \frac{abc^2}{(a+b)^2} (1)$$

Ta có

$$FH = AH - AF = p - \frac{bc}{a+b}$$

và

$$EK = AK - AE = p - \frac{bc}{a+c}$$

Suy ra

$$I_aF^2 - I_aE^2 = FH^2 - EK^2 = (p - \frac{bc}{a+b})^2 - (p - \frac{bc}{a+c})^2 (2)$$

Theo định lý 4 điểm thì $I_aO \perp EF$ khi và chỉ khi $OF^2 - OE^2 = I_aF^2 - I_aE^2$, tương đương

$$\frac{acb^2}{(a+c)^2} - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = (p - \frac{bc}{a+b})^2 - (p - \frac{bc}{a+c})^2$$

Ta có thể kiểm tra đẳng thức trên đúng bằng biến đổi trực tiếp, từ đó ta có điều cần chứng minh.

Cách 2. Cách hai ta dựng trục đẳng phương của (O) và (I_a) và chứng minh trục đẳng phương này song song với EF.

Gọi P, Q là giao điểm của trục đẳng phương (O) và (I_a) giao với AB, AC, ta cần chứng minh $PQ \parallel EF$.

Đặt $AP = x, AQ = y$, ta có

$$PA \cdot PB = PH^2$$

hay

$$x(x-c)=(p-x)^2 \Rightarrow x=\frac{p^2}{a+b}$$

tương tự thì

$$y=\frac{p^2}{a+c}$$

Theo cách 1, ta có

$$AE=\frac{bc}{a+c}, AF=\frac{BC}{a+b}$$

suy ra

$$\frac{AE}{AP}=\frac{AF}{AQ} \Rightarrow EF \parallel PQ$$

mà $PQ \perp OI_a$ nên $EF \perp OI_a$.
Ngoài ra từ định lí 4 điểm ta có thể chứng minh định lí Carnot khác nổi tiếng sau:

Ví dụ 3.10. (**Định lí Carnot**) Cho tam giác ABC, các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng BC, AC và AB. Khi đó đường thẳng qua M, N, P lần lượt vuông góc BC, AC và AB đồng quy khi và chỉ khi

$$MB^2-MC^2+NC^2-NA^2+PA^2-PB^2=0$$

Lời giải

Gọi X là giao điểm của đường thẳng qua P vuông góc AB và đường thẳng qua N vuông góc AC. Theo định lí 4 điểm ta có

$$XA^2-XB^2=PA^2-PB^2 \text{ và } XC^2-XA^2=NC^2-NA^2$$

Suy ra $PA^2-PB^2+NC^2-NA^2=XC^2-XB^2$, do đó XM vuông góc với BC khi và chỉ khi $XC^2-XB^2=MC^2-MB^2$
Hay $PA^2-PB^2+NC^2+NA^2=MC^2-MB^2 \Leftrightarrow MB^2-MC^2+NC^2-NA^2+PA^2-PB^2=0$.

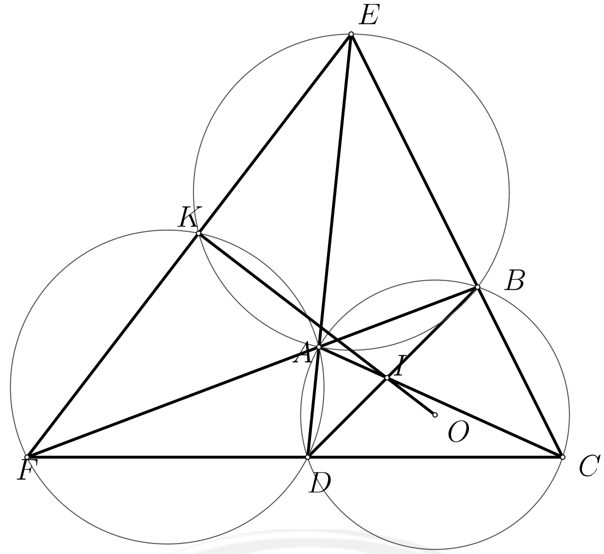
Ta quay lại với ứng dụng của trục đẳng phương trong việc chứng minh các định lí khác.

Ví dụ 3.11. (**Định lý Brocard**) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường thẳng AD và BC cắt tại E; AB và CD cắt nhau tại F.

(a) Chứng minh $\mathscr{P}_{E/(O)}+\mathscr{P}_{F/(O)}=EF^2$.

(b) Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh $OI \perp EF$.

Lời giải



(a) Gọi K là giao điểm của (AFD) và EF. Ta có $\angle EKA = \angle ADC = \angle ABE$, suy ra $EKAB$ nội tiếp.
Khi đó $\mathscr{P}_{E/(O)} + \mathscr{P}_{F/(O)} = EA.AD + FD \cdot FC = EK \cdot EF + FK \cdot KE = EF^2$.

(b) Ta có $\angle FKD + \angle EKB = \angle DCB + \angle BCD = 2\angle C = \angle AOB$, suy ra $KBOD$ nội tiếp.
Chứng minh tương tự ta cũng có $KAOC$ nội tiếp.
Khi đó tâm đẳng phương của $(O), (KBOD), (KAOC)$ đồng quy tại I. Hay O, I, K thẳng hàng.
Hơn nữa KO, KF lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của BKD nên vuông góc.
Vậy $OI \perp EF$ tại K.

Ta hay gặp định lí này với phiên bản khá quen thuộc ở bậc THCS sau:

Ví dụ 3.12. Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. P là giao điểm của EF và BC và M là trung điểm BC. Chứng minh $PH \perp AM$.

