Đề thi thử vào lớp 10 chuyên toán

1. Đề thi

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. *(**2,5 điểm**)*

(a) *Giải phương trình* $3x^3 + x + 3 + (8x-3)\sqrt{2x^2+1} = 0$.

(b) *Cho phương trình* $(\sqrt{x}+1)\left(x^2 - 3(m+1)x + 2m^2 + 5m + 2\right) = 0$ *(m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn nghiệm này là bình phương nghiệm kia.*

(c) *n là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 4, cho n số thực $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \cdots a_n = 0$ và $|a_1| + |a_2| + \cdots |a_n| = A$. Chứng minh rằng*

$$a_n - a_1 \geq \frac{2A}{n}$$

Bài 2. *(**1,5 điểm**) Xét các số a, b, c khác 0 và đôi một phân biệt sao cho các phương trình sau đây có một nghiệm chung:*

$$ax^3 + bx + c = 0(1), bx^3 + cx + a = 0(2), cx^3 + ax + b = 0(3).$$

(a) *Chứng minh* $a + b + c = 0$.

(b) *Chứng minh rằng một trong các phương trình này có ba nghiệm (không nhất thiết phân biệt).*

Bài 3. *(**1,5 điểm**)*

(a) *Tìm số tự nhiên có hai chữ số sao cho nó bằng tổng bình phương các chữ số của nó.*

(b) *Tìm tất cả các số nguyên tố p, sao cho p có thể biểu diễn được dưới dạng* $\sqrt{\dfrac{a^2-4}{b^2-1}}$, *trong đó a, b là các số nguyên dương.*

Bài 4. *(**3,5 điểm**) Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định, A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Phân giác trong góc A cắt DE và BC lần lượt tại K, L.*

(a) *Tính* $\angle BAC$ *và* $\angle OHC$.

(b) *Chứng minh* $\dfrac{AK}{AL}$ *không đổi. Tìm vị trí của A để KL lớn nhất, tính giá trị đó theo R.*

(c) *Chứng minh đường thẳng d qua L vuông góc OA tiếp xúc với một đường tròn cố định.*

(d) *Đường thẳng qua K vuông góc DE và đường thẳng qua L vuông góc BC cắt nhau tại P. Chứng minh AP luôn đi qua một điểm cố định.*

Bài 5. *(**1 điểm**) Có 10 viên bi vàng và 10 viên bi xanh được xếp thành một hàng. Chứng minh rằng tồn tại 10 viên bi liên tiếp sao cho số viên bi vàng và xanh bằng nhau.*

2. Đáp án

Bài 1. (a) *(**1 điểm**) Phương trình đã cho tương đương với*

$$3x\left(x^2+3\right)+(8x-3)\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(x^2+3\right)+\frac{2x^2(8x-3)}{\sqrt{2x^2+1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x\left[\frac{\left(3x^2+9\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right)+2x(8x-3)}{\sqrt{2x^2+1}+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x\left[\frac{\left(3x^2+9\right)\sqrt{2x^2+1}+18x^2+(x-3)^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}\right]=0$$

Dễ thấy $\dfrac{\left(3x^2+9\right)\sqrt{2x^2+1}+18x^2+(x-3)^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}>0$, *vậy* $x=0$ *là nghiệm duy nhất của phương trình.*

(b) *(**1 điểm**) Phương trình đã cho tương đương*

$$x^2-3(m+1)x+2m^2+5m+2=0 \Leftrightarrow x=m+2 \vee x=2m+1.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $x^2-3(m+1)x+2m^2+5m+2=0$ *có hai nghiệm không âm phân biệt, tức là*

$$\begin{cases} m+2\geq 0 \\ 2m+1\geq 0 \\ m+2\neq 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq -\frac{1}{2}.$$

