STAR EDUCATION
THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG PTNK HCM

LỜI GIẢI THAM KHẢO

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10

Năm học 2024 - 2025
Môn thi: TOÁN CHUYÊN
Thời gian: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Đề thi được sưu tầm từ học sinh nên không tránh khỏi sai sót trong quá trình đánh máy. Rất mong nhận được sự đóng góp từ bạn đọc.

Đáp án tham khảo được thực hiện bởi đội ngũ giáo viên - trợ giảng trung tâm STAR Education: **Thầy NGUYỄN VĨNH KHANG - Thầy LÊ ĐÌNH HẢI - Thầy NGUYỄN TẤN PHÁT - Thầy NGUYỄN HUY HOÀNG - Thầy VÕ HOÀNG THÀNH - Thầy NGUYỄN THÁI HƯNG - Thầy NGUYỄN PHƯỚC THỊNH - DƯƠNG GIA LƯỢNG - NGUYỄN QUÍ HUỲNH LONG**.

Xem thêm đề thi và đáp án KỲ THI TUYỂN SINH 10 PTNK 2024 tại:

Bài 1 (1,5 điểm).

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + z^3 = y \\ y^3 + x^3 = z \\ z^3 + y^3 = x \end{cases}.$$

b) Cho a, b là các số tự nhiên khác 0 phân biệt, chứng minh rằng phương trình sau luôn có đúng 3 nghiệm:

$$(\sqrt{x} - 1)\left[x^2 - 2(a+b)x + ab + 2\right] = 0.$$

Lời giải.

a) Xét:

$$\begin{cases} x^3 + z^3 = y & (1) \\ y^3 + x^3 = z & (2) \\ z^3 + y^3 = x & (3) \end{cases}$$

Lấy phương trình (1) trừ (2) vế theo vế, ta được:

$$(z-y)(z^2 + yz + y^2) = y - z \Leftrightarrow (z-y)(z^2 + zy + y^2 + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow z = y \text{ (do } z^2 + zy + y^2 + 1 \geq 1).$$

Tương tự, lấy phương trình (3) trừ (1) vế theo vế, ta cũng có $x = y$.

Do đó $x = y = z$, thay vào (1) suy ra:

$$2x^3 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $(x;y;z) \in \left\{(0;0;0), \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

b) Điều kiện: $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ x^2 - 2(a+b)x + ab + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2(a+b)x + ab + 2 = 0 \quad (*) \end{array}\right. .$$

Với phương trình (*), ta có $\Delta' = (a+b)^2 - (ab-2) = a^2 + ab + b^2 - 2 \geq 1$ (do $a, b \geq 1$). Do đó (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2; hơn nữa theo định lý Viete, ta có

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(a+b) > 0 \\ P = x_1x_2 = ab + 2 > 0 \end{cases}$$

nên (*) có hai nghiệm dương phân biệt. Giả sử (*) có nghiệm $x = 1$, khi đó

$$1 - 2(a+b) + ab + 2 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 1 \Rightarrow a - 2 = b - 2 = \pm 1 \Rightarrow a = b \text{ (Vô lý)}.$$

Như vậy (*) có hai nghiệm dương phân biệt và khác 1, dẫn đến phương trình đã cho luôn có đúng 3 nghiệm phân biệt.

□

Bài 2 (2 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2(ab + bc + ca)$. Chứng minh rằng

$$3 \leq a + b + c \leq \frac{2(ab + bc + ca) + 3}{3}$$

Lời giải.

Ta có

$$2(ab + bc + ac) = a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq ab + bc + ac + 3 \Leftrightarrow ab + bc + ac \geq 3.$$

Do đó $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ac) \geq 9 \Leftrightarrow a + b + c \geq 3$.

Đặt $p = a + b + c$ và $q = ab + bc + ca$. Từ $(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) + 3 = 2(ab + bc + ca)$, ta được $p^2 + 3 = 4q$. Mặt khác,

$$\begin{aligned} & a + b + c \leq \frac{2(ab + bc + ca) + 3}{3} \\ \Leftrightarrow\ & 3p \leq 2q + 3 \Leftrightarrow 3p \leq \frac{p^2 + 3}{2} + 3 \\ \Leftrightarrow\ & 6p \leq p^2 + 3 + 6 \Leftrightarrow p^2 - 6p + 9 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (p - 3)^2 \geq 0 \quad \text{(Đúng)} \end{aligned}$$

Như vậy $a + b + c \leq \dfrac{2(ab + bc + ca) + 3}{3}$. $\square$

Bài 3 (2 điểm). Với mỗi số tự nhiên n, đặt $a_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$.

a) Chứng minh rằng $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) Tìm tất cả n sao cho $a_n \vdots 4$.

c) Tìm tất cả n sao cho $a_n \vdots 14$.

