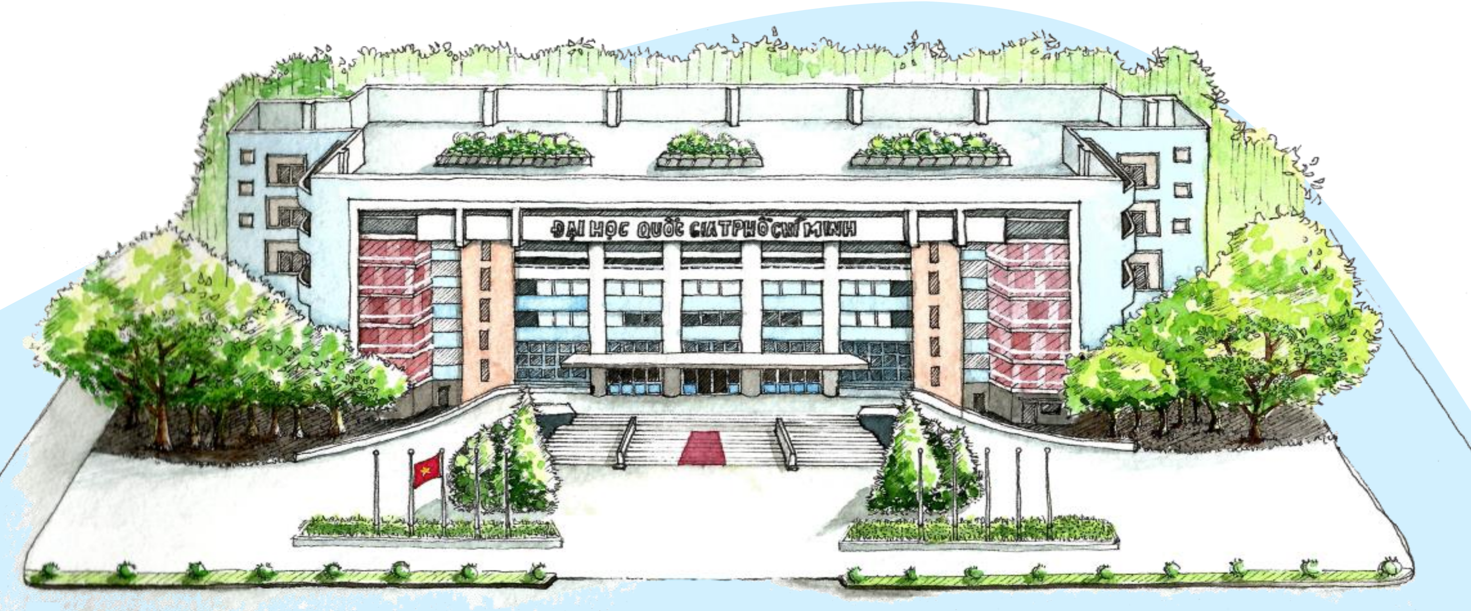
ĐẠI HỌC QUỐC GIA
TP. HỒ CHÍ MINH

Định lý Cosin và Định lý Sin trong tam giác

Giáo viên: Nguyễn Tăng Vũ

Tổ Toán trường Phổ thông Năng khiếu – Đại học Quốc gia TPHCM



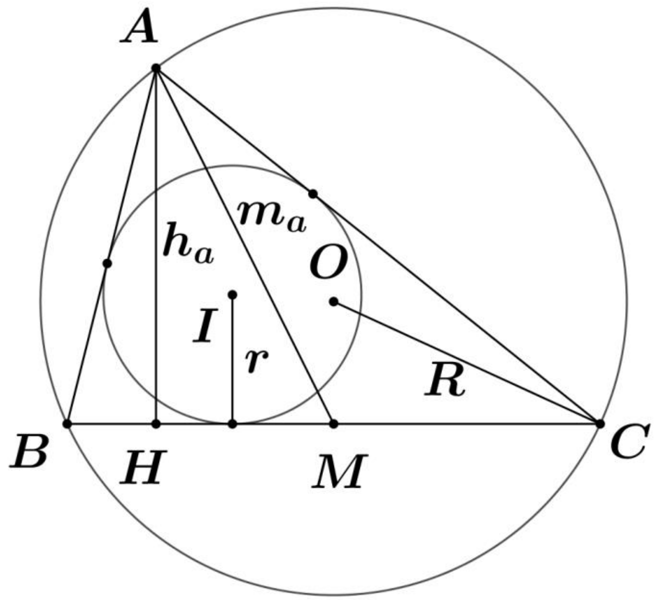
Mục tiêu bài học

- Hiểu được nội dung định lý cosin trong tam giác và các hệ quả.
- Hiểu được nội dung định lý sin và các hệ quả.
- Biết vận dụng định lý và hệ quả để tính các yếu tố hình học dựa trên các yếu tố đã biết.