Do nghiệm này là bình phương nghiệm kia nên ta có 2 trường hợp.
Trường hợp 1. $(m+2)^2=2m+1 \Leftrightarrow m^2+2m+3=0$ *(vô nghiệm).*
Trường hợp 2. $(2m+1)^2=m+2 \Leftrightarrow 4m^2+3m-1=0 \Leftrightarrow m=-1$ *(loại)* $\vee m=\frac{1}{4}$ *(nhận).*

(c) *(**0,5 điểm**) Giả sử* $0\leq k\leq n$ *thỏa* $a_1\leq a_2\leq\cdots a_k\leq 0\leq a_{k+1}\leq\cdots a_n$. *Khi đó* $a_1+\cdots+a_n=0, -a_1-a_2\cdots-a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n=A$, *Suy ra* $a_1+\cdots a_k=\dfrac{-A}{2}$ *và* $a_{k+1}+\cdots a_n=\dfrac{A}{2}$. *Suy ra* $a_1\leq\dfrac{-A}{2k}$ *và* $a_n\geq\dfrac{A}{2(n-k)}$.
Suy ra $a_n-a_1\geq\dfrac{A}{2}\left(\dfrac{1}{n-k}+\dfrac{1}{k}\right)\geq\dfrac{2A}{n}$.

Bài 2. (a) *(**0.75 điểm**)Gọi* x_0 *là nghiệm thực chung của ba đa thức. Khi đó ta có*

$$\begin{cases} ax_0^3+bx_0+c=0 \\ bx_0^3+cx_0+a=0 \\ cx_0^3+ax_0+b=0 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ba đẳng thức trên lại ta thu được

$$(a+b+c)\left(x_0^3+x_0+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ x_0^3+x_0+1=0 \end{array}\right.$$

Giả sử x_0 thỏa mãn $x_0^3+x_0+1=0$, khi đó

$$ax_0^3+ax_0+a=0=ax_0^3+bx_0+c \Rightarrow ax_0+a=bx_0+c \Rightarrow x_0=\frac{c-a}{a-b}$$

Chứng minh tương tự được

$$x_0=\frac{c-a}{a-b}=\frac{a-b}{b-c}=\frac{b-c}{c-a} \Rightarrow x_0^3=1 \Rightarrow x_0=1 \text{ (vô lý)}$$

Do đó $a+b+c=0$.

(b) ***(0.75 điểm)****Do $a+b+c=0$ nên ta có 1 là nghiệm chung của ba đa thức*

$$\left\{\begin{array}{l} ax^3+bx+c=(x-1)\left(ax^2+ax-c\right) \\ bx^3+cx+a=(x-1)\left(bx^2+bx-a\right) \\ cx^3+ax+b=(x-1)\left(cx^2+cx-b\right) \end{array}\right. .$$

Vì a,b,c là ba số thực phân biệt suy ra tồn tại ít nhất hai số cùng dấu, hay trong ba số $\Delta_1=a^2+4ac, \Delta_2=b^2+4ab, \Delta_3=c^2+4cb$ có ít nhất một số dương. Kéo theo, tồn tại một đa thức có ba nghiệm thực.

Bài 3. (a) ***(0.5 điểm)*** *Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ ta có $10a+b=a^2+b^2$, suy ra a chẵn, xét trường hợp cụ thể ta có phương trình vô nghiệm.*

(b) ***(1 điểm) (0,25 điểm)****Dễ thấy, $p=2$ là một số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài, do*

$$2=\sqrt{\frac{4^2-4}{2^2-1}}$$

(0,75 điểm)*Giả sử $p>2$ là một số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó, tồn tại các số nguyên dương a,b sao cho*

$$p=\sqrt{\frac{a^2-4}{b^2-1}}$$

hay

$$p^2\left(b^2-1\right)=(a-2)(a+2)$$

Do đó

$$p^2 \mid (a-2)(a+2).$$

Nhận thấy, p không thể chia hết đồng thời cả hai số $a-2$ và $a+2$, vì khi đó, sẽ có

