SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
Năm học 2022 - 2023
Môn thi: TOÁN CHUYÊN
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

————————

Bài 1. *(1,0 điểm)*
Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$.
Tính giá trị của biểu thức $M = \left(x + \sqrt{1+y^2}\right)\left(y + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Bài 2. *(2,5 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{x+4} + |x| = x^2 - x - 4$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y+z} = 2x - 1 \\ \dfrac{y}{z+x} = 3y - 1 \\ \dfrac{z}{x+y} = 5z - 1 \end{cases}$

Bài 3. *(1,5 điểm)*
Cho hình vuông $ABCD$ Trên các cạnh BC và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\angle MAN = 45°$.

a) Chứng minh MN tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB.

b) Kẻ MP song song với AN (P thuộc đoạn AB) và kẻ NQ song song với AM (Q thuộc đoạn AD). Chứng minh $AP = AQ$.

Bài 4. *(2,0 điểm)*
Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$.

a) Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq 3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a}{b^2+1} + \dfrac{b}{c^2+1} + \dfrac{c}{a^2+1}$.

Bài 5. *(2,0 điểm)*
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại I. Đường thẳng qua A vuông góc với IH tại K và cắt BC tại M.

a) Chứng minh tứ giác $IFKC$ nội tiếp và $\dfrac{BI}{BD} = \dfrac{CI}{CD}$.

b) Chứng minh M là trung điểm của BC.

Bài 6. *(1,0 điểm)*
Số nguyên dương n được gọi là "số tốt" nếu $n + 1$ và $8n + 1$ đều là các số chính phương.

a) Hãy chỉ ra ví dụ ba "số tốt" lần lượt có 1, 2, 3 chữ số.

b) Tìm các số nguyên k thỏa mãn $|k| \leq 10$ và $4n + k$ là hợp số với mọi n là "số tốt".

– HẾT –

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
Năm học 2022 - 2023
Môn thi: TOÁN CHUYÊN
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

LỜI GIẢI

Thực hiện bởi nhóm giáo viên và trợ giảng trung tâm STAREDUCATION:
LÊ ĐÌNH HẢI - NGUYỄN TIẾN HOÀNG - VÕ HOÀNG THÀNH - NGUYỄN THÁI HƯNG - NGUYỄN THỦY TIÊN

Bài 1

Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$.
Tính giá trị của biểu thức $M=\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Lời giải: Điều kiện: $xy \le 1$. Biến đổi giả thiết

$$\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1-xy \Leftrightarrow (1+x^2)(1+y^2)=(1-xy)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2=0 \Leftrightarrow y=-x.$$

Thay vào biểu thức M ta được

$$\begin{aligned} M &= \left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right) \\ &= \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ &= \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - x^2 = 1. \end{aligned}$$

Bài 2

1. Giải phương trình $\sqrt{x+4}+|x|=x^2-x-4$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y+z}=2x-1 \\ \dfrac{y}{z+x}=3y-1 \\ \dfrac{z}{x+y}=5z-1 \end{cases}$

Lời giải:

a) Điều kiện: $\begin{cases} x+4\ge 0 \\ x^2-x-4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le x\le \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \\ x\ge \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho tương đương

$$x^2-\sqrt{x+4}-|x|-(x+4)=0 \Leftrightarrow (|x|+\sqrt{x+4})(|x|-\sqrt{x+4}-1)=0 \Leftrightarrow |x|-1=\sqrt{x+4} \quad (1)$$

- Nếu $x \geq 0$, $(1) \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x+4}$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x &= \dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \text{ (Nhận)} \\ x &= \dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \text{ (Loại)} \end{array}\right. .$$

- Nếu $x < 0$, $(1) \Rightarrow -x - 1 = \sqrt{x+4}$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x &= \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \text{ (Loại)} \\ x &= \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \text{ (Nhận)} \end{array}\right. .$$

