Từ đó, ta có $\triangle PAM \backsim \triangle CAH$. Suy ra $\angle PAM = \angle CAH$.

$\square$

31.4 Đáp án toán chuyên

Bài 1. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (x+y)\left(4+\dfrac{1}{xy}\right)=1 \\ \left(4x+\dfrac{1}{x}\right)\left(4y+\dfrac{1}{y}\right)=-20 \end{cases}.$$

Lời giải. ĐKXĐ là $x, y \neq 0$.

Ta có HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(4x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(4y+\dfrac{1}{y}\right)=1 \\ \left(4x+\dfrac{1}{x}\right)\left(4y+\dfrac{1}{y}\right)=-20 \end{cases}.$

Dặt $a = 4x + \dfrac{1}{x}$, $b = 4y + \dfrac{1}{y}$, HPT trở thành $\begin{cases} a+b=1 \\ ab=-20 \end{cases}$

Theo định lý Viete đảo, a và b là nghiệm của phương trình

$$t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \text{ hay } t = -4$$

TH1: $a = 5$ và $b = -4$. Ta có

$$\begin{cases} 4x+\dfrac{1}{x}=5 \\ 4y+\dfrac{1}{y}=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-5x+1=0 \\ 4y^2+4y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ hay } x=\dfrac{1}{4} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

TH2: $a = -4$ và $b = 5$. Ta có

$$\begin{cases} 4y+\dfrac{1}{y}=5 \\ 4x+\dfrac{1}{x}=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2-5y+1=0 \\ 4x^2+4x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \text{ hay } y=\dfrac{1}{4} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = \left\{\left(1, -\dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}\right), \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right), \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)\right\}$. $\square$

Bài 2. Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$.

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}} \leq \sqrt{3}$.

b) Chứng minh rằng: $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq abc \leq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$.

Lời giải. a) Từ giả thiết, ta suy ra

$$\frac{ab+bc+ca}{abc} = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Áp dụng *Bất đẳng thức Bunhiacopxki*, ta có

$$(1+1+1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$$

hay

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}} \leq \sqrt{3.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} = \sqrt{3}.$$

Chứng minh hoàn tất.

b) Ta có

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 3abc. \tag{1}$$

Ta cũng có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}} \leq 1$$

hay $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{abc}$. Bình phương hai vế bất đẳng thức, ta được

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \leq abc. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \leq abc \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

□

Bài 3. Cho bảng 4×4 được tô bằng ô đen hoặc trắng sao cho

i) mỗi hàng có số ô đen bằng nhau;

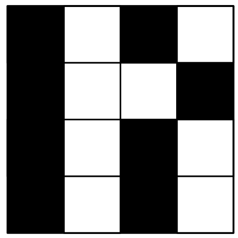
ii) mỗi cột có số ô đen đôi một khác nhau.

a) Tìm số ô đen ở mỗi hàng.

b) Một cặp ô được gọi là "tốt" khi có một ô đen và một ô trắng đứng cạnh nhau. Tìm số cặp tốt nhiều nhất tính theo hàng; số cặp tốt nhiều nhất tính theo cột.

Lời giải. a) Mỗi cột có số ô đen đôi một khác nhau nên tổng số ô đen trong bảng phải lớn hơn hoặc bằng $0+1+2+3=6$ và bé hơn hoặc bằng $1+2+3+4=10$. Mà mỗi hàng có số ô đen đều bằng nhau nên tổng số ô đen trong bảng phải chia hết cho 4. Do đó tổng số ô đen trong bảng là 8. Suy ra số ô đen ở mỗi hàng là 2.

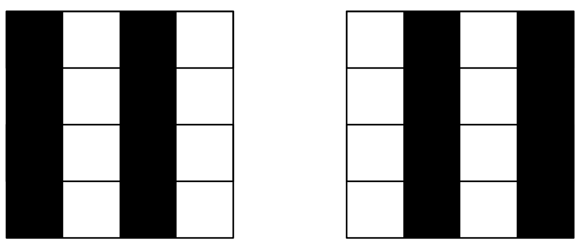
b) $8 = 0 + 1 + 3 + 4$. Số ô đen trong các cột sẽ là $0, 1, 3, 4$.
Xét số cặp tốt nhiều nhất tính theo cột:
- Trong cột chứa 0 ô đen luôn có 0 cặp tốt
- Trong cột chứa 1 ô đen có tối đa 2 cặp tốt
- Trong cột chứa 3 ô đen có tối đa 2 cặp tốt
- Trong cột chứa 4 ô đen luôn có 0 cặp tốt
Vậy có tối đa 4 cặp tốt tính theo cột. Một ví dụ cụ thể là