Lời giải.

a) Ta có :

$$\begin{aligned}4a_{n+1} - a_n &= 4\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} + 4\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1} - \left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\\ &= \left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(8+4\sqrt{3}-1\right) + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\left(8-4\sqrt{3}-1\right)\\ &= \left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^2\\ &= \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+2} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{n+2} = a_{n+2}\end{aligned}$$

Vậy $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) Ta tính được $a_0 = 2$ và $a_1 = 4$ đều là số chẵn. Ta chứng minh a_n là số chẵn với mọi $n \in \mathbb{N}$. Thật vậy, giả sử a_k và a_{k+1} là số chẵn $(k \in \mathbb{N})$. Do $a_{k+2} = 4a_{k+1} - a_k$ nên suy ra a_{k+2} là số chẵn. Vậy theo quy nạp suy ra a_n là số chẵn với mọi $a \in \mathbb{N}$.
Ta có a_0 chia cho 4 dư 2 và $a_1 \vdots 4$. Ta chứng minh a_n chia cho 4 dư 2 với mọi n chẵn và a_n chia hết cho 4 với mọi n lẻ. Thật vậy, giả sử a_{2k} chia cho 4 dư 2 và a_{2k+1} chia hết cho 4 $(k \in \mathbb{N})$.

- Do $a_{2k+2} = 4a_{2k+1} - a_{2k} \equiv -2 \equiv 2 \pmod 4$ nên suy ra a_{2k+2} chia cho 4 dư 2.
- Do $a_{2k+3} = 4a_{2k+2} - a_{2k+1} \equiv -a_{2k+1} \equiv 0 \pmod 4$ nên a_{2k+3} chia hết cho 4.

Từ đó theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra a_n chia cho 4 dư 2 nếu n chẵn và a_n chia hết cho 4 nếu n lẻ. Do đó tất cả giá trị n thỏa mãn a_n chia hết cho 4 là $n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{N})$.

c) Với mọi $n \geq 4$, ta có

$$\begin{aligned}a_{n+4} &= 4a_{n+3} - a_{n+2} = 4\left(4a_{n+2} - a_{n+1}\right) - a_{n+2}\\ &= 15a_{n+2} - 4a_{n+1} \equiv a_{n+2} - 4a_{n+1}\\ &\equiv 4a_{n+1} - a_n - 4a_{n+1} \equiv -a_n \pmod 7.\end{aligned}$$

- Với $n = 4k$ $(k \in \mathbb{N})$, ta được

$$a_{4k} \equiv -a_{4k-4} \equiv \cdots \equiv (-1)^k a_0 \equiv (-1)^k \cdot 2 \not\equiv 0 \pmod 7.$$

- Với $n = 4k+1$ $(k \in \mathbb{N})$, ta được

$$a_{4k+1} \equiv -a_{4k-3} \equiv \cdots \equiv (-1)^k a_1 \equiv (-1)^k \cdot 4 \not\equiv 0 \pmod 7.$$

- Với $n = 4k + 2$ $(k \in \mathbb{N})$, ta được

$$a_{4k+2} \equiv -a_{4k-2} \equiv \cdots \equiv (-1)^k a_2 \equiv (-1)^k \cdot 14 \equiv 0 \pmod 7.$$

- Với $n = 4k + 3$ $(k \in \mathbb{N})$, ta được

$$a_{4k+3} \equiv -a_{4k-1} \equiv \cdots \equiv (-1)^k a_3 \equiv (-1)^k \cdot 52 \not\equiv 0 \pmod 7.$$

Vậy $a_n \,\vdots\, 7$ khi và chỉ khi $n = 4k + 2$ $(k \in \mathbb{N})$, kết hợp với a_n chẵn với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta kết luận $a_n \,\vdots\, 14$ khi và chỉ khi $n = 4k + 2$ $(k \in \mathbb{N})$.

$\square$

Bài 4 (3 điểm). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có tam giác ABD nhọn, AC đi qua (O), I là trung điểm BD, H là trực tâm của tam giác ABD. Gọi E là giao điểm của AI và đường tròn (O) (E khác A), kẻ HK vuông góc với AI (K nằm trên AI).

