SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
***
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
Năm học: 2023 - 2024
Môn thi: TOÁN CHUYÊN
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. ***(1,0 điểm)*** Cho a, b là các số thực, $b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 = \frac{4b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+a} + a\sqrt{a^2+b^2}$$

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Bài 2. ***(2,5 điểm)***

a) Giải phương trình: $x = \dfrac{5}{x-1} + 2\sqrt{x-2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9y+49}{x+y} + x + y = 23 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 7(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \end{cases}$.

Bài 3. ***(2,5 điểm)*** Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$, có đường cao AH. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi J là giao điểm của AI và DE. K là trung điểm AB.

a) Chứng minh tứ giác $BIJD$ nội tiếp

b) Gọi M là giao điểm của KI và AC, N là giao điểm của AH và ED. Chứng minh $AM = AN$.

c) Gọi Q là giao điểm của DI và EF, P là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

Bài 4. ***(2,0 điểm)*** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+4xy+2x+2y} + 2z = 5$.

a) Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}} + \dfrac{1}{2z+1} \geq \dfrac{2}{3}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x+1}{2x+1} + \dfrac{y+1}{2y+1} + \dfrac{2z+3}{4z+2}$.

Bài 5. ***(1,0 điểm)*** Cho đường tròn tâm O nội tiếp hình thoi $ABCD$. Gọi E, F, G, H là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EF, GH cùng tiếp xúc với (O).

a) Chứng minh $CG \cdot AH = AO^2$.

b) Chứng minh EH song song FG.

Bài 6. ***(1,0 điểm)*** Xét các số nguyên $a < b < c$ thỏa mãn $n = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ là số nguyên tố.

a) Chứng minh $a < 0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên a, b, c $(a < b < c)$ sao cho n là một ước của 2023.

-HẾT-

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
***
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
Năm học: 2023 - 2024
Môn thi: TOÁN CHUYÊN
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Thực hiện bởi đội ngũ giáo viên - trợ giảng trung tâm STAR EDUCATION: **NGUYỄN TĂNG VŨ - NGUYỄN VĨNH KHANG - LÊ ĐÌNH HẢI - NGUYỄN THÁI HƯNG - NGUYỄN THỦY TIÊN - NGUYỄN THỊ MINH HẰNG - HUỲNH TRUNG HIẾU**..

Bài 1. ***(1,0 điểm)*** Cho a, b là các số thực, $b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$a^2+b^2=\frac{4b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+a}+a\sqrt{a^2+b^2}$$

Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.

Lời giải tham khảo: Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
& a^2+b^2=\frac{4b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+a}+a\sqrt{a^2+b^2} \\
\Leftrightarrow\ & \left(a^2+b^2\right)\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)=4b^2+a\sqrt{a^2+b^2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right) \\
\Leftrightarrow\ & a\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}=4b^2+a^2\sqrt{a^2+b^2}+a\left(a^2+b^2\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left(a^2+b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}=4b^2+a^2\sqrt{a^2+b^2} \\
\Leftrightarrow\ & b^2\sqrt{a^2+b^2}=4b^2 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{a^2+b^2}=4\ \left(\text{do } b\neq 0 \text{ nên } b^2\neq 0\right) \\
\Leftrightarrow\ & a^2+b^2=16
\end{aligned}$$

□

Bài 2. ***(2,5 điểm)***

a) Giải phương trình: $x = \dfrac{5}{x-1} + 2\sqrt{x-2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9y+49}{x+y} + x + y = 23 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 7(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \end{cases}$.

Lời giải tham khảo:

a) Điều kiện: $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} x(x-1) = 5 + 2(x-1)\sqrt{x-2} &\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 2(x-1)\sqrt{x-2} + (x-2) = 4 \\ &\Leftrightarrow (x - 1 - \sqrt{x-2})^2 = 4 \end{aligned}$$

Do $x - 1 - \sqrt{x-2} = (x-2) - \sqrt{x-2} + 1 > 0$ với mọi $x \geq 2$ nên phương trình trên tương đương

$$x - 1 - \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x - 2 - \sqrt{x-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x-2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. .$$

Ta nhận được $x = \dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$. Thử lại đây cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

b)

$$\begin{cases} \dfrac{9y+49}{x+y} + x + y = 23 & (1) \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 7(\sqrt{x} + \sqrt{y}) & (2) \end{cases}.$$

