KIỂM TRA CUỐI KHÓA HỌC KỲ 1

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

Năm học 2024 - 2025

Môn thi: TOÁN CHUYÊN 9

Thời gian: 150 phút

Bài 1 (1,5 điểm). Cho biểu thức $P = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x}} + \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Đáp án

a) Rút gọn biểu thức.

$$\begin{aligned} P &= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x} \\ &= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x\left(\sqrt{x}+1\right)} \\ &= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} \quad \textbf{(0,75đ)}. \end{aligned}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

$$\begin{aligned} P &= 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 2 \geq 2\sqrt{2\sqrt{x}\cdot\frac{3}{\sqrt{x}}} + 2 \\ &= 2\sqrt{6} + 2 \quad \textbf{(0,5đ)} \end{aligned}$$

Vậy GTNN của $P = 2\sqrt{6}+2$ khi và chỉ khi $2\sqrt{x} = \dfrac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ (thỏa điều kiện) **(0,25đ)**

Bài 2 (1,5 điểm). Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x+1} = 2x-1$

b) $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2(x+1)$

c) $x^2+5x-14 = 2(x+2)\sqrt{x-2}$

Đáp án

a) Phương trình đã cho tương đương: $x+1 = (2x-1)^2$ $\left(\textbf{với } x \geq \dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ (loại) hoặc $x = \dfrac{5}{4}$ (nhận)

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{5}{4}$. **(0,5đ)**

b) Phương trình đã cho suy ra:
$\sqrt{(x+1)(2x+6)}+\sqrt{(x-1)(x+1)}=2(x+1)$
$\Rightarrow \sqrt{x+1}\left(\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+1}\right)=0$
$\Rightarrow x=-1$ hoặc $\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+1}$
Giải: $\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+1}$
$\Rightarrow 3x+5+2\sqrt{2x^2+4x-6}=4x+4$
$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+4x-6}=x-1$
$\Rightarrow 8x^2+16x-24=x^2-2x+1$
$\Rightarrow 7x^2+18x-25=0$
$\Rightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{-25}{7}$
Thử lại, ta nhận các nghiệm $x=1$ và $x=-1$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=1$ và $x=-1$. **(0,5đ)**

c) Điều kiện: $x\geq 2$
Phương trình đã cho tương đương:
$(x+2)^2-2(x+2)\sqrt{x-2}+x-2=16$
$\Leftrightarrow \left(x+2-\sqrt{x-2}\right)^2=16$
$\Leftrightarrow x+2-\sqrt{x-2}=4 \quad (1)$ hoặc $x+2-\sqrt{x-2}=-4 \quad (2)$
Giải (1):
(1) $\Leftrightarrow x-2=\sqrt{x-2}$
$\Leftrightarrow x=2$ (nhận) hoặc $x=3$ (nhận)
Giải (2):
(2) $\Leftrightarrow x+6=\sqrt{x-2}$
$\Leftrightarrow x^2+12x+36=x-2$
$\Leftrightarrow x^2+11x+38=0$ (phương trình vô nghiệm)
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=2$ và $x=3$. **(0,5đ)**

Bài 3 (2 điểm). Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}\sqrt{x+y-3}=\sqrt{2x-1}\\ x^2+y^2-xy=7\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x^2+xy)(y+1)=4\\ x^2+3xy+y^2+x=-3\end{cases}$

Đáp án

a) Ta có: $\sqrt{x+y-3}=\sqrt{2x-1}$
$\Rightarrow x+y-3=2x-1$
$\Leftrightarrow x=y-2$, **(0,25đ)** thế vào phương trình $x^2+y^2-xy=7$, ta được:
$(y-2)^2+y^2-(y-2)y=7$
$\Leftrightarrow y^2-4y+4+y^2-y^2+2y=7$
$\Leftrightarrow y^2-2y-3=0$
$\Leftrightarrow y=-1$ hoặc $y=3$

Khi $y=-1$ thì $x=-3$

Khi $y=3$ thì $x=1$ **(0,5đ)**

Thử lại ta nhận nghiệm (x,y) là $(3,1)$. **(0,25đ)**

b) Ta có: $(x^2+xy)(y+1)=4 \Leftrightarrow (x+y)(xy+x)=4$

Đặt $a=x+y, b=xy+x$, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} ab=4 \\ a^2+b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 & (1) \\ b=-3-a^2 & (2) \end{cases}$ **(0,25đ)**

Thay (2) vào (1) ta được: $a(-3-a^2)=4 \Leftrightarrow a^3+3a+4=0$

$\Leftrightarrow a=-1$ hoặc $a^2-a+4=0$ (phương trình vô nghiệm)