Một số kí hiệu thường dùng

Cho tam giác ABC, khi đó

- $a = BC, b = AC, c = AB$
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác ABC.
- $S = S_{ABC}$ diện tích tam giác ABC.
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC
- m_a, m_b, m_c độ dài đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C.
- h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao xuất phát từ A, B, C.



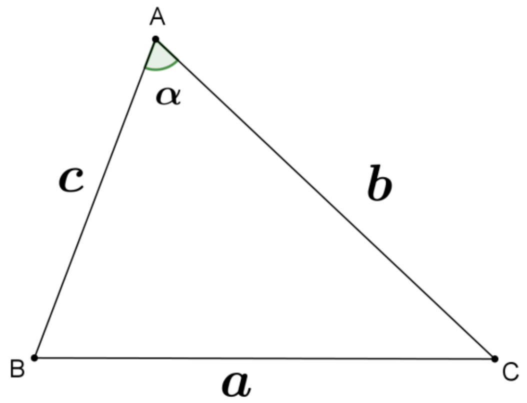
ĐỊNH LÝ COSIN

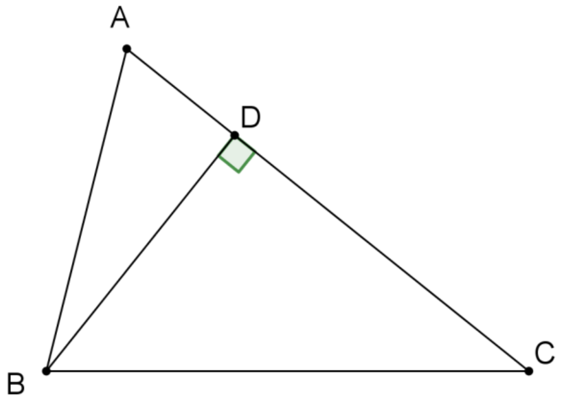
Định lý Cosin. Cho tam giác ABC
Khi đó ta có:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Hệ quả. Cho tam giác ABC

- $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
- $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$
- $\cos C = \frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$





Ý nghĩa

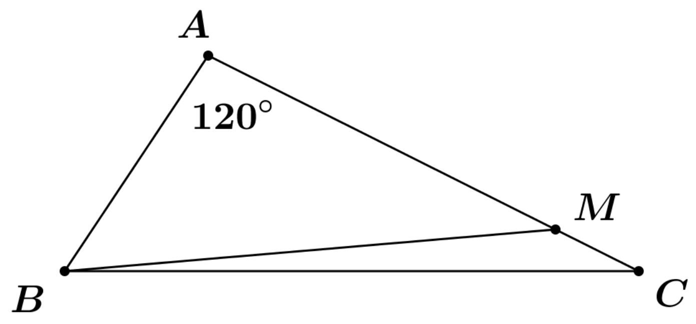
- Tính độ dài của tam giác khi biết độ dài 2 cạnh và góc kề hai cạnh đó.
- Tính số đo góc của tam giác khi biết độ dài 3 cạnh.
- Áp dụng giải tam giác để đo đạc trong thực tế.
- Chứng minh một số đẳng thức hình học khác.

Ví dụ áp dụng định lý Cosin

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 5, \angle A = 120^o$.

a) Tính độ dài cạnh BC;

b) Gọi M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = 4CM$. Tính độ dài đoạn thẳng BM.



Lời giải.

a) Áp dụng định lý Cosin cho tam giác ABC ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Thay số ta có $BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 49$

Do đó $BC = \sqrt{49} = 7$

b) Ta có $\mathrm{AM} = 4\mathrm{CM}$ và $\mathrm{AM} + \mathrm{CM} = \mathrm{AC} = 5$, suy ra $\mathrm{AM} = 4$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABM ta có

$$\mathrm{BM}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AM}^2 - 2\mathrm{AM} \cdot \mathrm{AB} \cdot \cos \mathrm{BAM}$$

Thay số ta có

$$\mathrm{BM}^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos 120^\circ = 37$$

Vậy $\mathrm{BM} = \sqrt{37}$

Câu hỏi gợi ý:

1) Độ dài BC cần tính là cạnh của tam giác nào? Tam giác đã biết được yếu tố nào?
2) Độ dài BM thuộc tam giác nào?