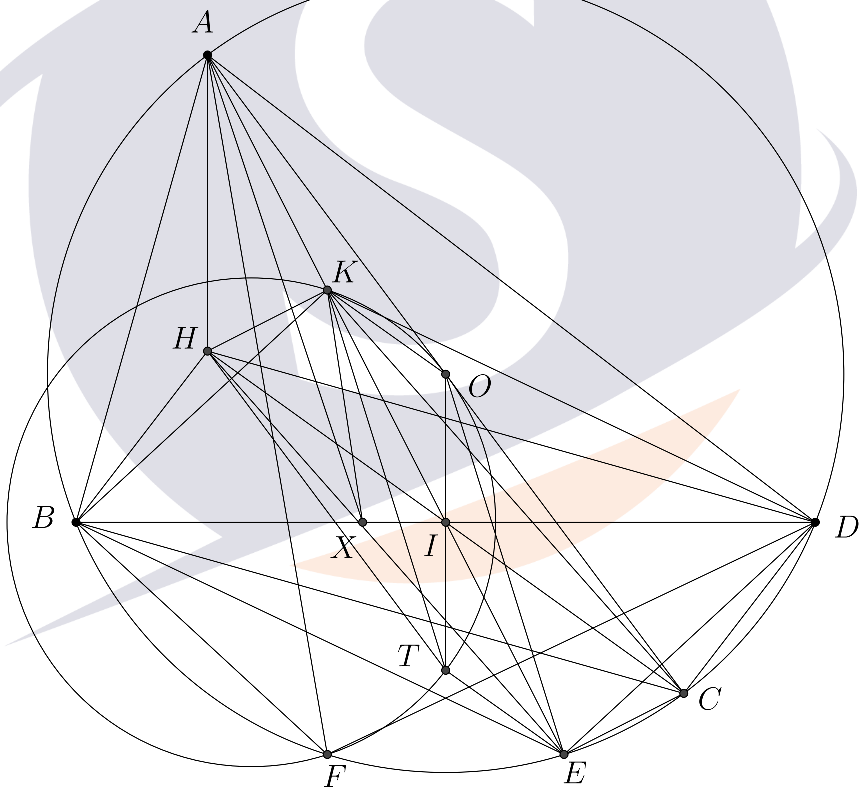
a) Chứng minh rằng tứ giác $CEHK$ là hình bình hành và $IB^2 = ID^2 = IA \cdot IK$.

b) Lấy điểm F thuộc cung nhỏ BD sao cho $\widehat{BAF} = \widehat{DAI}$. Chứng minh rằng K đối xứng với F qua BD.

c) Chứng minh rằng các đường phân giác trong của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BKD}$ đồng quy trên BD.

d) Qua H kẻ đường thẳng song song với AC, lấy T sao cho $TH = TK$. Chứng minh bốn điểm O, K, T, F cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



a) Ta có $BH \parallel CD$ và $DH \parallel CB$ nên tứ giác $BHDC$ là hình bình hành, suy ra I là trung điểm của CH.

Hai tam giác vuông HKI và CEI có $IH = IC$ và $\widehat{HIK} = \widehat{CIE}$ nên chúng bằng nhau, suy ra $HK = CE$. Tứ giác $HKCE$ có $HK = CE$ và $HK \parallel CE$ nên tứ giác $HKCE$ là hình bình hành.

Tứ giác $HKCE$ là hình bình hành nên I là trung điểm của KE. Tứ giác $ABED$ nội tiếp nên suy ra $IA \cdot IE = IB \cdot ID$. Do đó

$$IK \cdot IA = IE \cdot IA = IB \cdot ID = IB^2 = ID^2.$$

b) Từ $\widehat{BAF} = \widehat{DAI}$ suy ra $BF = DE$ và $BE = DF$. Lại có tứ giác $BKDE$ là hình bình hành (do I là trung điểm chung của KE và BD) nên $BK = DE$ và $BE = DK$. Ta thu được $BK = DE = BF$ và $DK = BE = DF$, do đó BD là đường trung trực của KF nên K đối xứng với F qua BD.

c) Kẻ AX, AY lần lượt là phân giác $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BKD}$ (X, Y thuộc cạnh BD). Khi đó ta được:

$$\frac{BX}{DX} = \frac{BA}{DA}, \quad \frac{BY}{DY} = \frac{BK}{DK}.$$

Từ câu a, $IK \cdot IA = IB \cdot ID = IB^2 = ID^2$ suy ra các cặp tam giác IKB và IBA, IKD và IDA đồng dạng, vì vậy ta có:

$$\frac{BA}{BK} = \frac{BI}{KI}, \quad \frac{DA}{KD} = \frac{DI}{KI}.$$

Suy ra $\dfrac{BA}{BK} = \dfrac{DA}{KD} \Rightarrow \dfrac{BA}{DA} = \dfrac{BK}{KD}$. Do đó $\dfrac{BX}{DX} = \dfrac{BY}{DY}$.
Hơn nữa X, Y cùng nằm trên đoạn BC nên ta suy ra X trùng Y.

d) Dựng hình bình hành $AHT'O$ khi đó ta có $T'H = OA$. Mặt khác ta có $OT' = AH = 2OI$ nên T' đối xứng với O qua BD. Suy ra $T'B = T'D = OB = OA = T'H$. Do đó T' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.