Thử lại, ta được $x = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$ và $x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

b) Điều kiện: $(x+y)(y+z)(z+x) \neq 0$. Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+z} + 1 = 2x \\ \dfrac{y}{z+x} + 1 = 3y \\ \dfrac{z}{x+y} + 1 = 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y+z}{y+z} = 2x \\ \dfrac{x+y+z}{z+x} = 3y \\ \dfrac{x+y+z}{x+y} = 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 2x(y+z) \quad (*) \\ x+y+z = 3y(z+x) \\ x+y+z = 5z(x+y) \end{cases} .$$

Dễ thấy $xyz \neq 0$. Từ trên suy ra

$$2x(y+z) = 3y(z+x) = 5z(x+y) \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) = 5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Ta tính được $\dfrac{1}{z} = \dfrac{19}{x}, \dfrac{1}{y} = \dfrac{11}{x} \Rightarrow x = 11y = 19z$. Thay lại vào phương trình $(*)$ ta được

$$x + \frac{x}{11} + \frac{x}{19} = 2x\left(\frac{x}{11} + \frac{x}{19}\right) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{19} = 2\left(\frac{x}{11} + \frac{x}{19}\right) \Leftrightarrow x = \frac{239}{60}.$$

Suy ra $y = \dfrac{239}{660}, z = \dfrac{239}{1140}$.

Vậy nghiệm duy nhất của hệ là $(x, y, z) = \left(\dfrac{239}{60}, \dfrac{239}{660}, \dfrac{239}{1140}\right)$.

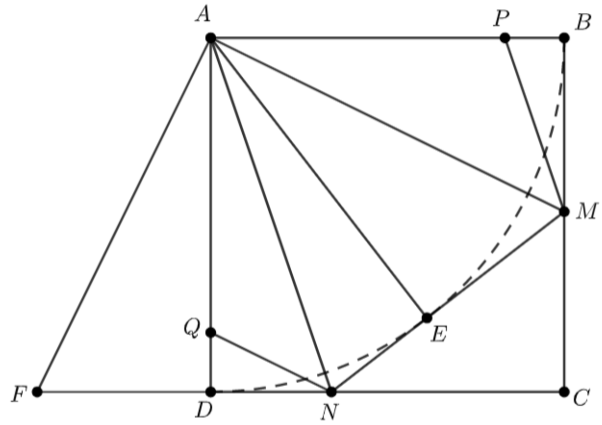
Bài 3

Cho hình vuông $ABCD$ Trên các cạnh BC và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\angle MAN = 45^\circ$.

a) Chứng minh MN tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB.

b) Kẻ MP song song với AN (P thuộc đoạn AB) và kẻ NQ song song với AM (Q thuộc đoạn AD). Chứng minh $AP = AQ$.

Lời giải:



a) Trên tia đối của tia DC lấy F sao cho $DF = BM$.

Xét $\triangle ADF$ và $\triangle ABM$ có $AD = AB$, $\angle ADF = \angle ABM = 90^\circ$ và $DF = BM$.

Do đó $\triangle ADF = \triangle ABM$ (c-g-c)

$\Rightarrow \angle DAF = \angle BAM$ và $AF = AM$.

Suy ra $\angle DAF + \angle DAN = \angle BAM + \angle DAN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

$\Rightarrow \angle NAF = 45^\circ = \angle NAM$, mà $AF = AM$ nên $\triangle NAF = \triangle NAM$. (c-g-c)

Kẻ $AE \perp MN$ $(E \in MN) \Rightarrow AE = AD = AB \Rightarrow MN$ tiếp xúc với (A, AB).

b) Ta có: $\triangle NAF = \triangle NAM \Rightarrow \angle ANF = \angle ANM$, mà $\angle ANF = \angle NAP$ (do $DC \parallel AB$), dẫn đến $\angle ANM = \angle NAP$.

Từ $AN \parallel MP \Rightarrow APMN$ là hình thang, kết hợp với $\angle ANM = \angle NAP$, ta được $APMN$ là hình thang cân.

