ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

Đề chính thức

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
Năm học 2022 - 2023
Môn thi: **TOÁN (chuyên)**
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

———————

Bài 1. Cho hai phương trình: $x^2 - 2ax + 3a = 0 \quad (1)$ và $x^2 - 4x + a = 0 \quad (2)$

a) Chứng minh ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

b) Giả sử hai phương trình đều có hai nghiệm phân biệt. T_1, T_2 là tổng bình phương các nghiệm của (1) và (2). Chứng minh $T_1 + 5T_2 > 68$

Bài 2. Cho các số dương $a \geq b \geq c$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{4 + (b+c)^2} \leq 2a + b + c \leq \sqrt{4 + 4a^2}$$

Bài 3. Cho phương trình: $2^x + 5^y = k^2$ $(x; y; k \in \mathbb{N}^*)$

a) Chứng minh phương trình trên vô nghiệm khi y là số chẵn.

b) Tìm k để phương trình có nghiệm.

Bài 4. Cho tam giác ABC có trực tâm H, D đối xứng với H qua A. I là trung điểm của CD, đường tròn (I) đường kính CD cắt AB tại E, F (E thuộc tia AB)

a) Chứng minh $\angle ECD = \angle FCH$ và $AE = AF$.

b) Chứng minh H là trực tâm của $\triangle CEF$.

c) BH cắt AC tại K. Chứng minh $EFKH$ nội tiếp và EF là tiếp tuyến chung của (CKE) và (CKF).

d) Chứng minh tiếp tuyến tại C của (I) và tiếp tuyến tại K của (KEF) cắt nhau trên đường thẳng AB.

Bài 5. Cho dãy số nguyên $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{21} \geq a_{22}$ thỏa mãn:

i) $|a_i| \leq 11$ và $a_i \neq 0 \ \forall i = 1; 2; \ldots; 22$

ii) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{22} = 1$

a) Chứng minh: $a_1; a_2 > 0$

b) Chứng minh có thể chọn $k \geq 1$ số từ $a_2; a_3; \ldots; a_{22}$ để tổng S của chúng thỏa $-10 \leq a_1 + S \leq 0$.

c) Chứng minh từ dãy đã cho có thể chọn $n \geq 1$ số có tổng bằng 0.

– HẾT –

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU
Đề chính thức

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
Năm học 2021 - 2022
Môn thi: TOÁN (chuyên)
Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

LỜI GIẢI

Lời giải được thực hiện bởi nhóm giáo viên Star Education:
NGUYỄN TẤN PHÁT - NGUYỄN THÁI HƯNG - VÕ HOÀNG THÀNH - NGUYỄN THỦY TIÊN - PHẠM NGUYỄN MẠNH - NGUYỄN MẠC NAM TRUNG

Bài 1. a) Ta có: $\Delta'_1 = a^2 - 3a$; $\Delta'_2 = 4 - a$.

Ta có: $\Delta'_1 + \Delta'_2 = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 \geq 0$.

Do đó Δ'_1 hoặc Δ'_2 không âm.

Suy ra ít nhất một phương trình có nghiệm.

b) Vì (1) và (2) đều có 2 nghiệm phân biệt nên:

$$\begin{cases} \Delta'_1 > 0 \\ \Delta'_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3a > 0 \\ 4 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ 3 < a < 4 \end{array} \right. .$$

Gọi $a_1; a_2$ là hai nghiệm phân biệt của (1).

$b_1; b_2$ là hai nghiệm phân biệt của (2).

Ta có:

$$T_1 + 5T_2 - 68 = (a_1 + a_2)^2 - 2a_1a_2 + 5(b_1 + b_2)^2 - 10b_1b_2 - 68$$
$$= 4a^2 - 6a + 80 - 10a - 68$$
$$= 4a^2 - 16a + 12 = 4(a-1)(a-3)$$

- Nếu $a < 0$ thì $a - 1 < 0$ và $a - 3 < 0$ nên $T_1 + 5T_2 - 68 > 0 \Rightarrow T_1 + 5T_2 > 68$
- Nếu $3 < a < 4$ thì $a - 1 > 0$ và $a - 3 > 0$ nên $T_1 + 5T_2 - 68 > 0 \Rightarrow T_1 + 5T_2 > 68$

Vậy $T_1 + 5T_2 > 68$

Bài 2.