Lời giải

Xét đường tròn đường kính AH tâm I và đường tròn ngoại tiếp tam giác BCH tâm K, ta có $PE \cdot PF = PB \cdot PC$ nên P thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn này. Hơn nữa có H là điểm chung, do đó PH là trục đẳng phương của (AH) và (BPC), suy ra $PH \perp IK$. (1)

Gọi O là tâm của (ABC), dễ thấy K, O và đối xứng nhau qua BC, từ đó ta có $AIKM$ là hình bình hành, suy ra $AM \parallel IK$. (2)

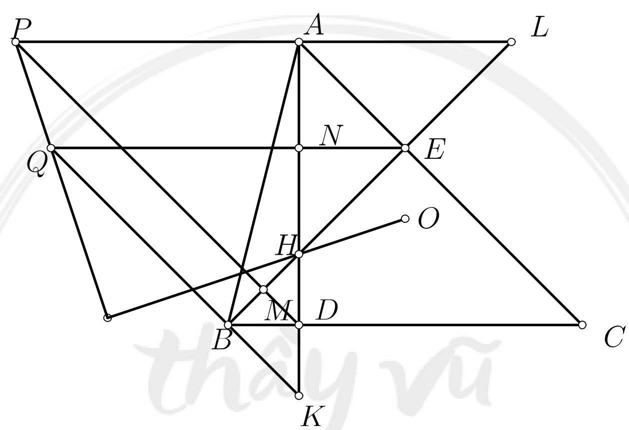
Từ (1) và (2) ta có $PH \perp AM$.

Ví dụ 3.13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi P là giao điểm của EF và BC; Q là giao điểm của DF và AC. Chứng minh OH vuông góc PQ.

Lời giải

Nhận xét:

- OH là đường thẳng Euler, và là đường thẳng qua tâm ngoại tiếp và tâm đường tròn Euler.
- Việc chứng minh bài toán chỉ cần chứng minh PQ là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn Euler hay song song với trục đẳng phương.



Dễ thấy tứ giác $BCFE$ là tứ giác nội tiếp, do đó

$$PE \cdot PF = PB \cdot PC \Rightarrow \mathscr{P}_{P/(DEF)} = \mathscr{P}_{P/(ABC)}$$

Tương tự thì

$$\mathscr{P}_{Q/(DEF)} = \mathscr{P}_{Q/(ABC)}$$

suy ra PQ là trục đẳng phương của (DEF) và (ABC), do đó $OH \perp PQ$.

! Từ ví dụ trên ta thấy, trong tam giác có những đường tròn cơ bản như đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn Euler, với mỗi cặp đường tròn cơ bản này ta xem xét cách dựng trục đẳng phương giữa chúng, từ đó ta có những bài toán khác nhau.

Ví dụ 3.14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE cắt nhau tại H và cắt (O) tại K và L. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AH và BH. Gọi P là giao điểm của DN và AL; Q là giao điểm của EM và KB. Chứng minh OH vuông góc PQ.

Lời giải

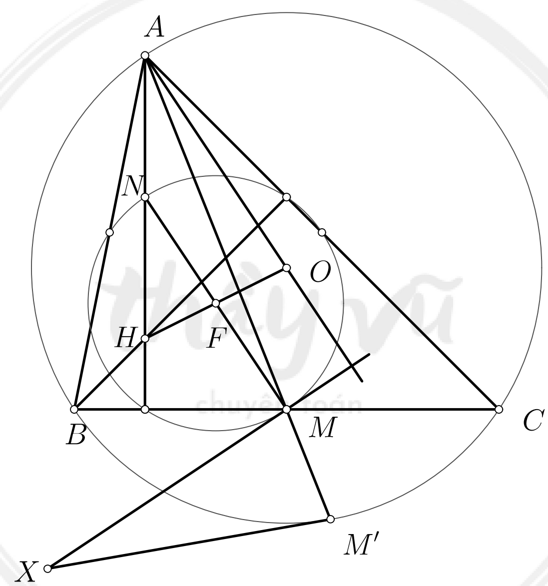
Chứng minh tương tự bài trên, chỉ cần chứng minh $BKEM$ và $ALDN$ nội tiếp, suy ra PQ là trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler.

Ví dụ 3.15. Cho tam giác ABC khác tam giác cân nội tiếp đường tròn (O), trung tuyến AM cắt (O) tại M'. Đường thẳng qua M vuông góc OA cắt tiếp tuyến tại M' của (O) tại X; các điểm Y, Z được xác định tương tự. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

Lời giải

Nhận xét:

- Chú ý vai trò X, Y, Z là như nhau;
- $XM \perp AO$ có thể suy ra được điều gì?
- M thuộc đường tròn Euler, từ đó có thể dự đoán X thuộc trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler.



Gọi H là trực tâm tam giác ABC, N là trung điểm AH. Khi đó MN là đường kính của đường tròn euler.
Dễ thấy $AOMN$ là hình bình hành. Mà $AO \perp MX$, suy ra $MN \perp MX$, do đó MX là tiếp tuyến của đường tròn euler.
Ta có

$$\angle XMM' = 90^\circ - \angle OAX = \angle OM'X - \angle OM'A = \angle XM'M$$

suy ra tam giác XMM' cân tại X.
Từ đó

$$\mathscr{P}_{X/(F)} = XM^2 = XM'^2 = \mathscr{P}_{(O))}$$

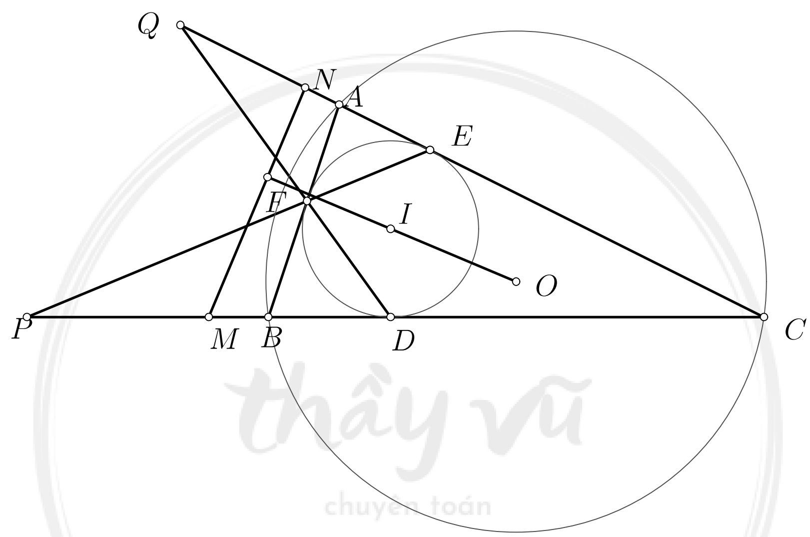
Do đó X thuộc trục đẳng phương của (F) và (O).
Chứng minh tương tự ta cũng có Y, Z thuộc trục đẳng phương của (F) và (O), do đó X, Y, Z thẳng hàng.
Trên đây là một số các dựng trục đẳng phương của đường tròn Euler và đường tròn ngoại tiếp. Ta xét cách dựng trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp sau.

