Thời gian làm bài 150 phút

1 Đề bài

Bài 1. (**1 điểm**) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+y+\dfrac{x+2y}{xy}=6 \\ x^2+y^2+\dfrac{x^2+4y^2}{(xy)^2}=14 \end{cases}$

Lời giải bài 1.

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x}=6 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{4}{x^2}=14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}+y+\dfrac{1}{y}=6 \\ \left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=20 \end{cases}$$

Đặt $x+\dfrac{2}{x}=a, y+\dfrac{1}{y}=b$ Ta có hệ $\begin{cases} a+b=6 \\ a^2+b^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ (a-b)^2=2\left(a^2+b^2\right)-(a+b)^2=4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ \left[\begin{array}{l} a-b=2 \\ a-b=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4, b=2 \\ a=2, b=4 \end{array}\right.$$

$a=4, b=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=4 \\ y+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+2=0 \\ y^2-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\pm\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases} \quad \text{(TMĐK)}$$

$a=2, b=4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=2 \\ y+\dfrac{1}{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+2=0 \\ y^2-4y+1=0 \end{cases} \quad \text{(vô nghiem)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$$(x, y)\{(2+\sqrt{2}; 1),(2-\sqrt{2}; 1)\}$$

Bài 2. (**1,5 điểm**) Cho phương trình $\sqrt{x^2-(2m+1)x+m^2+m}=2x-2m$

a) Giải phương trình khi $m=2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Lời giải bài 2.

a) Với $m=2$, (1) trở thành $\sqrt{x^2-5x+6}=2x-4$.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x^2-5x+6\geq 0 \\ 2x-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ x\geq 3 \\ x\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x\geq 3 \end{array}\right.$.

Rõ ràng $x=2$ là nghiệm của (1).

Với $x\geq 3,(1)$ tương đương với $\begin{cases} x\geq 3 \\ \sqrt{(x-2)(x-3)}=2(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ \sqrt{x-3}=2\sqrt{x-2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x-3=4(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x=\dfrac{5}{3} \end{cases}$. (Loại)

Vậy (1) chỉ có nghiệm $x=2$ khi $m=2$.

b) Ta viết lại (1) như sau

$$\sqrt{(x-m)(x-m-1)}=2(x-m)$$

Điều kiện xác định $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq m \\ x\geq m+1 \end{array}\right. \\ x\geq m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x\geq m+1 \end{array}\right.$. Rõ ràng $x=m$ là nghiệm của (2).

Với $x\geq m+1,(2)$ tương đương với

$$\begin{cases} x\geq m+1 \\ \sqrt{x-m-1}=2\sqrt{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq m+1 \\ x-m-1=4(x-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq m+1 \\ x=\dfrac{3m-1}{3} \end{cases}$$

Nếu (1) có 2 nghiệm phân biệt thì $\dfrac{3m-1}{3}\geq m+1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\geq 1$ (Vô lí). Vậy (1) chỉ có đúng một nghiệm $x=m$, do đó không tồn tại $m\in\mathbb{R}$ sao cho (1) có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3. (**1 điểm**) Cho $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m+2)x-2m$.

a) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$.

b) Tìm m để $x_1+2y_2=7$.

Lời giải bài 3.

a) Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2-(m+2)x+2m=0$$

$\Delta=(m+2)^2-8m=(m-2)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 2$.

b) Khi đó phương trình có nghiệm $x=2, x=m$.

- TH1: $x_1=2, x_2=m$ suy ra $y_1=4, y_2=m^2$. Ta có $2+2m^2=7$ giải ra được $m=\sqrt{2,5}, m=-\sqrt{2,5}$.

- TH2: $x_1 = m, x_2 = 2$, suy ra $y_1 = m^2, y_2 = 4$. Ta có $m + 2.4 = 7 \Leftrightarrow m = -1$.

c) Vậy có 3 giá trị m thỏa đề bài $m = \sqrt{2,5}, m = -\sqrt{2,5}, m = -1$.

Bài 4. (**1,5 điểm**) Cho các số thực không âm x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn:

$$(x+z)(y+z) = 1$$

a) Chứng minh $xyz(x+y+z) \leq \dfrac{1}{4}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(y+z)^2}$$

Lời giải bài 4. Từ giả thiết ta có $z^2 + zx + zy + xy = 1$.

a) $xyz(x+y+z) = xy(z^2 + zx + zy) \leq \dfrac{1}{4}(xy + z^2 + zx + zy)^2 = \dfrac{1}{4}$.

b) Đặt $a = x + z, b = y + z$ khi đó $ab = 1$ và $a - b = x - y$. Vậy $P = \dfrac{1}{(a-b)^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$. Ta có hệ thức sau: $\left(\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^2 = P + 2\left(\dfrac{1}{a(a-b)} - \dfrac{1}{b(a-b)} - \dfrac{1}{ab}\right) = P - 4$. Từ đó ta tìm được $P \geq 4$, tìm thêm dấu bằng xảy ra.

Bài 5. (**3 điểm**) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định, A, B cố định, C thay đổi trên cung lớn AB. Gọi K là trung điểm AB; D và E là hình chiếu của K trên CA, CB.

a) Chứng minh $\dfrac{KD}{KE} = \dfrac{BC}{AC}$ và tìm vị trí của C để DE lớn nhất.

b) DE cắt AB và CO tại N, M. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN đi qua một điểm cố định.

c) (CDE) và (O) cắt nhau tại F khác A. NF cắt (CDE) tại G. Chứng minh G thuộc một đường thẳng cố định.