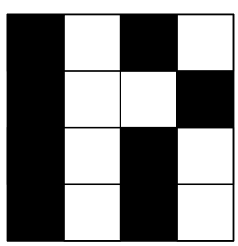
Xét số cặp tốt nhiều nhất tính theo hàng:
- Mỗi hàng đều chứa 2 ô đen. Và 1 hàng 1×4 có đúng 2 ô đen sẽ chứa tối đa 3 cặp tốt và phải là 1 trong 2 cấu hình sau:

(*)

- Như vậy số cặp tốt nhiều nhất tính theo hàng trong bảng là $3 \times 4 = 12$. Giả sử tồn tại 1 cấu hình A có 12 cặp tốt tính theo hàng và thỏa yêu cầu bài. Như vậy mỗi hàng phải có cấu hình là 1 trong 2 cấu hình $(*)$ trên. Và vì có 1 cột chứa 4 ô đen nên cấu hình A chỉ có thể là



Tuy nhiên 2 cấu hình trên đều không thỏa yêu cầu bài. Do đó trong bảng 4×4 chỉ có tối đa 11 cặp tốt tính theo hàng. Ví dụ:



$\square$

Bài 4. Cho m, n là các số nguyên không âm thỏa mãn $m^2 - n = 1$. Đặt $a = n^2 - m$.

a) Chứng minh rằng a là số lẻ.

b) Giả sử $a = 3 \cdot 2^k + 1$, k là số nguyên không âm. Chứng minh rằng $k = 1$.

c) Chứng minh rằng a không là số chính phương.

Lời giải. a) Vì $m^2 - n = 1$ là số lẻ nên m, n khác tính chẵn lẻ. Do đó $a = n^2 - m$ là số lẻ.

b) Ta có

$$a - 1 = n^2 - m - m^2 + n = (n - m)(n + m + 1)$$
$$\Rightarrow 3 \cdot 2^k = (n - m)(n + m + 1).$$

Vì $n - m$ lẻ nên $n + m + 1 \vdots 2^k$, do đó ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $n + m + 1 = 2^k$ thì $n - m = 3$, kết hợp với $m^2 - n = 1$, ta được $m^2 - m - 4 = 0$ (Loại vì phương trình có nghiệm $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$ không nguyên).
- Nếu $n + m + 1 = 3 \cdot 2^k$ thì $n - m = 1$, kết hợp với $m^2 - n = 1$ ta có $m^2 - m - 2 = 0$, do đó $m = 2$ (do $m \geq 0$).

  Từ đó suy ra $n = 3$ và $3 \cdot 2^k = 3 + 2 + 1 = 6 \Rightarrow k = 1$.

Vậy $k = 1$.

c) Vì $m^2 - n = 1$ nên $n = m^2 - 1$, khi đó $a = n^2 - m = (m^2 - 1)^2 - m = m^4 - 2m^2 - m + 1$.

Nhận xét $m^2 = n + 1 \geq 1$ nên $m \geq 1$. Khi đó

$$m^4 - 2m^2 - m + 1 < m^4 - 2m^2 + 1 = (m^2 - 1)^2. \qquad (31.1)$$

- Xét $m \geq 2$, khi đó

  $$m^4 - 2m^2 - m + 1 - (m^2 - 2)^2 = 2m^2 - m - 3 = (2m - 3)(m + 1) > 0.$$

  Do đó

  $$m^4 - 2m^2 - m + 1 > (m^2 - 2)^2, \quad \text{với } m \geq 2. \qquad (31.2)$$

  Từ (31.1) và (31.2) ta được

  $$(m^2 - 2)^2 < a = m^4 - 2m^2 - m + 1 < (m^2 - 1)^2, \quad \text{với } m \geq 2. \qquad (31.3)$$

  Vì $(m^2 - 2)^2$ và $(m^2 - 1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp nên từ (31.3), ta suy ra a không là số chính phương.
- Xét $m = 1$ thì $n = 0$, do đó $a = -1$ không là số chính phương.

Tóm lại, a không là số chính phương.

□

Bài 5. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Gọi L là chân đường phân giác ngoài của $\angle BAC$ ($L \in BC$). Vẽ tiếp tuyến LH với đường tròn (I) ($H \neq D$ là tiếp điểm).

a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác HAL đi qua tâm I.

b) Chứng minh $\angle BAD = \angle CAH$.

c) AH kéo dài cắt (I) tại K ($K \neq H$). Gọi G là trọng tâm của tam giác KEF. DG cắt EF tại J. Chứng minh rằng $KJ \perp EF$.

d) Gọi S là trung điểm BC, KJ cắt (I) tại R ($R \neq K$). Chứng minh rằng AS, IR, EF đồng quy.