Điều kiện: $x, y \geq 0, x + y \neq 0$. Từ đây suy ra được $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$ nên từ phương trình (2), ta thu được $x - \sqrt{xy} + y = 7$. Thay $x + y = \sqrt{xy} + 7$ vào phương trình (1), ta có

$$\begin{aligned} & \frac{9y+49}{\sqrt{xy}+7} + \sqrt{xy} + 7 = 23 \\ \Leftrightarrow \quad & 9y + 49 + (\sqrt{xy} + 7)^2 = 23(\sqrt{xy} + 7) \\ \Leftrightarrow \quad & 9y + 49 + xy + 14\sqrt{xy} + 49 = 23\sqrt{xy} + 161 \\ \Leftrightarrow \quad & 9y + xy - 9\sqrt{xy} - 63 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & xy = 9(7 + \sqrt{xy} - y) \\ \Leftrightarrow \quad & xy = 9x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 9 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Với $x = 0$, từ $x + y = \sqrt{xy} + 7$ ta giải được $y = 7$.
Với $y = 9$, từ $x + y = \sqrt{xy} + 7$ ta giải được $x = 1$ hoặc $x = 4$.
Thử lại, ta có tất cả nghiệm của hệ phương trình là $(1, 9), (4, 9), (0, 7)$.

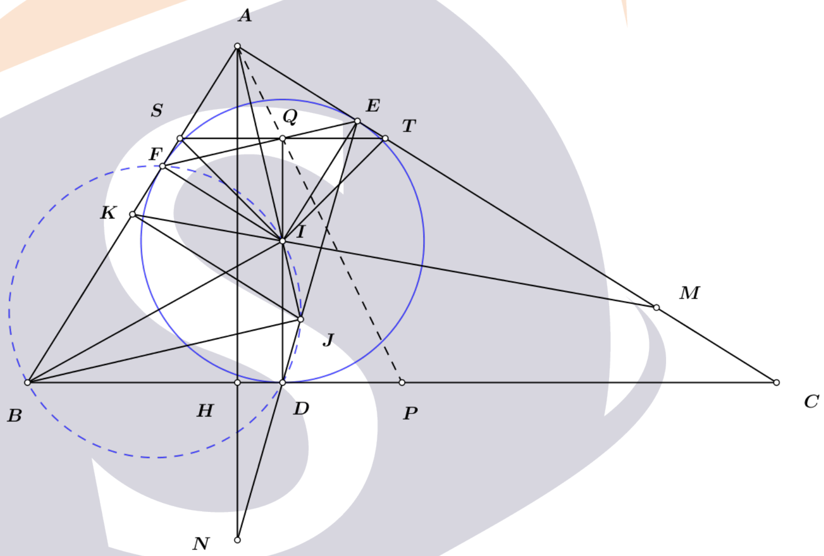
□

Bài 3. ***(2,5 điểm)*** Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$, có đường cao AH. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi J là giao điểm của AI và DE. K là trung điểm AB.

a) Chứng minh tứ giác $BIJD$ nội tiếp

b) Gọi M là giao điểm của KI và AC, N là giao điểm của AH và ED. Chứng minh $AM = AN$.

c) Gọi Q là giao điểm của DI và EF, P là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.



Lời giải tham khảo:

a) Ta có tam giác CED cân tại C suy ra $\angle CDE = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \angle C)$ và $\angle JIB = \angle IAB + \angle IBA = \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \angle C)$.
Do đó $\angle CDE = \angle JIB$, suy ra tứ giác $BIJD$ nội tiếp.

b) Ta có $ID \perp BC, AN \perp BC$ suy ra $ID \parallel AN$, suy ra $\dfrac{ID}{AN} = \dfrac{JI}{JA}$ (1).
Và $IF \parallel AM$, suy ra $\dfrac{IF}{AM} = \dfrac{KF}{KA}$ (2).
Mặt khác từ $BIJD$ nội tiếp, suy ra $\angle IJB = \angle IDB = 90^\circ$. Tam giác AJB có $\angle JAB = 45^\circ, \angle AJB = 90^\circ$ nên vuông cân mà K là trung điểm AB nên $JK \perp AB$. Khi đó $IF \parallel JK$, suy ra $\dfrac{JI}{JA} = \dfrac{KF}{KA}$ (3).
Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{IF}{AM} = \dfrac{ID}{AN}$ mà $ID = IF$ nên $AM = AN$.