Ví dụ 3.16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AC, AB tại D, E, F. Gọi P là giao điểm của EF và BC, Q là giao điểm của DF và AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DP và EQ, chứng minh $OI \perp MN$.

Lời giải

Nhận xét:

- Tính chất quen thuộc là $(DP, BC) = (QE, AC) = -1$;
- Ta cần chứng minh MN là trục đẳng phương, liên hệ các hệ thức newton, maclaurin.



Dễ thấy

$$\frac{PB}{PC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow PB \cdot DC = PC \cdot DB$$

, với M là trung điểm PD, từ đẳng thức trên ta có:

$$(PM + MB)(MC - MD) = (PM + MC)(MD - MB) \Leftrightarrow MB \cdot MC = MP \cdot MD = MD^2$$

suy ra $\mathscr{P}_{M/(I)} = \mathscr{P}_{M/(O)}$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\mathscr{P}_{N/(I)} = \mathscr{P}_{N/(O)}$.
Từ đó MN là trục đẳng phương của (I) và (O) nên $OI \perp MN$.
Sau đây cũng là một cách dựng khác, các bạn tự làm nhé.

Ví dụ 3.17. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB tại D, E, F. đường thẳng qua D vuông góc EF cắt AB tại K và AC tại L. Đường tròn (AKL) cắt (O) tại P. Gọi M là giao điểm của AP và EF. Các điểm N, Q được xác định tương tự. Chứng minh M, N, Q thẳng hàng.

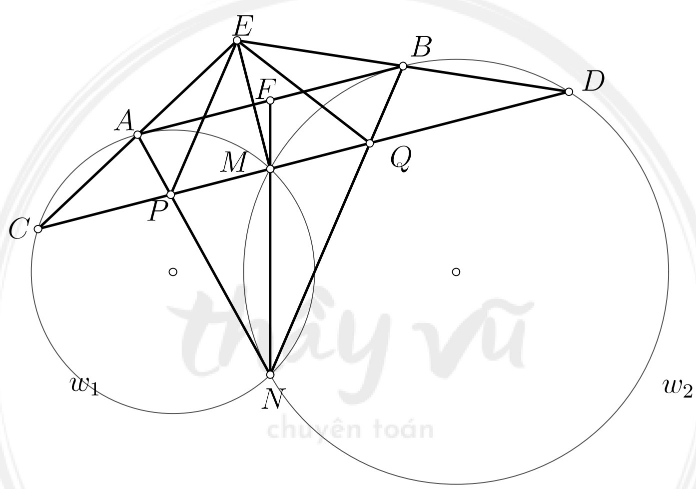
Ta biết rằng trục đẳng phương qua trung điểm của đoạn thẳng tiếp tuyến chung, do đó đường thẳng qua trung điểm của hai đoạn thẳng tiếp tuyến chung là trục đẳng phương của hai đường tròn. Ta có thể sử dụng các ý tưởng này để giải các ví dụ sau

Ví dụ 3.18. (Đề thi HSG Quốc tế IMO năm 2000) Cho hai đường tròn w_1 và w_2 cắt nhau tại M và N. Gọi l là tiếp tuyến chung của w_1, w_2 sao cho l gần M hơn N. Gọi tiếp điểm của l với w_1 là A, với w_2 là B. Đường thẳng qua M song song với l cắt w_1 tại C và cắt w_2 tại D. Đường thẳng CA và DB cắt nhau tại E; đường thẳng AN và CD cắt nhau tại P; BN và CD cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng $EP = EQ$.

Lời giải

Nhận xét:

- Trục đẳng phương đi qua trung điểm đoạn thẳng tiếp tuyến chung của hai đường tròn.
- MN là trục đẳng phương do đó MN qua trung điểm AB.



Gọi F là giao điểm của NM và AB. Ta có

$$\mathscr{P}_{F/(w_1)} = FA^2, \mathscr{P}_{F/(w_1)} = FB^2$$

mà MN là trục đẳng phương của w_1 và w_2, suy ra $FA = FB$.

Ta có $PQ \parallel AB$, dễ thấy MN qua trung điểm F của AB nên M là trung điểm của PQ.

Ta có

$$\angle FBA = \angle FDM = \angle ABM \text{ và } \angle FAB = \angle BAM$$

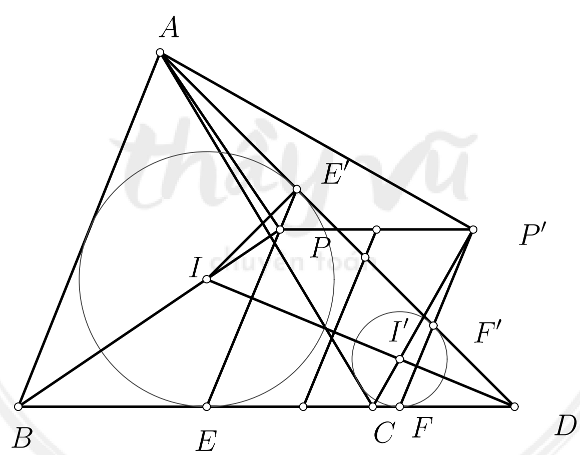
suy ra $\triangle AEM = \triangle BEM$, từ đó $BE = BM, AE = AM$ và AB là trung trực của EM, suy ra $EM \perp AB$, kéo theo $EM \perp PQ$.
Do đó tam giác EPQ cân tại E.