$$p \mid (a+2)-(a-2)=4,$$

là điều vô lý, do p là số nguyên tố lớn hơn 2 . Vì thế, từ (2), do p là số nguyên tố, suy ra $p^2 \mid a-2$ hoặc $p^2 \mid a+2$. Từ đó, với lưu ý $a>2$ (dễ dàng suy ra từ (1)), ta được $a-2 \geq p^2$, hoặc $a+2 \geq p^2$; hay, $a \geq p^2+2$, hoặc $a \geq p^2-2$. Do vậy, ta có

$$2a+1>p^2-4$$

Từ (1), ta được:

$$p^2b^2 = a^2 + p^2 - 4$$

Từ (4), do $p > 2$ suy ra $p^2b^2 > a^2(5)$. Hơn nữa, từ (3) và (4), ta có:

$$\begin{aligned}(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 &> a^2 + p^2 - 4 \\ &= p^2b^2\end{aligned}$$

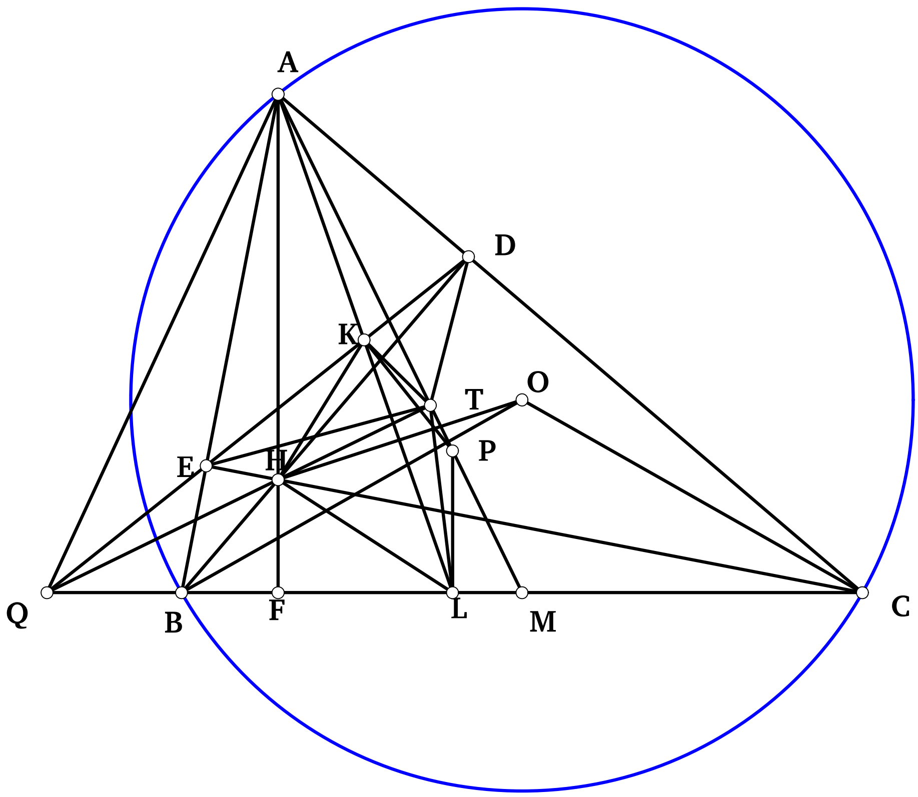
Từ (5) và (6), ta được:

$$a^2 < p^2b^2 < (a+1)^2$$

là điều vô lí, do a^2 và $(a+1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp. Điều vô lý nhận được ở trên cho thấy, không tồn tại số nguyên tố $p > 2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy tóm lại, $p = 2$ là số nguyên tố duy nhất thỏa mãn yêu cầu dề bài.

