

KIỂM TRA CUỐI KHÓA HỌC KỲ 1

Năm học 2024 - 2025

ĐỀ CHÍNH THỨC**Môn thi: TOÁN CHUYÊN 8**

(Đề thi gồm có 02 trang)

Thời gian: 150 phút

Bài 1 (1 điểm).

a) Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến:

$$P = -2(x - 7)(x + 3) + (5x - 1)(x + 4) - 3x^2 - 27x.$$

b) Thực hiện phép chia đa thức $P(x) = 3x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ cho đa thức $Q(x) = x^3 - 2x + 2$.**Đáp án**a) $P = 38$. (0,5đ)b) $3x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = (x^3 - 2x + 2)(3x^2 - x + 4) - 5x^2 + 14x - 3$. (0,5đ)**Bài 2 (1,5 điểm).** Phân tích các đa thức sau thành nhân tửa) $ab + ac + b^2 + 2bc + c^2$.b) $x^4 + 2x^2 - 3$.c) $(a + 4)(a - 6)(a^2 + a - 6) - 34a^2$.**Đáp án**a) $(b + c)(a + b + c)$. (0,5đ)b) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)$. (0,5đ)

c) Ta có

$$\begin{aligned} (a + 4)(a - 6)(a^2 + a - 6) - 34a^2 &= (a + 4)(a - 6)(a + 3)(a - 2) - 34a^2 \\ &= (a^2 + 7a + 12)(a^2 - 8a + 12) - 34a^2. \end{aligned}$$

Đặt $t = a^2 - 8a + 12$, ta có

$$\begin{aligned} (a + 4)(a - 6)(a^2 + a - 6) - 34a^2 &= t(t + 15a) - 34a^2 = t^2 + 15at - 34a^2 \\ &= (t + 17a)(t - 2a) \\ &= (a^2 + 9a + 12)(a^2 - 10a + 12). (0,5đ) \end{aligned}$$

Bài 3 (2 điểm). Cho hai biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{6-x}{1-x^2} \right) : \frac{2-2x}{x^2-1} \quad \text{và} \quad Q = \frac{x^2+2}{x^3+1} + \frac{x-1}{x^2-x+1} - \frac{x+3}{x^2+4x+3}.$$

- a) Tìm điều kiện xác định của từng biểu thức P và Q .
- b) Rút gọn P và Q .
- c) Tìm các số nguyên x để $\frac{xP}{Q}$ nhận giá trị nguyên.

Đáp án

- a) ĐKXD của P là $x \neq 1$ và $x \neq -1$. ĐKXD của Q là $x \neq -1$ và $x \neq -3$. (0,5đ)
- b) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{6-x}{1-x^2} \right) : \frac{2-2x}{x^2-1} \\ &= \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{6-x}{(x-1)(x+1)} \right) \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{2-2x} \\ &= \frac{-(x+1) + 2(x-1) + 6-x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{2-2x} \\ &= \frac{3}{2-2x}. \text{(0,5đ)} \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} Q &= \frac{x^2+2}{x^3+1} + \frac{x-1}{x^2-x+1} - \frac{x+3}{x^2+4x+3} \\ &= \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{x-1}{x^2-x+1} - \frac{x+3}{(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x^2+2 + (x-1)(x+1) - (x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{x^2+x}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{x}{x^2-x+1}. \text{(0,5đ)} \end{aligned}$$

- c) Ta có

$$\frac{xP}{Q} = \frac{3x}{2-2x} : \frac{x}{x^2-x+1} = -\frac{3x^2-3x+3}{2x-2} \quad (\text{ĐKXD: } x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1, x \neq -3).$$

Nếu $\frac{P}{Q} \in \mathbb{Z}$ thì

$$\frac{2P}{Q} = -\frac{3x^2-3x+3}{x-1} = -3x - \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}.$$

Khi đó $\frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}$, kéo theo $x-1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$ hay $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$. Thử lại ta thấy không có giá trị x nào thỏa mãn $\frac{xP}{Q} \in \mathbb{Z}$. (0,5đ)

Bài 4 (1 điểm). Ban quản lý một công ty may mặc giao nhiệm vụ cho hai tổ A và tổ B phải hoàn thành 810 sản phẩm (đối với tổ A) và 900 sản phẩm (đối với tổ B) trong cùng một thời hạn. Biết rằng mỗi ngày tổ B làm nhiều hơn tổ A 4 sản phẩm.

- a) Gọi x là số sản phẩm mà tổ A hoàn thành được trong một ngày ($x \in \mathbb{N}^*$). Viết các biểu thức (theo x) xác định:
- Số ngày hoàn thành nhiệm vụ của tổ A .
 - Số ngày hoàn thành nhiệm vụ của tổ B .
- b) Thực tế cho thấy, tổ A hoàn thành nhiệm vụ trước thời hạn 3 ngày; trong khi tổ B hoàn thành nhiệm vụ trước thời hạn 6 ngày. Tính số ngày mà mỗi tổ hoàn thành nhiệm vụ.