c) Qua Q vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại S và T. Ta có $IQ \perp ST$, từ đó có các tứ giác $IQSF, IQET$ nội tiếp. Suy ra $\angle ISQ = \angle IFQ = \angle IEQ = \angle ITQ$, suy ra tam giác IST cân và Q là trung điểm của ST. Gọi P' là giao điểm của AQ và BC thì $\dfrac{SQ}{BP'} = \dfrac{AQ}{AP'} = \dfrac{QT}{CP'}$. Suy ra $CP' = BP'$ nên P' là trung điểm BC, suy ra $P' \equiv P$, kết luận A, P, Q thẳng hàng.

□

Bài 4. ***(2,0 điểm)*** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+4xy+2x+2y}+2z=5$.

a) Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\dfrac{1}{2z+1}\geq\dfrac{2}{3}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+1}{2x+1}+\dfrac{y+1}{2y+1}+\dfrac{2z+3}{4z+2}$.

Lời giải tham khảo:

a) Trước hết ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{1+4xy+2x+2y}+2z=5 &\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)+2y(2x+1)}+2z=5\\ &\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)(2y+1)}=5-2z.\end{aligned}$$

Khi đó $\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}=\dfrac{1}{5-2z}>0$. Ta có

$$\frac{1}{5-2z}+\frac{1}{2z+1}\geq\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{6}{(5-2z)(2z+1)}\geq\frac{2}{3}\Leftrightarrow 4(z-1)^2\geq 0 \text{ (Luôn đúng).}$$

Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\dfrac{1}{2z+1}=\dfrac{1}{5-2z}+\dfrac{1}{2z+1}\geq\dfrac{2}{3}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}2P&=\frac{2x+2}{2x+1}+\frac{2y+2}{2y+1}+\frac{2z+3}{2z+1}\\ &=\left(1+\frac{1}{x+1}\right)+\left(1+\frac{1}{2y+1}\right)+\left(1+\frac{2}{2z+1}\right)\\ &=3+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2y+1}+\frac{2}{2z+1}.\end{aligned}\tag{1}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy và kết quả câu a), ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2y+1}+\frac{2}{2z+1}&\geq\frac{2}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\frac{2}{2z+1}\\ &=2\left(\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\frac{1}{2z+1}\right)\geq\frac{4}{3}.\end{aligned}\tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta thu được

$$2P\geq 3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}\Leftrightarrow P\geq\frac{13}{6}.$$

Đẳng thức trên xảy ra khi $x=y=z=1$.

Như vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{13}{6}$ khi $x=y=z=1$.

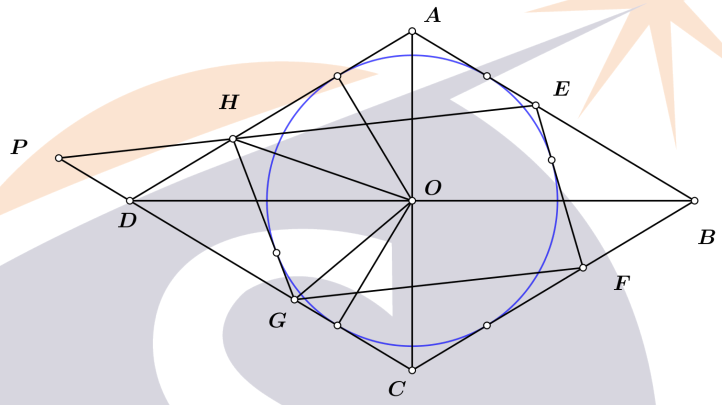
□

Bài 5. ***(1,0 điểm)*** Cho đường tròn tâm O nội tiếp hình thoi $ABCD$. Gọi E, F, G, H là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EF, GH cùng tiếp xúc với (O).

a) Chứng minh $CG \cdot AH = AO^2$.

b) Chứng minh EH song song FG.