Do đó $AP = MN$, tương tự ta cũng có $AQ = MN$, dẫn đến $AP = AQ$.

Bài 4

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$.

a) Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq 3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a}{b^2+1} + \dfrac{b}{c^2+1} + \dfrac{c}{a^2+1}$.

Lời giải:

a) Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$ nên

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} 9 = (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &\geq ab + bc + ca + 2(ab + bc + ca) = 3(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Do đó $ab + bc + ca \leq 3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b^2+1} - a &= \frac{-ab^2}{b^2+1} \geq -\frac{ab^2}{2b} = -\frac{ab}{2} \\
\frac{b}{c^2+1} - b &= \frac{-bc^2}{c^2+1} \geq -\frac{bc^2}{2c} = -\frac{bc}{2} \\
\frac{c}{a^2+1} - c &= \frac{-ca^2}{a^2+1} \geq -\frac{ca^2}{2a} = -\frac{ca}{2}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c^2}{a^2+1} - (a+b+c) \geq -\frac{ab+bc+ca}{2} \geq -\frac{3}{2} \\
\Rightarrow\ &\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq -\frac{3}{2} + a + b + c = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

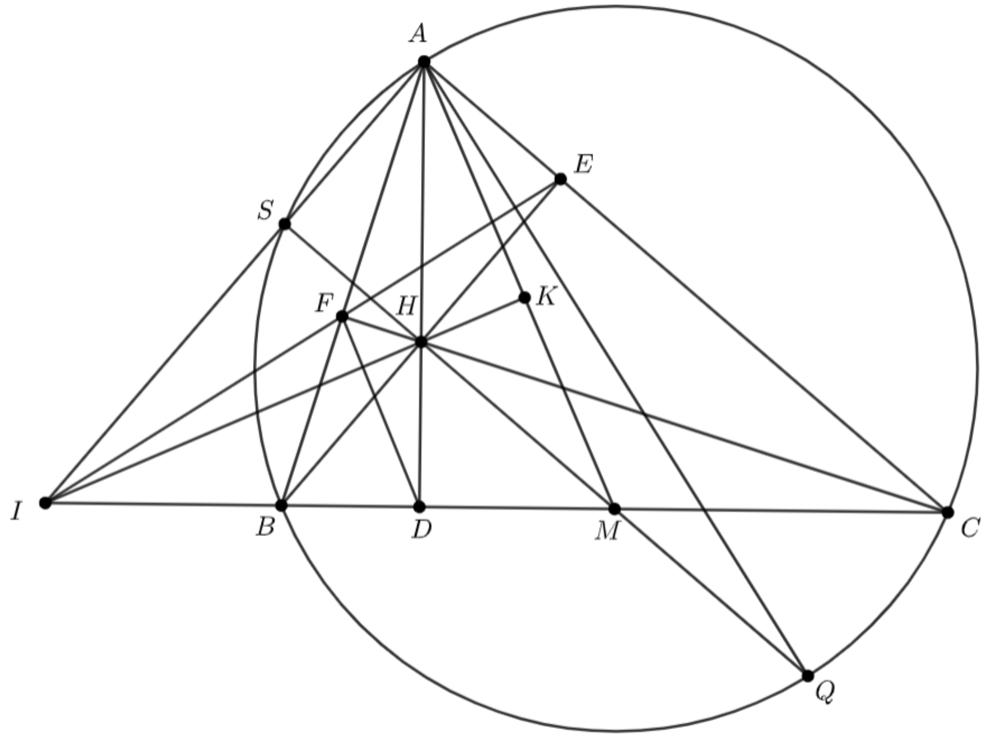
Bài 5

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại I. Đường thẳng qua A vuông góc với IH tại K và cắt BC tại M.

a) Chứng minh tứ giác $IFKC$ nội tiếp và $\frac{BI}{BD} = \frac{CI}{CD}$.

b) Chứng minh M là trung điểm của BC.