Ví dụ 3.19. (**IMO shortlist 1997**) Cho tam giác ABC. D là điểm thay đổi trên tia đối tia CB. Chứng minh rằng trục đẳng phương đường tròn nội tiếp của hai tam giác ADC và ADB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Nhận xét:

- Đây là bài toán hay và tương đối khó, việc dự đóa điểm cố định tương đối khó khăn, ta phải tìm các điểm cố định phụ trước.
- Ta phải liên hệ với một số tính chất về đường tròn nội tiếp quen thuộc, ở đây nếu ta cho BI cắt EE' thì $\angle BIA = 90°$ và P sẽ nằm trên đường trung bình tam giác ABC ứng với BC, do đó P là điểm cố định.
- Trục đẳng phương đi qua trung điểm của đoạn tiếp tuyến chung của hai đường tròn.
- 2 ý trên chính là chìa khóa để dẫn đến lời giải bài toán như dưới đây.



Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABD, tiếp xúc với BC, AD tại E và F; đường tròn (I') nội tiếp tam giác ACD tiếp xúc CD tại E', AD tại F'.

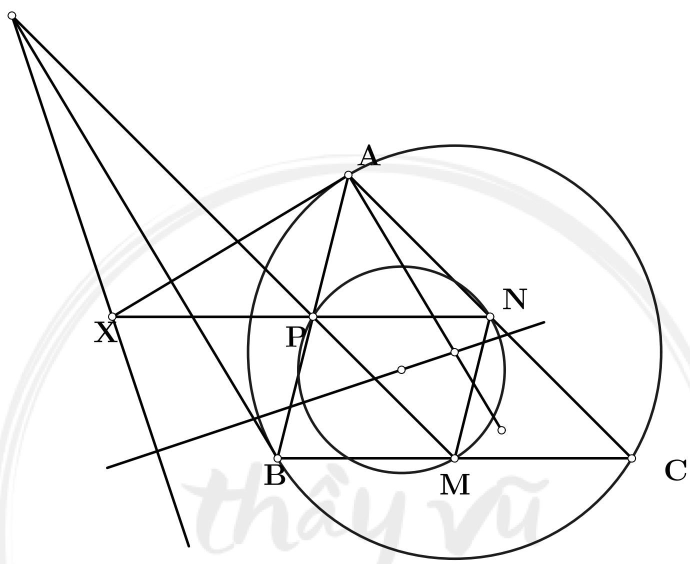
Gọi P là giao điểm của BI và EF, theo bổ đề về đường tròn nội tiếp chương 1, ta có $\angle APB = 90°$ và P thuộc đường trung bình của tam giác ABC, suy ra P cố định.

Tương tự gọi P' là giao điểm của $E'F'$ và CI', suy ra P' cố định.

Trục đẳng phương của (I) và (I') qua trung điểm của EE' và FF', mà P thuộc EF và P' thuộc $E'F'$, do đó đi qua trung điểm của PP' cố định.
Để dựng trục đẳng phương có nhiều cách, nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì trục đẳng phương chính là tiếp tuyến chung, ta sẽ sử dụng ý tưởng này để giải quyết các bài toán sau:

Ví dụ 3.20. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt NP tại X; các điểm Y, Z được xác định tương tự. Chứng minh rằng X, Y, Z cùng thuộc một đường thẳng vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Lời giải



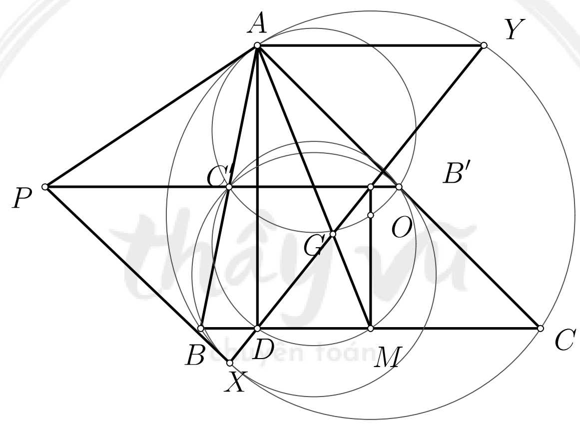
Xét ba đường tròn $(ANP), (O), (MNP)$ thì AX là trục đẳng phương của (ANP) và (O), NP là trục đẳng phương của (MNP) và (ANP), suy ra X là tâm đẳng phương của ba đường tròn này, do đó thuộc trục đẳng phương của (MNP) và (O).Tương tự Y, Z cũng thuộc trục đẳng phương của (MNP) và (O). Từ đó ta có X, Y, Z thẳng hàng và vuông góc với đường thẳng qua tâm hai đường tròn này, đó chính là đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Ví dụ 3.21. (**IMO Shortlist 2011**) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), gọi B', C' là trung điểm của cạnh AB và AC. Đường tròn (I) qua B', C' và tiếp xúc với (O) tại X (khác A). Gọi D là chân đường cao hạ từ A của tam giác ABC và G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng X, D, G thẳng hàng.

Lời giải

Nhận xét:

- $(AB'C')$ và (O) tiếp xúc nhau tại A, $(XB'C')$ và (O) tiếp xúc nhau tại X; và $(B'C')$ là trục đẳng phương của $(AB'C')$ và $(XB'C')$, từ đó ta thấy tiếp tuyến tại A, X của (O) đồng quy trên $B'C'$;
- Đây là chìa khóa ra điểm phụ P, từ đó làm tiếp, tất nhiên cũng phải biết biến đổi góc một chút.



Gọi P là giao điểm của tiếp tuyến tại A và tại X của (O).

Ta có P thuộc trục đẳng phương của $(B'C'X)$ và $B'C'A)$, suy ra P thuộc $B'C'$.

Do A, D đối xứng qua $B'C'$ nên ta có nên PD cũng là tiếp tuyến của $(B'C'D)$.