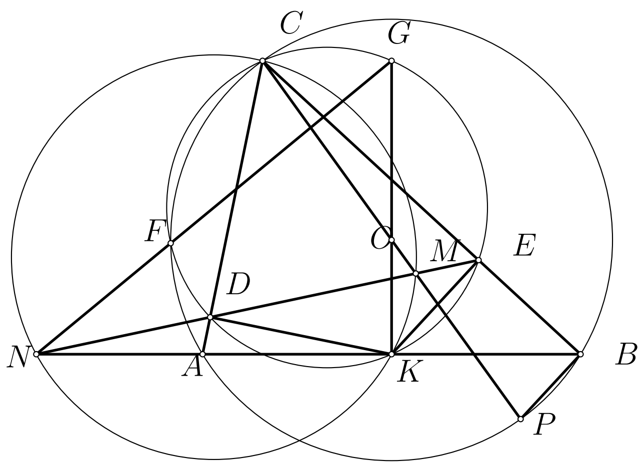
Kí hiệu (CDE) là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

Lời giải bài 5.

a) Chứng minh được $DE = KC.sin\angle ACB$. Do đó DE lớn nhất khi KC lớn nhất hay C là điểm chính giữa cung lớn AB.

b) Xét trường hợp $AC < BC$ (trường hợp còn lại chứng minh tương tự).
Vẽ đường kính AP. Ta có $\angle AKD + \angle CAB = 90^o = \angle PCB + \angle APB$.
Mà $\angle CAB = \angle APB$, suy ra $\angle AKD = \angle PCB$.
Mặt khác $\angle DNK + \angle AKD = \angle EDK = \angle KCB = \angle PCB + \angle KCM$
Suy ra $\angle DNK = \angle KCM$. Nên tứ giác $CNKM$ nội tiếp. Vậy (CMN) qua điểm K cố định.

c) Ta có $\angle NAF = \angle FCB = \angle FDN$. Suy ra $ANFD$ nội tiếp.
Suy ra $\angle GNA = \angle FDC = \angle FKC$.
Mặt khác $\angle NGK = \angle FCK$. Do đó $\angle GNA + \angle NGK = \angle FKC + \angle FCK = 90^o$. Suy ra $\angle GKN = 90^o$ hay $GK \perp AB$. Vậy G thuộc trung trực của AB là đường thẳng cố định



Bài 6. (**2 điểm**)

a) Tìm tất cả các giá trị của n nguyên dương để $25^n + 7^n + 1$ chia hết cho 9.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |25^n - 7^m - 3^m|$ trong đó n, m là số nguyên dương.

Lời giải bài 6.

a) Nhận xét: $25^3 \equiv 7^3 \equiv 1(\text{mod}9)$. Áp dụng nhận xét, ta xét các trường hợp sau:

- Với $n = 3k\,(k \in \mathbb{Z}^+)$, ta có
$$25^n + 7^n + 1 \equiv 3(\text{mod}9)$$
Do đó $25^n + 7^n + 1$ không chia hết cho 9 khi $n = 3k$.

- Với $n = 3k + 1(k \in \mathbb{N})$, ta có
$$25^n + 7^n + 1 \equiv 25 + 7 + 1 \equiv 32 \equiv 5(\text{mod}9)$$
Do đó $25^n + 7^n + 1$ không chia hết cho 9 khi $n = 3k + 1$.

- Với $n = 3k + 2, (k \in \mathbb{N})$, ta có
$$25^n + 7^n + 1 \equiv 25^2 + 7^2 + 1 \equiv 0(\text{mod}9)$$
Do đó $25^n + 7^n + 1 \vdots 9$ khi $n = 3k + 2$. Vậy $25^n + 7^n + 1$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi $n = 3k + 2$ (k là số tự nhiên).

b) Đặt $a = 25^n - 7^m - 3^m$ là số lẻ, nên $|a| \neq 0$.

Vì $25 \equiv 1(\text{mod}3)$ và $7 \equiv 1(\text{mod}3)$ nên $25^n - 7^m \equiv 0(\text{mod}3)$.

- Với m lẻ, ta có:
$$7^m + 3^m \equiv 2^m + (-2)^m \equiv 0(\text{mod}5)$$
Suy ra $a = 25^n - 7^m - 3^m$ chia hết cho 5 và 3 $\Rightarrow a \vdots 15 \Rightarrow A \geqslant 15$

Với $m = n = 1$, ta có $A = |25 - 7 - 3|$.

- Với m chẵn. Đặt $m = 2k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$, ta có:

$$\begin{aligned} 7^m + 3^m = 7^{2k} + 3^{2k} &\equiv \left((-3)^{2k} + 3^{2k}\right) (\bmod 10) \\ &\equiv 2 \cdot 9^k (\bmod 10) \equiv \pm 2 (\bmod 10) \equiv 2 \text{ hoặc } 8 (\bmod 10) \end{aligned}$$

  Do đó, chữ số tận cùng của $A = |25^n - 7^m - 3^m|$ là 3 hoặc 7.

  Vì A chia hết cho 3 nên $a \neq 7, 13$.

  Mà $25^n - 7^m - 3^m \equiv 1 - (-1)^m - (-1)^m \equiv -1 (\bmod 8)$ nên $A \neq 3$

  Suy ra, với m chẵn thì $A > 15$

Vậy GTNN của A là 15 khi $m = n = 1$.

HẾT