Lời giải:



Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$
a) Ta có: Các tứ giác $AFDC, AKDI, BFEC, AFHE$ nội tiếp.
$\Rightarrow HF.HC = HD.HA = HK.HI \Rightarrow IFKC$ nội tiếp.
Mặt khác: $\widehat{IFB} = \widehat{ACB} = \widehat{BFD}$ (do các tứ giác $BFEC, AFDC$ nội tiếp)
$\Rightarrow FB$ là phân giác $\widehat{IFD}$.
Mà $FB \perp FC$ nên FB là phân giác trong, FC là phân giác ngoài $\triangle IFD$
$\Rightarrow \dfrac{BI}{BD} = \dfrac{CI}{CD}$.
b) Gọi S là giao điểm thứ hai của IA và đường tròn ngoại tiếp O.
Ta chứng minh được $IF.IE = IB.IC = IS.IA$
$\Rightarrow ASFE$ nội tiếp hay 5 điểm A, S, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH
$\Rightarrow \widehat{ASH} = \widehat{AFH} = 90^0$
Mặt khác do: $IK \perp AM$, $AD \perp IM$ nên H là trực tâm $\triangle AIM \Rightarrow MH \perp AI$.
Từ đó, ta có: S, H, M thẳng hàng.
Vẽ đường kính AQ của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
Ta có $\widehat{ASQ} = 90^0$ nên S, H, M, Q thẳng hàng
Xét tứ giác $BHCQ$ có: $BH//CQ$ (cùng $\perp AC$) và $CH//BQ$ (cùng $\perp AB$)
Nên $BHCQ$ là hình bình hành nghĩa là có M là trung điểm BC.

Bài 6

Số nguyên dương n được gọi là "số tốt" nếu $n+1$ và $8n+1$ đều là các số chính phương.

a) Hãy chỉ ra ví dụ ba "số tốt" lần lượt có 1, 2, 3 chữ số.

b) Tìm các số nguyên k thỏa mãn $|k| \leq 10$ và $4n+k$ là hợp số với mọi n là "số tốt".

Lời giải:

a) Ví dụ: 3 ($3+1 = 2^2$ và $8 \cdot 3 + 1 = 5^2$), 15 ($15 + 1 = 4^2$ và $8 \cdot 15 + 1 = 11^2$) và 120 ($120 + 1 = 11^2$ và $8 \cdot 120 + 1 = 31^2$).

b) Nhận xét $a^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$ với mọi $a \in \mathbb{N}$.

Đặt $n + 1 = x^2$ và $8n + 1 = y^2$ $(x, y \in \mathbb{N})$.

- Nếu $n \equiv 1 \pmod 3$ thì $x^2 = n + 1 \equiv 2 \pmod 3$, vô lí.
- Nếu $n \equiv 2 \pmod 3$ thì $y^2 = 8n + 1 \equiv 17 \equiv 2 \pmod 3$, vô lí.

Vậy $n \equiv 0 \pmod 3$ hay n chia hết cho 3.

Nếu $k = 1, 5, 7, -5, -7$ thì với $n = 3$ (là số tốt), $4n + k$ nhận các giá trị $13, 17, 19, 7, 5$ là các số nguyên tố. (Loại)

Nếu $k = -1$, với $n = 15$ (là số tốt) thì $4n + k = 59$ là số nguyên tố. (Loại)

Nếu $k = -10$, với $n = 3$ thì $4n + k = 2$ là số nguyên tố. (Loại)

Nếu $k = -9$, với $n = 3$ thì $4n + k = 3$ là số nguyên tố. (Loại)

Nếu $k \geq -8$, k chẵn hoặc k chia hết cho 3 thì $4n + k \geq 4 \cdot 3 - 8 = 4$ và $4n + k$ có ước là 2 hoặc 3, do đó $4n + k$ là hợp số.

Vậy các giá trị cần tìm của k là

$$k \in \{-8, -6, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}.$$

– HẾT –