Vẽ $AY \parallel BC$, chứng minh được D, G, Y thẳng hàng. Cho XD cắt (O) tại Y' ta có

$$\angle ADY' + \angle AY'D = \frac{1}{2}\angle APX + \angle ACX = \frac{1}{2}\angle APX + \frac{1}{2}AOX = 90^\circ$$

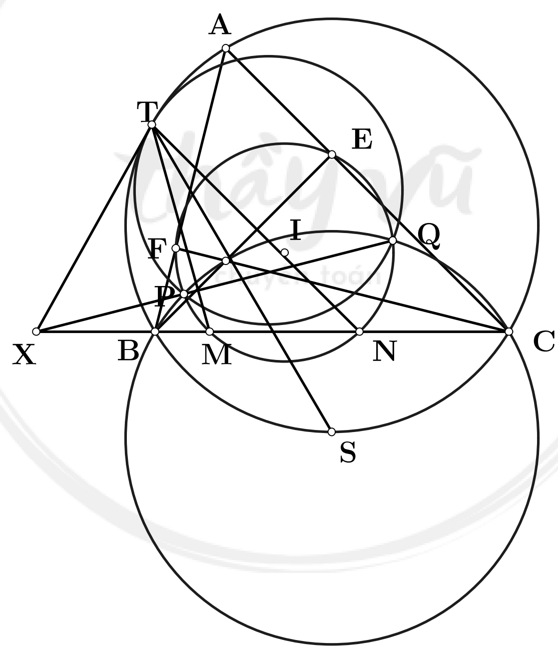
suy ra $AY' \parallel BC$ nên $Y \equiv Y'$. Vậy X, D, G thẳng hàng.

Ví dụ 3.22. (**Đề thi HSG Quốc gia năm 2015**) Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên (O), BC không là đường kính. Một điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Cho (I) là đường tròn thay đổi đi qua E, F và có tâm là I.Giả sử (I) cắt cạnh BC tại hai điểm M, N. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và P, Q là các giao điểm của (I) với đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Đường tròn (K) đi qua P, Q và tiếp xúc với (O) tại điểm T (T cùng phía A đối với PQ). Chứng minh rằng đường phân giác trong của góc $\angle MTN$ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Nhận xét:

- Khi làm bài này giả thiết hai đường tròn tiếp xúc tại T gợi ý cho ta vẽ tiếp tuyến chung, đây là ý tưởng vẽ yếu tố phụ khá tự nhiên và đơn giản.
- Kết hợp với trục đẳng phương và biến đổi góc ta sẽ làm được bài này.



Vẽ tia tiếp tuyến Tx của (O) và (TPQ), thì Tx là trục đẳng phương của (O) và (TPQ).
Xét 3 đường tròn (O), (TPQ) và (HBC) thì trục đẳng phương đồng quy tại một điểm nên PQ, BC, Tx đồng quy tại điểm, đặt tên là X.
Lại có trục đẳng phương của $(BEFC), (I), (HBC)$ đồng quy, nên X thuộc EF.
Do đó ta có

$$XT^2 = XB \cdot XC = XF \cdot XE = XM \cdot XN$$

nên XT tiếp xúc với (TMN).
Ta có

$$\angle XTB + \angle BTM = \angle XTM = \angle XNT = \angle ACB + \angle CTN$$

nên

$$\angle BTM = \angle CTN$$

Gọi S là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O) thì

$$\angle BTM + \angle MTS = \angle BTS = \angle CTS = \angle CTN = \angle CTN + \angle NTS$$

hay là

$$\angle MTS = \angle NTS$$

Vậy phân giác giác $\angle MTN$ luôn đi qua S cố định.

Ví dụ 3.23. (**Đề thi chọn đội dự tuyển PTNK năm 2016**) Cho tam giác ABC, D là một điểm thuộc cạnh BC. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BC, AB tại M, P, đường tròn tâm K nội tiếp tam giác ACD tiếp xúc với BC, AC tại N, Q.

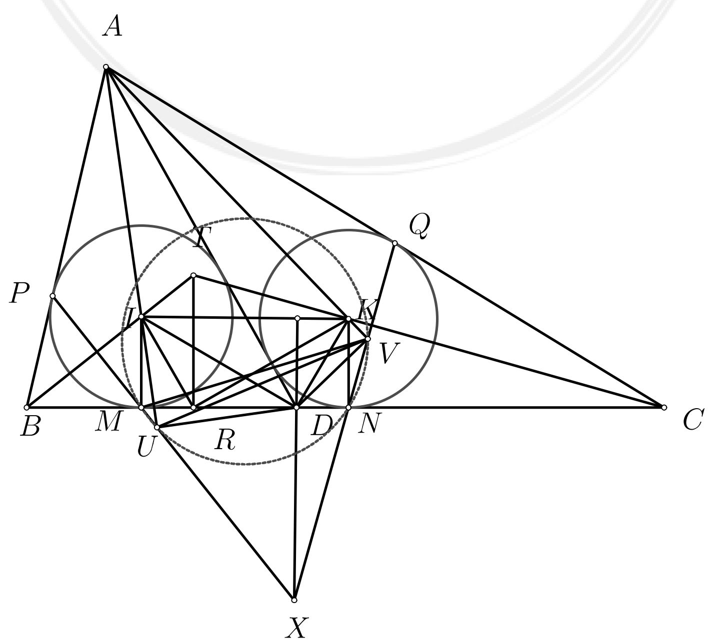
(a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD đi qua một điểm cố định.

(b) Gọi X là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh XD vuông góc với IK.

Lời giải

Nhận xét:

- Bài này là một bài khá thú vị, ý a thì quen thuộc nhưng ý b thì mới được mình phát hiện khi nghịch với geogebra.
- Lúc đầu có thể chứng minh bằng định lí 4 điểm, và có một vài bạn làm theo cách này trong phòng thi. Tuy vậy để cho lời giải đẹp hơn thì ta dùng trục đẳng phương, ở đây phải kết hợp với tính chất quen thuộc của đường tròn nội tiếp ở chương 1.



(a) Gọi T là tâm nội tiếp của ABC và R là tiếp điểm của (T) với BC.
Ta có
$$\triangle IMD \backsim DNK \Rightarrow IM \cdot KN = DM \cdot DN$$
Mà
$$MR = BR - BM = \frac{AB + BC - AC}{2} - \frac{AB + BD - AD}{2} = \frac{DC + DA - AC}{2} = DN$$
suy ra $RN = MD$. Do đó
$$RM \cdot RN = DM \cdot DN = IM \cdot KN$$
dẫn tới $\triangle IMR \backsim RNK$, suy ra $\angle IRK = 90°$. Vậy tứ giác $IRDK$ nội tiếp, nên (IDK) luôn đi qua điểm R cố định.