- $\sqrt{4 + (b+c)^2} \leq 2a + b + c$
$\Leftrightarrow 4 + b^2 + 2bc + c^2 \leq 4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4ca + 2bc$
$\Leftrightarrow 1 \leq a^2 + ab + ca$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2 + ab + ca$
$\Leftrightarrow b^2 + c^2 \leq ab + ca$
(luôn đúng vì $a \geq b \geq c$ nên $ab \geq b^2$ và $ca \geq c^2$)
- $2a + b + c \leq \sqrt{4 + 4a^2}$
$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4ca + 2bc \leq 4 + 4a^2$
$\Leftrightarrow b^2 + c^2 + 4bc + 4ca + 2bc \leq 4 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$
$\Leftrightarrow 4ab + 4ca + 2bc \leq 4a^2 + 3b^2 + 3c^2$

$VP = (2a^2 + 2b^2) + (2a^2 + 2c^2) + (b^2 + c^2) \geq 4ab + 4ac + 2bc = VT$, suy ra đpcm.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 3. a) Giả sửa phương trình có nghiệm với y chẵn.

Với $x = 1$ thì: $2 + 5^y = k^2 \equiv 2 \pmod 5$

Điều này vô lý vì $k^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ với mọi $k \in \mathbb{N}$

- Với $x > 1$, do y chẵn nên đặt $y = 2m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$

  Khi đó:

  $2^x + 5^{2m} = k^2 \quad (1)$
  $\Leftrightarrow 2^x = (k - 5^m)(k + 5^m)$
  $\Rightarrow \begin{cases} k - 5^m = 2^t \\ k + 5^m = 2^{x-t} \end{cases} (t \geq 0)$

  Vì $k + 5^m > k - 5^m$ nên $x - t > t$

  Ta suy ra $k = 2^{t-1} + 2^{x-t-1}$

  Ta thấy nếu $t = 0$ thì $k = \dfrac{1}{2} + 2^{x-1} \notin \mathbb{N}$. Do đó $t \geq 1$.

  Mà k lẻ và $t - 1 < x - t - 1$ nên $2^{t-1} = 1 \Rightarrow t = 1$

  Khi đó: $k - 5^m = 2 \Leftrightarrow k = 2 + 5^m$

  Thay vào (1) ta được:

  $2^x + 5^{2m} = (2 + 5^m)^2 \Leftrightarrow 2^x = 4 + 4 \cdot 5^m$
  $\Leftrightarrow 2^{x-2} = 1 + 5^m > 1$

  Nhận xét: $x \geq 3$

  - $x = 3$ thì $2 = 1 + 5^m \Rightarrow 1 = 5^m \Rightarrow m = 0$ (vô lý).
  - $x > 3$ thì $2^{x-2} \vdots 4$.

    Mà $1 + 5^m \equiv 2 \pmod 4$ nên $1 + 5^m \not\vdots\, 4$ (vô lý).

  Vậy phương trình vô nghiệm khi y chẵn.

b) Vì y chẵn phương trình vô nghiệm nên y lẻ.

- Nếu $x = 4k + 1$ thì:

  $k^2 \equiv 2^x + 5^y \equiv 2^{4k} \cdot 2 + 5^y \equiv 2 \mod 5$, vô lý vì $k^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ với mọi $k \in \mathbb{N}$

- Nếu $x = 4k + 3$ thì:

  $k^2 \equiv 2^{4k} \cdot 2^3 + 5^y \equiv 8 \equiv 3 \pmod 5$, vô lý.

Vậy x chẵn, đặt $x = 2t$ $(t \geq 1)$

$2^x + 5^y = k^2$
$\Leftrightarrow 5^y = (k - 2^t)(k + 2^t)$
$\Rightarrow \begin{cases} k - 2^t = 5^s \\ k + 2^t = 5^{y-s} \end{cases}$

- Nếu $s > 0$ thì $5^{y-s} - 5^s \vdots 5$ nên $2^{t+1} \vdots 5$ (vô lý)

  Do đó $s = 0$.

  Khi đó: $\begin{cases} k = 1 + 2^t \\ k = 5^y - 2^t \end{cases}$

  Do đó: $1 + 2^t = 5^y - 2^t \Rightarrow 5^y - 1 = 2^{t+1} \quad (*)$

- $t > 1$ thì $2^{t+1} \vdots 8$.

  Đặt $y = 2l + 1$

  $\Rightarrow 5^y - 1 = 25^l \cdot 5 - 1 \equiv 5 - 1 \equiv 4 \pmod 8$ (vô lý do $(*)$)

  Vậy $t = 1 \Rightarrow k = 3$,

Với $k = 3$ ta tìm được $x = 2$ và $y = 1$.

Vậy $k = 3$.