Lời giải. a) Ta có $\angle IAL = \angle IHL = \angle IDL = 90^\circ$ nên A, L, D, H, I cùng nằm trên đường tròn đường kính LI. Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác HAL đi qua I.

b) Xét đường tròn (HAL), do $IH = ID$ nên AI là đường phân giác của $\angle DAH$. Mà AI cũng là đường phân giác của $\angle BAC$ nên ta có điều phải chứng minh.

c) Ta có: $\angle KDC = \angle KHD = \angle ALB$.
Suy ra $DK \parallel AL$ mà $AL \parallel EF$ (cùng vuông góc IA), nên $DK \parallel EF$.
Gọi V, N lần lượt là trung điểm KE, EF.
Do $DK \parallel NJ$ nên theo định lý Talet, ta có

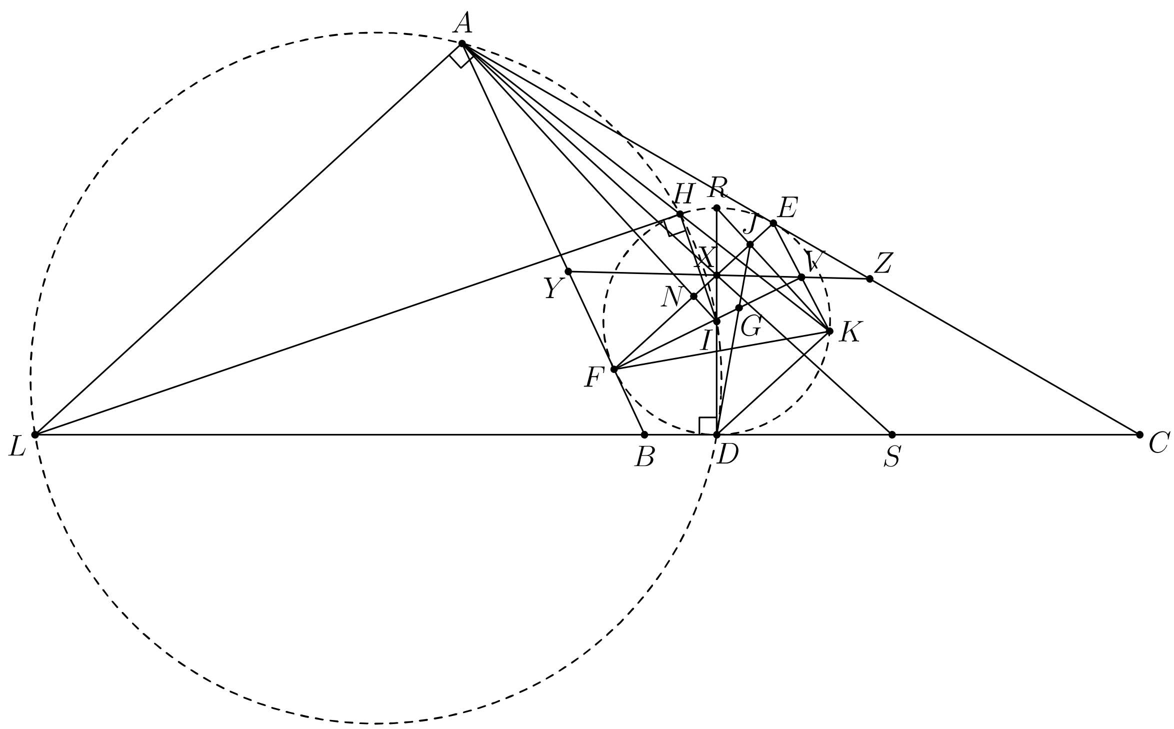
$$\frac{DG}{GJ} = \frac{KG}{GN} = 2 = \frac{FG}{GV}.$$

Suy ra $DF \parallel JV$ và $\dfrac{DF}{JV} = \dfrac{DG}{GJ} = 2$.
Từ đó, $JV = \dfrac{DF}{2} = \dfrac{EK}{2}$.
Do đó, tam giác JKE vuông tại J.
Vậy $KJ \perp EF$.

d) Do $DK \parallel EF$ mà $KR \perp EF$ nên $DK \perp KR$. Từ đó, ta có DR là đường kính của (I).
Gọi DR cắt EF tại X, qua X vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại Y, Z. Ta chứng minh A, X, S thẳng hàng bằng cách chứng minh X là trung điểm YZ.
Thật vậy, các tứ giác $IXYF$ và $IXEZ$ nội tiếp nên ta có

$$\angle YIX = \angle XFY = \angle EFA = \angle AEF = \angle XIZ.$$

Do đó, IX là phân giác của $\angle YIZ$.
Mặt khác, IX là đường cao trong tam giác IYZ nên tam giác IYZ cân tại I.
Do đó X là trung điểm YZ. Suy ra A, X, S thẳng hàng.


A
H
R
E
J
X
V
Z
Y
N
G
K
I
F
L
B
D
S
C

□