(b) Gọi U là giao điểm của AI và PM; V là giao điểm của AK và NQ. Khi đó ta chứng minh được $\angle DUA = \angle DVA = 90°$.
Ta có
$$\angle XMN = \angle PMX = 90° - \frac{\angle B}{2}$$
và
$$\angle XVU = \angle XVD + \angle DVU = \angle NKD + \angle DAU = \angle IDM + \angle DAU = 90° - \frac{\angle B}{2}$$
Suy ra $\angle XMN = \angle XVU$, kéo theo $MUNV$ nội tiếp.

Khi đó $XN \cdot XV = XM \cdot XU$, suy ra XD thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính DK và đường tròn đường kính DI, vậy $XD \perp IK$.

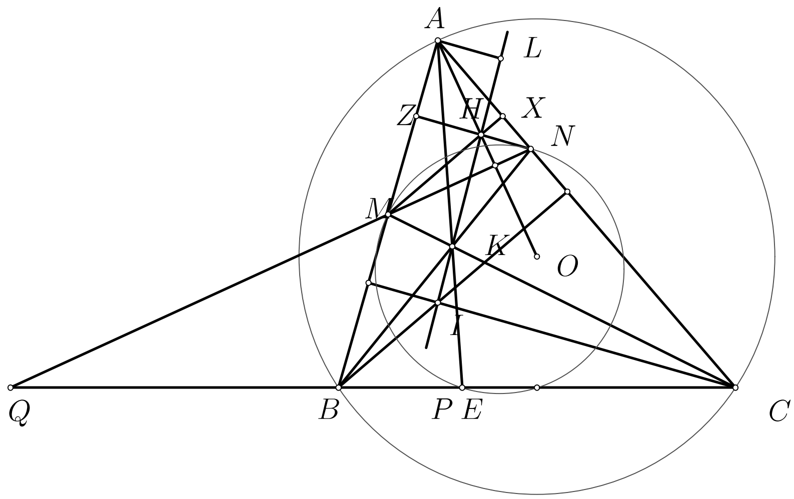
Ví dụ 3.24. (**Chọn đội tuyển Việt Nam 2006**) Cho tam giác ABC là tam giác nhọn và không phải tam giác cân nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Một đường thẳng d thay đổi sao cho vuông góc với OA và luôn cắt tia AB, AC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của d và AB, AC. Giả sử BN và CM cắt nhau tại K, AK cắt BC tại P.

(a) Gọi P là giao điểm của AK và BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Gọi H là trực tâm của tam giác AMN. Đặt $BC = a$ và l là khoảng cách từ A đến KH. Chứng minh KH đi qua trực tâm của tam giác ABC, từ đó suy ra $l \leq \sqrt{4R^2 - a^2}$

Lời giải

- Đây là một bài toán hay, tuy không quá khó nhưng kết hợp các kiến thức về phương tích, hàng điểm điều hòa, hệ thức maclaurin;
- Bài này mọi việc chứng minh diễn ra một cách khá tự nhiên vì nhì thấy khá rõ hướng đi.



(a) Gọi Q là giao điểm của MN và BC, E là trung điểm BC. Xét tứ giác $BMPC$ thì ta biết rằng Q, P, B, C là hàng điểm điều hòa, khi đó $QB \cdot QC = QP \cdot QE$.
Mặt khác $BCNM$ nội tiếp nên $QB \cdot QC = QM \cdot QN$.
Suy ra $QM \cdot QN = QE \cdot QP$, tứ giác $MNEP$ nội tiếp, vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP qua trung điểm E của BC cố định.

(b) Giả sử 3 đường cao AD, BF và CJ của tam giác ABC cắt nhau tại I; ba đường cao MX, AY, NZ của tam giác AMN cắt nhau tại H. Ta cần chứng minh K, I, H thẳng hàng.
Xét đường tròn tâm (O_1) đường kính BN và tâm (O_2) đường kính CM. Ta thấy:

$$KC \cdot KM = KB \cdot KN; IC \cdot IJ = IB \cdot IF; HM \cdot HX = HN \cdot HZ$$

Suy ra K, I, H cùng thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) nên thẳng hàng. Từ đó suy ra $AL \leq AI$.
Mà

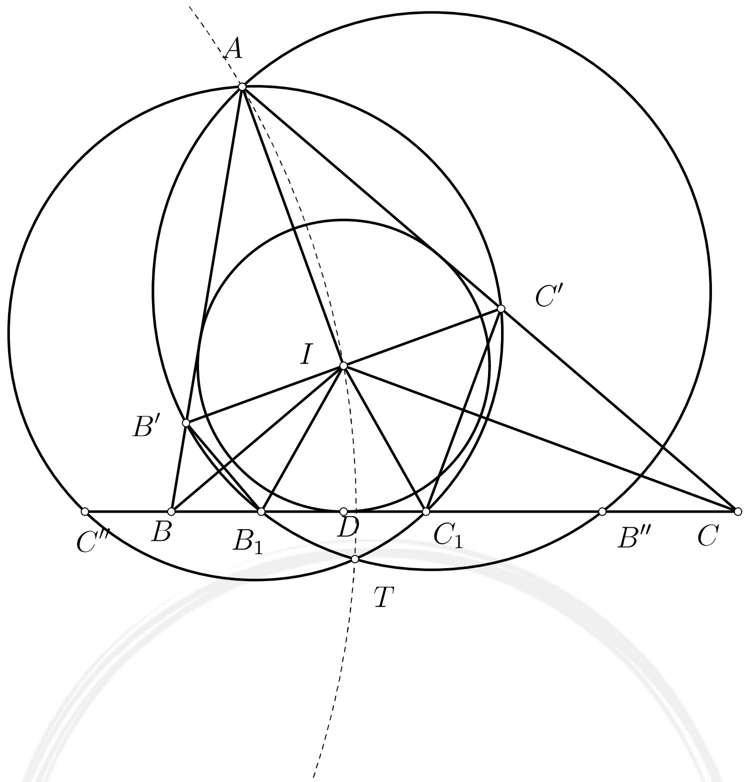
$$AI = 2OE = 2\sqrt{R^2 - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{4R^2 - a^2}$$

nên

$$AL = l \leq \sqrt{4R^2 - a^2}$$

Ví dụ 3.25. (**Iran TST 2014**) Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp là (I). Đường thẳng qua I vuông góc với AI cắt AB và AC lần lượt tại B' và C'. Gọi B'', C'' là các điểm thuộc tia BC và CB sao cho $BB'' = BA$ và $CC'' = CA$. Gọi giao điểm của đườnmg tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'B''$ và $AC'C''$ là T khác A. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIT thuộc BC.