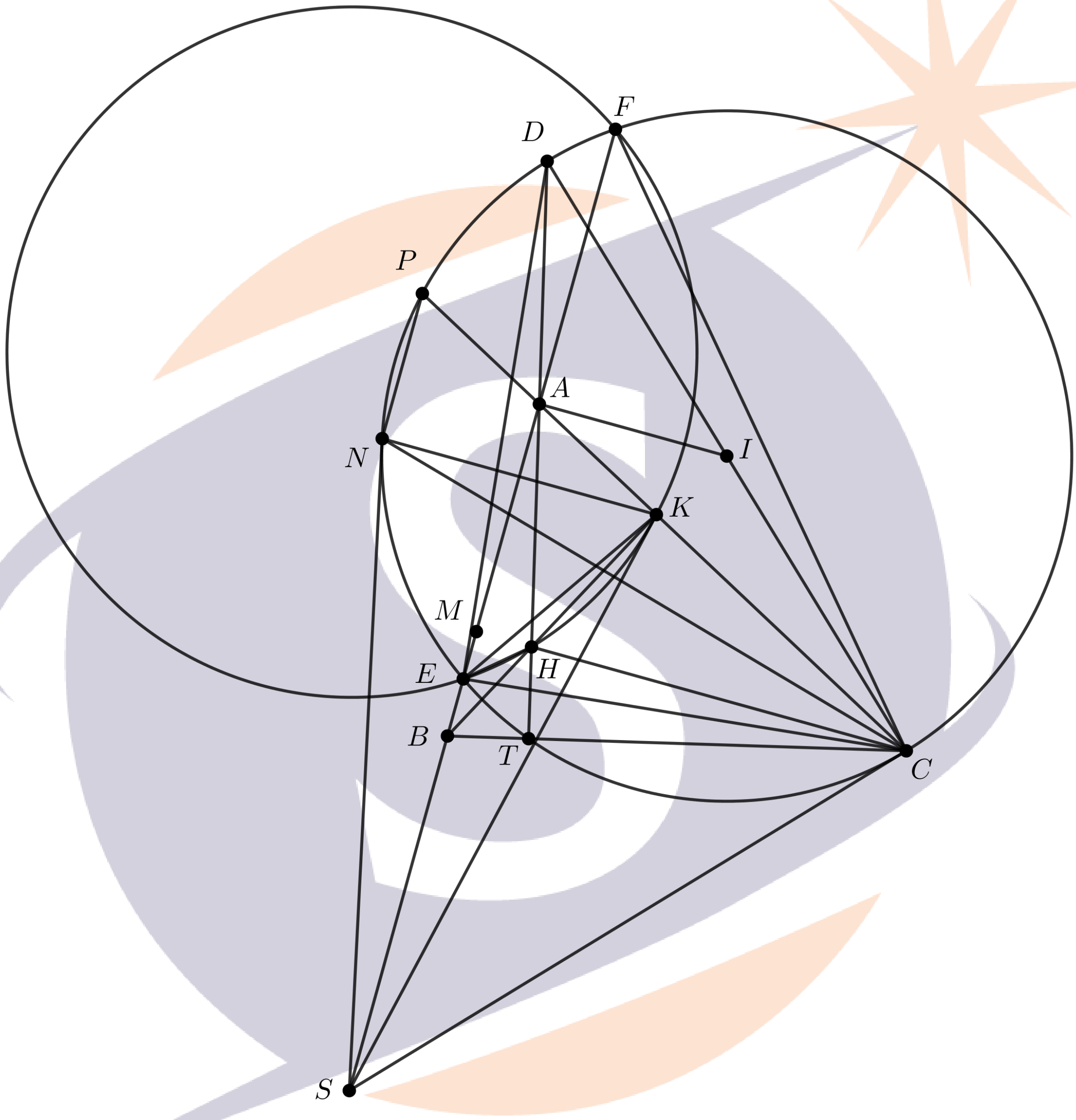
Bài 4. a) $\angle ECD = \angle DFC - \angle EFC = 90° - \angle AFC = \angle FCH$.

$IA \parallel HC \Rightarrow IA \perp AB \Rightarrow A$ là trung điểm của EF.

b) A là trung điểm chung của EF và DH nên $DEHF$ là hình bình hành.

$\Rightarrow DE \parallel FH \Rightarrow FH \perp EC$.

Mà $CH \perp EF$ nên ta có đpcm.



c) AH cắt BC tại T thì $T \in (I)$. Ta có: $BH \cdot BK = BT \cdot BC = BF \cdot BE$.

$\Rightarrow H, K, F, E$ cùng nằm trên một đường tròn.

Kéo dài AC cắt (I) tại điểm thứ hai là P thì P là trung điểm của PK.
Ta có: $AE.AF = AE^2 = AF^2 = AP.AC = AK.AC$, suy ra điều phải chứng minh.

d) Lấy N đối xứng với K qua AB.