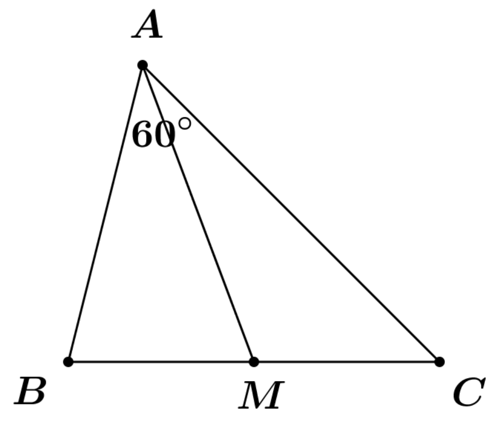
Cần tính thêm yếu tố nào để tính được BM?

Ví dụ áp dụng định lý Cosin

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, BC = \sqrt{13}$

a) Tính số đo các góc A.

b) Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính độ dài AM.



Lời giải.

a) Theo hệ quả định lý cosin, ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB \cdot AC} = \frac{3^2 + 4^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $\angle A = 60^\circ$

b) Theo hệ quả định lý cosin ta có

$$\cos B = \frac{\left(AB^2 + BC^2 - AC^2\right)}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{3^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABM ta có

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos ABM$$

$$= 3^2 + \frac{13}{4} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{37}{4}$$

Suy ra $AM = \frac{\sqrt{37}}{2}$

Câu hỏi gợi ý:

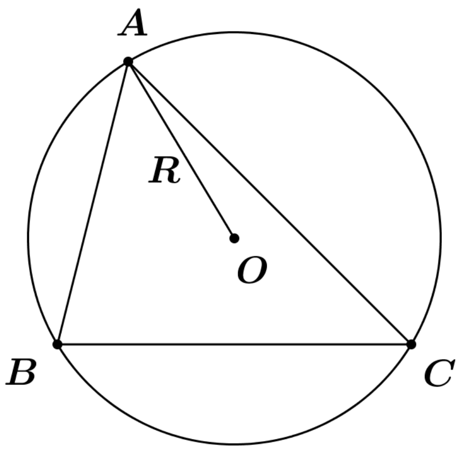
a) Góc A trong tam giác nào, có yếu tố gì? Sử dụng công thức nào để tính góc A?

b) Đoạn thẳng AM thuộc tam giác nào? Đã có yếu tố gì? Cần tính thêm yếu tố nào? Tính như thế nào?

Định lý sin

Định lý sin Trong tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$ ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



Trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Hệ quả

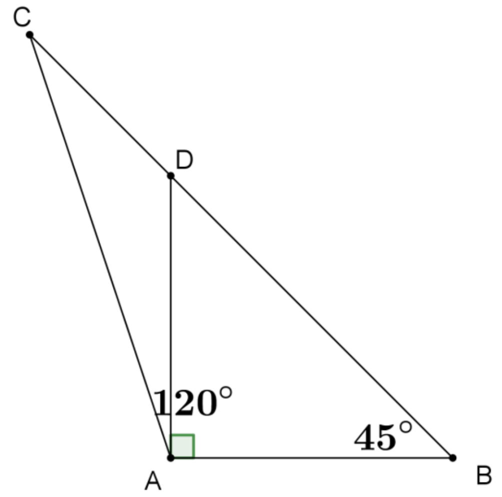
- $a = 2R\sin A\,, b = 2R\sin B\,, c = 2R\sin C$
- $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$
- $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$

Ý nghĩa:

- Nêu lên mối liên hệ giữa cạnh, góc đối diện và bán kính đường tròn ngoại tiếp.
- Tính toán các yếu tố của tam giác khi biết số đo hai góc và một cạnh.
- Chứng minh các đẳng thức hình học khác.

Ví dụ áp dụng định lý sin

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\angle A = 120°, \angle B = 45°, AC = 20.$



a) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và độ dài cạnh BC.

b) Đường thẳng qua A vuông góc AB cắt BC tại D. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Lời giải

a) Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có

$$R = \frac{AC}{2\sin B} = 10\sqrt{2}$$

Từ đó $BC = 2R \cdot \sin BAC = 2 \cdot 10\sqrt{2} \sin 120° = 10\sqrt{6}$

b) Tam giác ABD vuông cân tại A nên $\angle ADB = 45°$, suy ra $\angle ADC = 135°$.

Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD

$$R_{ACD} = \frac{AC}{2\sin ADC} = 10\sqrt{2}$$

Câu hỏi gợi ý

a) Tam giác ABC đã có yếu tố nào? Sử dụng định lý nào để tính R? Khi đó tính BC thế nào?