Lời giải



Gọi B_1 và C_1 đối xứng với B' và C' qua BI và CI. D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với BC.

Ta có $BB' \cdot BA = BB_1 \cdot BB''$ suy ra B_1 thuộc $(AB'B'')$, tương tự cũng có C_1 thuộc $(AC'C'')$.

Từ

$$IB_1 = IB' = IC' = IC_1 \text{và} IB'' = IA = IC''$$

kết hợp với $ID \perp BC$ thì $\{B_1, C_1\}$ và $\{B'', C''\}$ đối xứng qua D. Khi đó

$$DB_1 \cdot DB'' = DC_1 \cdot DC''$$

suy ra D thuộc AT.

Mặt khác I' đối xứng với I qua BC, hơn nữa

$$\angle C''IC_1 = \angle AIC' = 90^\circ$$

nên

$$DA \cdot DT = DC'' \cdot DC_1 = DI^2 = DI \cdot DI'$$

do đó I' thuộc (AIT), hay tâm của $\triangle AIT$ thuộc BC.

A BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3.1. Cho đường tròn (O), A, B là hai điểm cố định, đối xứng qua tâm O nằm trong (O). M là điểm chuyển động trên (O), MA, MB giao với (O) tại P, Q. Chứng minh rằng $\dfrac{AM}{AP} + \dfrac{BM}{BQ}$ không đổi.

Bài 3.2. Cho tam giác ABC nhọn, gọi O là tâm ngoại tiếp và H là trực tâm tam giác. Chứng minh rằng

$$OH^2 = R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C)$$

Bài 3.3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại P và Q. Tiếp tuyến chung AB tiếp xúc với (O) tại A và (O') tại B sao cho AB gần P hơn Q. Đường thẳng qua A vuông góc với BP cắt OO' tại K. Chứng minh $\angle APK = 90°$.

Bài 3.4. Cho tam giác ABC. Các đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB cắt BE tại K. Đường thẳng qua E vuông góc BC cắt AB tại F. Gọi M là trung điểm AB. Chứng minh rằng trực tâm tam giác FMK thuộc đường thẳng AC.

Bài 3.5. tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. E là giao điểm của AC với BD. P là điểm bất kì nằm trong tứ giác $ABCD$, X, Y, Z, T lần lượt là tâm các đường tròn $(ABP), (BCP), (CDP), (DAP)$. Chứng minh rằng XZ, YT, OE đồng quy.

Bài 3.6. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho B, C, H, P, Q cùng thuộc đường tròn. DE, CF cắt nhau tại M, DF cắt BE tại N. Gọi G là giao điểm của PQ và BC, I là giao điểm của BQ và CP. Chứng minh $MN \parallel IG$.

Bài 3.7. (VMO 2012) Tron mặt phẳng, cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M, N tương ứng là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, AD và BC. Gọi P, Q, S, T tương ứng là giao điểm các đường phân giác trong của các cặp góc $\angle MAN$ và $\angle MBN, \angle MBN$ và $\angle MCN, \angle MCN$ và $\angle MDN, \angle MDN$. và $\angle MAN$. Giả sử bốn điểm P, Q, S, T đôi một phân biệt.

(a) Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, S, T cùng nằm trên một đường tròn. Gọi I là tâm của đường tròn đó.

(b) Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm E, O, I thẳng hàng.

Bài 3.8. (RMM 2013) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn w. Gọi P là giao điểm của AB, CD; Q là giao điểm AD, BC và R là giao điểm của AC, BD. Gọi M là trung điểm PQ, đoạn RM cắt w tại T. Chứng minh TPQ và w tiếp xúc nhau.

Bài 3.9. Cho tam giác ABC nhọn, $\angle B > \angle C$. Gọi M là trung điểm đoạn BC và E, F lần lượt là chân đường cao từ B và C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của ME, MF. Gọi T là giao điểm của KL sao cho $TA \parallel BC$. Chứng minh $TA = TM$.

Bài 3.10. Cho tam giác ABC nhọn, kẻ đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Cho K là một điểm tùy ý trên cạnh BC và khác B, C kẻ đường kính KM của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK và đường kính KN của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK. Chứng minh rằng ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Bài 3.11. (Đề đề nghị thi HSG Toán Quốc Tế 2014) Cho w là đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác nhọn ABC với $AB > BC$. Tia phân giác của góc $\angle ABC$ cắt w tại M khác B. Gọi C là đường tròn đường kính BM. Tia phân giác các góc AOB và BOC cắt C tại điểm P và Q. R là điểm trên đường thẳng PQ sao cho $BR = MR$. Chứng minh $BR \parallel AC$.

Bài 3.12. (VMO 2014) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), trong đó B, C cố định và A thay đổi trên (O). Trên các tia AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $MA = MC$ và $NA = NB$. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMN và ABC cắt nhau tại P ($P \neq A$). Đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại Q.

(a) Chứng minh rằng ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

(b) Gọi D là trung điểm của BC. Các đường tròn có tâm là M, N và cùng đi qua A cắt nhau tại K $(K \neq A)$. Đường thẳng qua A vuông góc với AK cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại $F(F \neq A)$. Chứng minh rằng đường thẳng AF đi qua một điểm cố định.

Bài 3.13. (Đề thi duyên Hải Bắc Trung Bộ năm 2014) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. AX, AY lần lượt là các đường kính của (O_1) và (O_2). Gọi O là trung điểm đoạn thẳng $XY.I$ là điểm thuộc phân giác góc $\angle XAY$ sao cho OI không vuông góc với XY và I không thuộc hai đường tròn.Đường thẳng qua A vuông góc với AI lần lượt cắt hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tại E và F khác A. IX cắt (O_1) tại K, IY cắt (O_2) tại L.Chứng minh EK, FL và OI đồng quy.