Đáp án

- a) i) Số ngày mà tổ A hoàn thành nhiệm vụ lần lượt là $\frac{810}{x}$ (sản phẩm). (0,25đ)
 ii) Số ngày mà tổ B hoàn thành nhiệm vụ lần lượt là $\frac{900}{x+4}$ (sản phẩm). (0,25đ)
- b) Gọi x là số sản phẩm mà tổ A hoàn thành được trong một ngày ($x \in \mathbb{N}^*$). Khi đó, ta có

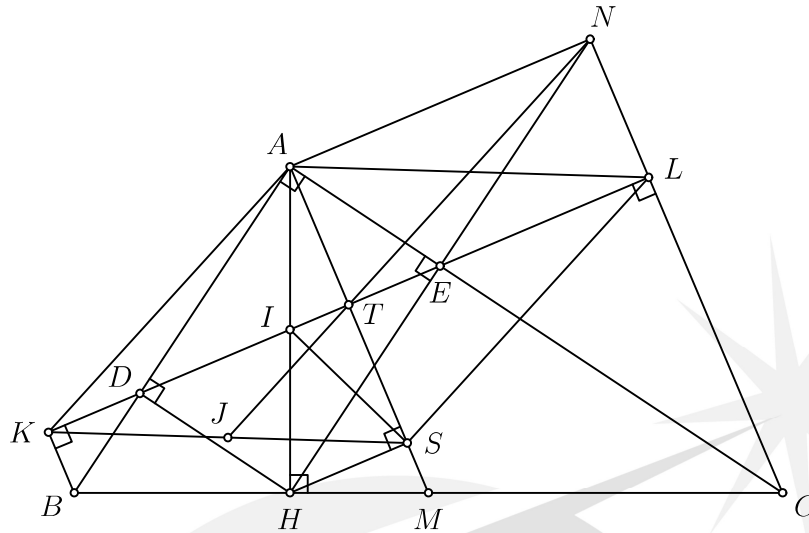
$$\frac{810}{x} - \frac{900}{x+4} = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 20 & (\text{Nhận}) \\ x = -54 & (\text{Loại}) \end{cases}$$

Vậy trong một ngày, tổ A làm được 20 sản phẩm và tổ B làm được 24 sản phẩm. (0,5đ)

Bài 5 (3,5 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB < AC$ và đường cao AH ($H \in BC$). Gọi D và E theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB và AC .

- Giả sử $AB = 5$, $AC = 12$. Chứng minh $ADHE$ là hình chữ nhật. Tính độ dài cạnh DE .
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng DE vuông góc với AM tại T .
- Gọi K và L theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường thẳng DE . Vẽ HS vuông góc với AM tại S . Chứng minh $AKSL$ là hình thoi. Tính \widehat{DSE} .
- Gọi J là trung điểm của KS . Chứng minh rằng JT , HE và CL cùng đi qua một điểm.

Đáp án



- a) Chứng minh $ADHE$ là hình chữ nhật. (0,5 điểm) $DE = \frac{60}{13}$ (0,5đ).
- b) Gọi I là tâm hình chữ nhật $ADHE$.
Ta có: $90^\circ = \angle ABC + \angle ACB = \angle AED + \angle MAC$. Từ đó thu được $AM \perp DE$. (1đ)
- c) MT là đường trung bình của hình thang $BCLK$ nên T là trung điểm của KL .
Tam giác AHS vuông tại S có trung tuyến SI nên $SI = \frac{AH}{2} = AI$, vì vậy T là trung điểm của AS . Tứ giác $AKSL$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và vuông góc nên là hình thoi. (0,5đ)
Mặt khác, $SI = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}DE$ nên tam giác DSE vuông tại S , dẫn đến $\angle DSE = 90^\circ$. (0,5đ)
- d) Gọi giao điểm của HE và CL là N .
Nhận thấy $\angle ACM = \angle MAC = \angle ACN$ nên CA là tia phân giác $\angle HCN$.
Tam giác HCN có CE là đường cao đồng thời là tia phân giác nên cân tại C , nên H và N đối xứng với nhau qua AC .
Suy ra $\angle ANC = 90^\circ$, suy ra $ANLT$ là một hình chữ nhật, nên đường chéo NT đi qua trung điểm của AL và KS .
Vì vậy JT, HE và CL cùng đi qua N . (0,5đ)

Bài 6 (1 điểm).

- a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = a + b + c$. Chứng minh rằng $a = b = c$.
- b) Tìm đa thức dư khi chia $(x - 3)^{2025} + (x - 2)^{2024} - 1$ cho $x^2 - 5x + 6$.

Đáp án

- a) Ta có

$$\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} - 2b\right) + \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - 2c\right) + \left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - 2a\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{b(a-c)^2}{ca} + \frac{c(a-b)^2}{ab} + \frac{a(b-c)^2}{bc} = 0. (0,5đ)$$

Do đó $a = b = c$.

b) Đặt $(x - 3)^{2025} + (x - 2)^{2024} - 1 = (x^2 - 5x + 6)Q(x) + R(x)$.

Vì bậc của $x^2 - 5x + 6$ là bậc 2 nên $R(x) = ax + b$. Lần lượt thay $x = 2$ và $x = 3$, ta được

$$\begin{cases} 0 = 3a + b \\ -2 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases} .$$

Vậy đa thức dư là $R(x) = 2x - 6$. (0,5đ)

— HẾT —

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Nộp lại đề thi và giấy làm bài.