$\angle ENF = \angle EKF = \angle EHF = 180° - \angle ECF \Rightarrow N \in (I)$.

$AP = AK = AN \Rightarrow \angle KNP = 90^\circ \Rightarrow NP \parallel BC \Rightarrow ENPF$ là hình thang cân.

$\Rightarrow \angle ECN = \angle FCP \Rightarrow \triangle ECN \backsim \triangle ACF$ và $\triangle ECA \backsim \triangle NCF$.

$\Rightarrow \dfrac{NE}{AF} = \dfrac{EC}{AC}$ và $\dfrac{EA}{NF} = \dfrac{CA}{CF}$

$\Rightarrow \dfrac{NE}{EC} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{NF}{CF} \quad (1)$

Tiếp tuyến tại N và C của (I) cắt nhau tại S, SF cắt (I) tại E' $(E' \neq F)$

$\triangle SE'N \backsim \triangle SNF \Rightarrow \dfrac{NE'}{NF} = \dfrac{SE'}{SN}$

$\triangle SE'C \backsim \triangle SCF \Rightarrow \dfrac{E'C}{CF} = \dfrac{SE'}{SC}$

$\Rightarrow \dfrac{NE'}{NF} = \dfrac{E'C}{CF} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $E \equiv E'$

Mà tiếp tuyến tại N của (I) đối xứng với tiếp tuyến tại K của (EHF) qua AB nên ta có đpcm.

Bài 5. a) Giả sử $a_2 \leq 0$.

Vì $a_i \neq 0 \Rightarrow a_2 < 0 \Rightarrow a_2 \leq -1$

$\Rightarrow a_{22} \leq a_{21} \leq \ldots \leq a_3 \leq a_2 \leq -1$

$\Rightarrow a_2 + a_3 + \ldots + a_{22} \leq -21$

Mà $a_1 + a_2 + \ldots + a_{22} = 1$ nên $a_1 \geq 22$ (trái giả thiết)

Do đó $a_2 > 0 \Rightarrow a_1 \geq a_2 > 0$

b) Giả sử không tồn tại $k \geq 1$ số nào từ các số $a_2, a_3, \ldots, a_{22}$ để tổng S của chúng thỏa $-10 \leq a_1 + S \leq 0$.

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{22} \leq -11 \\ a_1 + a_3 + a_4 + \ldots a_{22} \geq 1 \end{array}\right.$

TH1: $a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{22} \leq -11$

Lại có $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{22} = 1$ nên $a_2 \geq 12$ (trái gt).

TH2: $a_1 + a_3 + a_4 + \ldots a_{22} \geq 1$

Lại có $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{22} = 1$ nên $a_2 \leq 0$ (mâu thuẫn câu a)

Do đó ta có điều phải chứng minh.

c) Ta có nhận xét sau:

Với mỗi X là tập con thực sự của $\{1, 2, \ldots, 22\}$, luôn tồn tại i không thuộc X sao cho a_i trái dấu với s, trong đó s là tổng các a_k với k thuộc X.

Chứng minh:

Đặt tổng các a_k với k thuộc X là s, tổng các a_k với k không thuộc X là s' thì $s.s' = s(1 - s) \leq 0$. Do đó tồn tại i không thuộc X sao cho $a_i.s \leq 0$.

Quay trở lại bài toán, giả sử không thể chọn ra n số có tổng bằng 0. Chọn $i_1 = 1$, với mỗi $1 \leq k \leq 22$, chọn i_k là số nguyên dương nhỏ nhất khác $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ sao cho a_{i_k} trái dấu với $a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_{k-1}}$.

Đặt $S_k = a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_k}$ thì $S_1 = a_1$ nên $|S_1| \leq 11$, ta cũng suy ra được nếu $|S_{n-1}| \leq 11$ thì

$$\begin{aligned}|S_n| = |S_{n-1} + a_{i_n}| &= |S_{n-1} - (-a_{i_n})| \\ &= ||S_{n-1}| - |a_{i_n}|| \text{ (do } -a_{i_n} \text{ cùng dấu với } S_{n-1}) \\ &\leq 10 \text{ (do } 1 \leq |a_{i_n}|, |S_{n-1}| \leq 11),\end{aligned}$$

như vậy $|S_i| \leq 10$ với mọi $i \in \{2, 3, ..., 22\}$. Do S_i khác 0 nên S_i có thể nhận 20 giá trị, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại $m < n$ sao cho $S_m = S_n$, nghĩa là tổng $a_{i_{m+1}} + ... + a_{i_n} = 0$.