Bài 3.14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với góc A nhọn. Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC và E, F lần lượt là trung điểm của AC, AB. Giả sử DE, DF cắt lại với (O) tại điểm thứ hai tương ứng là Y, Z. Đường tròn (AEY) cắt (AFZ) tại điểm thứ hai M. Gọi N là trung điểm của BC và đường tròn (DNM) giao với BC tại điểm thứ hai X. Chứng minh rằng AX là tiếp tuyến của (O).

Bài 3.15. (Thi HSG Trung Quốc năm 2008) Lấy AB là dây cung của đường tròn tâm O, M là điểm chính giữa cung AB và C là điểm nằm ngoài đường tròn (O). Từ C vẽ hai tiếp tuyến đến (O) tại tiếp điểm S, T. Gọi E là giao điểm của MS vàAB, F là giao điểm của MT và AB. Từ E, F vẽ các đường thẳng vuông góc với AB, cắt OS và OT lần lượt tại X và Y. Một đường thẳng qua C cắt (O) tại P và Q, MP cắt AB tại R. Chứng minh rằng XY đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR.

Bài 3.16. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính AB cắt đường cao CD tại hai điểm M và N, M nằm ngoài tam giác; đường tròn đường kính AC cắt đường cao BE tại hai điểm P và Q, Q nằm ngoài tam giác.

(a) Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

(b) Chứng minh MP, NQ và BC đồng quy.

Bài 3.17. Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại tiếp điểm M. Gọi AB là một tiếp tuyến chung của $()C1)$ và (C_2) với A, B phân biệt lần lượt là các tiếp điểm. Trên tia tiếp tuyến chung Mx của hai đường tròn (Mx không cắt AB) lấy điểm C khác M. Gọi E và F lần lượt là giao điểm thứ hai của CA với (C_1) và CB với (C_2). Chứng minh rằng tiếp tuyến của (C_1) tại E, tiếp tuyến của (C_2) tại F và Mx đồng quy.

Bài 3.18. Cho tam giác ABC là tam giác nhọn, không cân nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi AD, BE, CF là ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Gọi L, M, N lần lượt là trung điểm của AD, BE, CF. Gọi $(O_1), (O_2), (O_3)$ lần lượt là các đường tròn đi qua L, tiếp xúc với OA tại A; đi qua M, tiếp xúc với OB tại B; đi qua N tiếp xúc với OC tại C. Chứng minh rằng $(O_1), (O_2), (O_3)$ có đúng hai điểm chung và đường thẳng nối hai điểm đó đi qua trọng tâm tam giác ABC.

Bài 3.19. Cho tam giác ABC và điểm D thay đổi trên cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt AC tại E, đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt AB tại F. Gọi H là trực tâm.

(a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn đường kính AH cắt nhau tại điểm thứ hai là P. Chứng minh AP đi qua trung điểm của BC.

(b) Chứng minh trực tâm tam giác PEF thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 3.20. Cho tam giác ABC với trực tâm H, tâm nội tiếp là I. Gọi K là trực tâm tam giác IBC. AI cắt HK tại L, gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ILK. Chứng minh trục đẳng phương của (I) và (IKP) đi qua tâm ngoại tiếp của tam giác ABC.

Bài 3.21. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là giao điểm của DA và BC, F là giao điểm của AC và BD. Tiếp tuyến tại A và B của (EAB) cắt nhau tại X; tiếp tuyến tại C và D của (ECD) cắt nhau tại Y. Chứng minh rằng:

(a) EF song song XY.

(b) Trục đẳng phương của (OXY) và (O) qua F.

Bài 3.22. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có AD và BC không song song. Giả sử đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính CD cắt nhau tại E và F bên trong tứ giác. Gọi w_E là đường tròn qua chân đường vuông góc từ E đến AB, BC và CD; w_F là đường tròn qua chân đường vuông góc từ F đến CD, DA và AB. Chứng minh rằng trung điểm của EF thuộc trục đẳng phương của w_E và w_F.

Bài 3.23. Cho tam giác ABC. Điểm D trên cạnh BC, gọi E, F là giao điểm của (ABD) và (ACD) với AC, AB. Đường tròn (I) qua B, C tiếp xúc ngoài với (AEF) tại T. Gọi M là trung điểm của BC, S là giao điểm của TM và EF. Chứng minh $DS \perp BC$.

Bài 3.24. (ISL 2017) Cho tam giác ABC có w là đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A. Gọi D, E, F là các tiếp điểm của w với các cạnh BC, AC, AB tương ứng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt cạnh BC tại P và Q. Gọi M là trung điểm AD. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với w.

Bài 3.25. (ISL 2015 - G5) Cho tam giác ABC có $CA \neq CB$. Gọi D, F và G là trung điểm cạnh AB, AC và BC. Đường tròn w qua C và tiếp xúc với AB tại D cắt các đoạn thẳng AF, BG tại H và I. Gọi H' là đối xứng của H qua F và I' là đối xứng của I qua G. Đường thẳng $H'I'$ cắt CD và FG tại Q và M. CM cắt w tại P. Chứng minh rằng $CP = CQ$.

Bài 3.26. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm $O.AC, BD$ cắt nhau tại $E.P$ là điểm bất kì bên trong tứ giác và X, Y, Z, W lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABP, BCP, CDP, DAP. Chứng minh rằng XZ, YW, OE đồng quy.

Bài 3.27. (Sharygin2011-P2) Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường cao $AA_1 \cdot OA_1$ cắt (BOC) tại A'. Tương tự xác định các điểm B_1, C_1, B', C'. Chứng minh rằng các đường tròn $(AA_1A'), (BB_1B'), (CC_1C')$ có điểm chung.

Bài 3.28. (Sharygin2016-P8) Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại $D, E, F.AX, BY, CZ$ là các phân giác của tam giác ABC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của các đường tròn $(AXD), (BYE), (CZF)$ nằm trên đường thẳng OI.

Bài 3.29. (Sharygin2017-P3) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi X_A là tích $\mathcal{P}_{A/(BCD)} \cdot S_{BCD}$. Tương tự xác định X_B, X_C, X_D. Chứng minh rằng $X_A + X_B + X_C + X_D = 0$.