Lời giải tham khảo:



a) Ta có HO là phân giác của $\angle AHG$ và GO là phân giác của CGH.
Suy ra

$$\angle HOG = 180^\circ - \angle OHG - \angle OGH = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle DHG + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DGH\right)$$
$$= 90^\circ - \angle ADB = \angle OAH.$$

Suy ra $\triangle OHG \backsim \triangle AHO$, suy ra $\angle AOH = \angle OGH = \angle OGC$.
Từ đó $\triangle OAH \backsim \triangle GAO$, suy ra $\dfrac{AH}{CO} = \dfrac{AO}{CG}$.
Do đó, $AH \cdot CG = AO \cdot OC = AO^2$.

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có $AE.CF = AO^2$, do đó $AE \cdot CF = CG \cdot AH$.
Từ đó ta có $\dfrac{AE}{AH} = \dfrac{CG}{CF}$ mà $\angle EAH = \angle FCG$ nên ta có $\triangle AEH \sim \triangle CGF$ (c-g-c).
Do đó $\angle AEH = \angle CGF$ (3).
Gọi HE cắt CD tại P, do $CD \parallel AB$ nên $\angle AEH = \angle CPH$ (4).
Từ (3) và (4) suy ra $\angle CPH = \angle CGF$, do đó $EH \parallel FG$.

□

Bài 6. ***(1,0 điểm)*** Xét các số nguyên $a < b < c$ thỏa mãn $n = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ là số nguyên tố.

a) Chứng minh $a < 0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên a, b, c $(a < b < c)$ sao cho n là một ước của 2023.

Lời giải tham khảo:

a) Ta có:

$$\begin{aligned} n = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) \end{aligned}$$

Vì $a < b < c$ nên $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \dfrac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \geq \dfrac{3}{2} > 1$

Giả sử $a \geq 0$. Khi đó: $a + b + c \geq 0 + 1 + 2 > 1$ suy ra n là hợp số, mâu thuẫn.

Do đó: $a < 0$.

b) Vì $2023 = 7 \cdot 17^2$ nên $n = 7$ hoặc $n = 17$.

TH1: $n = 7$.

$$n = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = 7$$

Vì $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac > 1$ nên $\begin{cases} a + b + c = 1 & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 7 & (2) \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 14$$

Vì $a < b < c$ nên $\begin{cases} c - a > c - b \\ c - a > b - a \end{cases}$. Như vậy

$$14 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 < 3(c-a)^2$$

nên $c - a > 2$. Mặt khác

$$(c-a)^2 < (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 14$$

nên $c - a < 4$. Kết hợp với $c - a > 2$, ta có $c - a = 3$.

$$(2) \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 = 5 = 1^2 + 2^2$$

Vì $b - a, c - b > 0$, và $|a - b|, |b - c| < \sqrt{5} < 3$, nên ta có 2 trường hợp sau

- $b - a = 1, c - b = 2$: kết hợp với (1), ta giải ra được
$$a = -1; b = 0; c = 2 \text{ (nhận)}.$$
- $b - a = 2, c - b = 1$: kết hợp với (1), ta giải ra được
$$a = -\frac{4}{3}; b = \frac{2}{3}; c = \frac{5}{3} \text{ (loại)}.$$

TH2: $n = 17$.

$$n = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = 17$$

Vì $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac > 1$ nên $\begin{cases} a+b+c = 1 \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac = 17 \quad (5) \end{cases}$

$$(5) \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 34$$

Lập luận như trường hợp $n = 7$, ta có $3(c-a)^2 > 34$, hay $c-a \geq 4$. Mặt khác $(c-a)^2 < 34$, nên $c-a \leq 5$. Xét các trường hợp sau

- Nếu $c-a = 4$, ta có
$$(5) \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2 = 18$$
Xét các giá trị $|b-c| = 1, 2, 3, 4$, ta nhận $b-a = c-b = 3$, mâu thuẫn với $c-a = 4$ (vì $6 = (b-a)+(c-b) = c-a$).
- Nếu $c-a = 5$, ta có
$$(5) \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2 = 9$$
Tương tự như trường hợp trước, ta cũng thử các giá trị $|b-c| = 1, 2, 3$, và chỉ nhận $|b-c| = 3, |a-b| = 0$ (vô lý do $a < b$).

Tổng hợp các trường hợp trên, ta chỉ có 1 nghiệm $(a, b, c) = (-1; 0; 2)$ thỏa mãn.

$\square$