Hơn nữa, ta lại có I là trung điểm KE (chứng minh câu a) nên $OKT'E$ là hình bình hành, suy ra $T'K = OE = OA = T'H$. Khi đó T' nằm trên đường thẳng qua H song song với AC và $T'H = T'K$ nên T' trùng T.

Ta có K đối xứng với F qua BD và O đối xứng với T qua BD, từ đó ta suy ra $OKFT$ là hình thang cân nên tứ giác $OKFT$ nội tiếp.

□

Bài 5 (1,5 điểm). Ghi 31 số nguyên dương $a_1 < a_2 < \cdots < a_{31}$ lên 31 thẻ.

a) Biết rằng tổng các số trên 16 thẻ bất kỳ luôn lớn hơn tổng 15 thẻ còn lại. Chứng minh $a_1 \geq 226$.

b) Biết rằng 31 thẻ này ghi các số từ 1 đến 31. Chia 31 thẻ này vào 2 hộp gọi là A và B, biết trong hộp A thì tổng hai số bất kỳ không là số chính phương. Chứng minh tồn tại 4 thẻ trong hộp B, chia ra làm 2 cặp và mỗi cặp có tổng là số chính phương.

Lời giải.

a) Vì $a_1 < a_2 < \ldots < a_{31}$ nên

$$\begin{cases} a_{17} - a_2 \geqslant 15 \\ a_{18} - a_3 \geqslant 15 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{31} - a_{16} \geqslant 15 \end{cases}.$$

Suy ra $(a_{17} + a_{18} + \ldots + a_{31}) - (a_2 + a_3 + \ldots a_{16}) \geq 225$ hay

$$a_{17} + a_{18} + \ldots + a_{31} \geq (a_2 + a_3 + \ldots a_{16}) + 225.$$

Theo giả thiết, ta có:

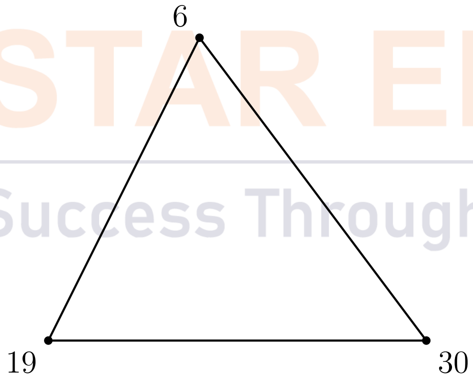
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{16} > a_{17} + a_{18} + \ldots + a_{31}.$$

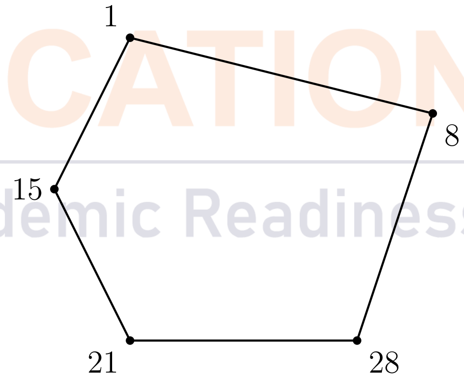
Do đó:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{16} > (a_2 + a_3 + \ldots a_{16}) + 225.$$

Suy ra $a_1 > 225$ hay $a_1 \geq 226$.

b) Xét bộ 3 số $(6, 19, 30)$ sau: bất kỳ 2 trong 3 số này có tổng là số chính phương, nên A chỉ chứa được nhiều nhất 1 số trong 3 số này, dẫn đến B phải chứa ít nhất 2 trong 3 số trên. Nói cách khác, B chứa một cặp có tổng là số chính phương. Ở hình dưới ta nối 2 số lại với nhau nếu nó có tổng là số chính phương.





Xét tiếp bộ 5 số $(1, 8, 28, 21, 15)$: ta có 2 số kề nhau luôn có tổng là số chính phương và $(1, 15)$ cũng có tổng là số chính phương. Khi đó, A không thể nào chứa nhiều hơn 2 số trong 5 số trên, vì ngược lại A phải chứa hai số nằm trên một cạnh trong 5 cạnh trên, mâu thuẫn với giả sử A không chứa 2 số có tổng là số chính phương.

Như vậy, A chỉ chứa nhiều nhất 2 trong 5 số trên và tương ứng B chứa ít nhất 3 số. Lập luận tương tự như trên, B phải chứa một cạnh trong 5 cạnh trên. Vì bộ 5 số $(1, 8, 28, 21, 15)$ khác với bộ 3 số trước $(6, 19, 30)$, ta tìm được thêm một cặp số trong B có tổng là số chính phương.

$\square$

HẾT