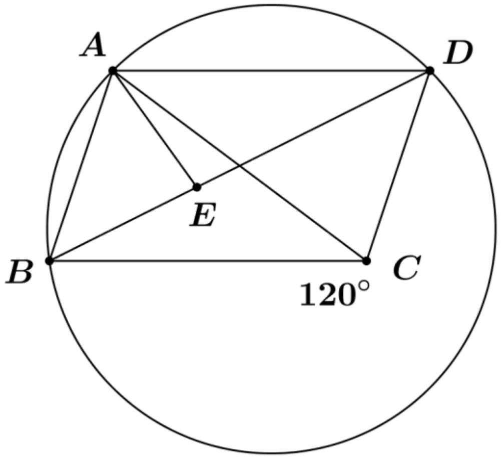
b) Tam giác ACD đã có yếu tố nào? Tính được chưa hay phải tính thêm?

Ví dụ áp dụng định lý sin

Ví dụ 4. Cho hình bình hành ABCD có $AD = 2AB, \angle BCD = 120^\circ$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD bằng $3\sqrt{3}$

a) Tính $\frac{\sin ABD}{\sin ADB}$ và độ dài cạnh BD;

b) Phân giác góc BAD cắt BD tại E. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE.



Lời giải. a) Áp dụng định lý sin cho tam giác ABD ta có: $\frac{\sin ABD}{\sin ADB} = \frac{AD}{AB} = 2$

Ta có $\angle BAD = \angle BCD = 120^\circ$, suy ra $BD = 2R_{ABD} \cdot \sin BAD = 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ = 9$

b) Ta có $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow BE = 3$

Hơn nữa

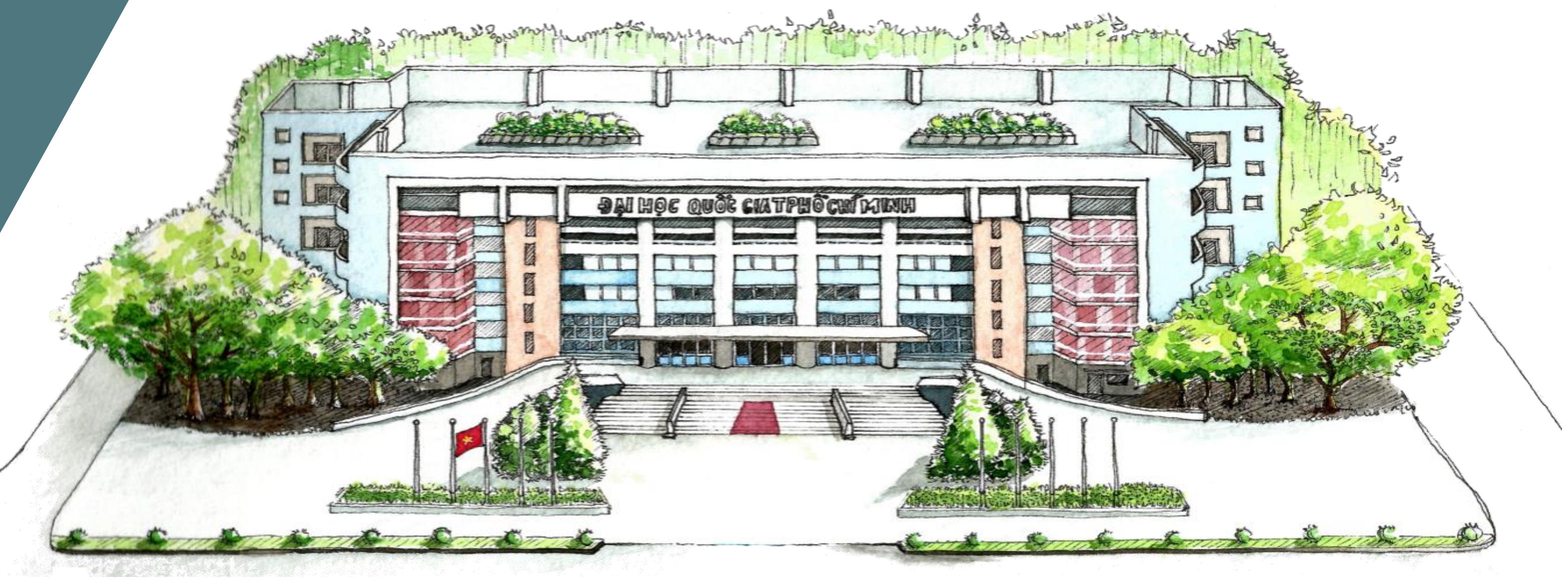
$\angle BAE = 60^\circ \Rightarrow R_{BAE} = \frac{BE}{2\sin BAE} = \frac{3}{2\sin 60^\circ} = \sqrt{3}$

Dặn dò

- Xem lại và ghi nhớ các định lý và hệ quả
- Tự làm lại các ví dụ trong video
- Làm bài tập về nhà kèm theo video để rèn luyện
- Luyện tập và tính toán cẩn thận

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

Tiết học tới đây xin kết thúc
Cảm ơn các bạn đã theo dõi!



vnuhcm.edu.vn