Bài 4. (a) ***(1 điểm)****Ta có $\angle BAC = 60°$, suy ra $\angle BOC = \angle BHC = 120°$, tứ giác $BHOC$ nội tiếp, suy ra $\angle OHC = \angle OBC = 30°$.*

(b) ***(1 điểm)****Tam giác AEK và ACL đồng dạng, suy ra $\dfrac{AK}{AL} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{2}$. Khi đó $KL = \dfrac{1}{2}AL$, lớn nhất khi A là điểm chính giữa cung BC.*



(c) ***(0,5 điểm)****Gọi X là điểm chính giữa cung BC, M là trung điểm BC. Vẽ $XU \perp d$. Do $\angle BAH = \angle CAO$, suy ra $\angle ALB = \angle ALR$ (R là giao điểm của d và AO), suy ra $XU = XM$ không đổi. Nên d tiếp xúc với đường tròn tâm X bán kính XM.*

(d) ***(1 điểm)***Gọi M là trung điểm BC, Q là giao điểm của EF với BC, khi đó ta chứng minh được QH vuông góc AM tại T.
Mặt khác MD, ME là tiếp tuyến của (AED), suy ra $\frac{TD}{TE} = \frac{AD}{AE} = \frac{KD}{KE}$ nên TK là phân giác $\angle ETD$.
Khi đó $\angle KTQ = \angle KTE + \angle ETQ = 90° - \frac{1}{2}\angle A + 90° - \angle B = \frac{1}{2}\angle A + \angle C = \angle KLQ$, suy ra $TKQL$ nội tiếp, do đó 5 điểm Q, K, T, P, L cùng thuộc đường tròn.
Mà $\angle ATP = 90°$ suy ra T, P, M thẳng hàng.
Do đó AP qua trung điểm M của BC cố định.

Bài 5. ***(1 điểm)*** *Gọi các viên bi lần lượt xuất hiện theo thứ tự là $A_1, A_2, \cdots, A_{20}$. Với mỗi số nguyên dương $1 \le k \le 11$, gọi d_k là hiệu của số lượng bi màu xanh và số lượng bi màu đỏ trong bộ 10 bi liên tiếp là $A_k, A_{k+1}, \cdots, A_{k+9}$. Yêu cầu của bài toán tương đương với việc tồn tại chỉ số $1 \le k \le 11$ để $d_k = 0$. Có các nhận xét sau:*

- $d_1 - d_{11} = 0$. Thật vậy, hiệu này là chênh lệch giữa số bi màu xanh và số bi màu đỏ trong 20 bi đã cho, và hiệu này bằng 0 theo giả thiết.
- Với $1 \le k \le 11$ thì d_k là số chẵn. Thật vậy, nếu trong các bi $A_k, A_{k+1}, \cdots, A_{k+9}$ có l bi màu xanh $(0 \le l \le 10)$ thì sẽ có $10 - l$ bi màu đỏ, do đó $d_k = 2l - 10$ là số chẵn.
- Với $1 \le k \le 10$ thì $d_k - d_{k+1} \in \{0, -2, 2\}$. Thật vậy, có các trường hợp sau xảy ra:
  - nếu A_k và A_{k+10} cùng màu thì $d_k - d_{k+1} = 0$;
  - nếu A_k màu đỏ và A_{k+10} màu xanh thì $d_k - d_{k+1} = 2$;
  - nếu A_k màu xanh và A_{k+10} màu đỏ thì $d_k - d_{k+1} = -2$.

Với các nhận xét trên, có những trường hợp sau cần giải quyết:

- Nếu $d_1 = 0$ hoặc $d_{11} = 0$ thì $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ là bộ điểm cần tìm.
- Ngược lại, giả sử rằng $d_1, d_{11} \neq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $d_1 < 0$ và $d_{11} > 0$. Gọi l là chỉ số lớn nhất để $d_l < 0$. Khi đó $d_l \le -2$ và $d_{l+1} \ge 0$. Hơn nữa:

$$2 \ge d_{l+1} - d_l \ge 0 - (-2) = 2,$$

  cho thấy $d_{l+1} = 0$ hay $A_{l+1}, A_{l+2}, \cdots, A_{l+10}$ là bộ bi cần tìm.

Vậy bài toán được chứng minh hoàn toàn.