$\Rightarrow b=-4$ **(0,25đ)**

Vậy ta có hệ sau: $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy+x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-x \\ x(-1-x)+x=-4 \end{cases} \Rightarrow x^2-4=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=2$

Khi $x=-2$ thì $y=1$

Khi $x=2$ thì $y=-3$ **(0,25đ)**

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x,y) là $(-2,1)$ và $(2,-3)$. **(0,25đ)**

Bài 4 (3 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O,R) có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H. Vẽ đường kính AL. Cho biết $\widehat{BAC}=60^\circ$, $\widehat{ACB}=45^\circ$.

a) Chứng minh tứ giác $BHCL$ là hình bình hành và tính AH theo R.

b) Gọi N là giao điểm của BE và OA. Chứng minh rằng tứ giác $BHOC$ nội tiếp và H là trung điểm của BN.

c) Chứng minh rằng các đường thẳng CF, BO, DE đồng quy.

d) Gọi T là giao điểm của DE và OH. Chứng minh rằng $TF=TD$.

Đáp án

a) Ta có $BH \parallel CL$ và $CH \parallel BL$ nên tứ giác $BHCL$ là hình bình hành. **(0,25đ)**

Do đó M là trung điểm HL

$\Rightarrow MO$ là đường trung bình tam giác AHL nên $AH=2OM$

Mặt khác: OM là đường phân giác $\widehat{BOC}$ nên $\widehat{BOM}=\widehat{BAC}=60^o$

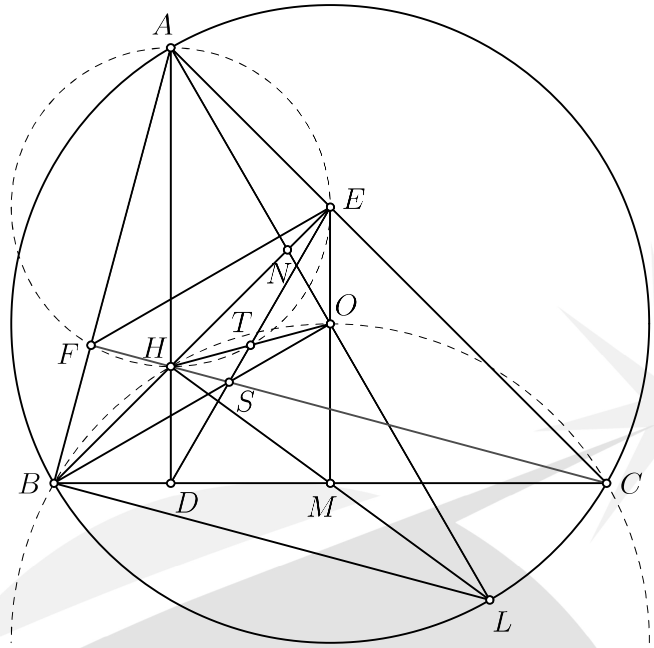
Nên $OM=BO\cdot\cos 60^o=\dfrac{1}{2}R$

Vì vậy $AH=2OM=R$. **(0,25đ)**

b) Ta có $\widehat{BHC}=180^\circ-\widehat{BAC}=120^\circ=\widehat{BOC}$ nên tứ giác $BHOC$ nội tiếp. **(0,25đ)**

Ta có $\widehat{BCH}=15^\circ$ và $\widehat{OCB}=30^\circ$ nên $\widehat{OCH}=15^\circ$, suy ra CH là phân giác $\widehat{OCB}$, kéo theo $BH=HO$. **(0,25đ)**

Chú ý $\widehat{AOB}=2\widehat{ACB}=90^\circ$, hay tam giác BNO vuông tại O nên ta kết luận được H là trung điểm của BN. **(0,25đ)**



c) Gọi S là giao điểm của DE và OB. Ta có $\widehat{BDS} = 120^\circ$ và $\widehat{DBS} = 30^\circ$ nên tam giác BDS cân tại D. **(0,25đ)** Chú ý rằng tam giác BDH vuông cân nên $DS = DH$. **(0,25đ)** Kết hợp với $\widehat{HDS} = 30^\circ$ suy ra

$$\widehat{DHS} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{HDS}) = 75^\circ = \widehat{AHF}.$$

Do đó F, H, S thẳng hàng, hay S nằm trên CF. **(0,25đ)**

d) Vì $AH = R = AO$ nên tam giác AHO cân tại A. Biến đổi góc:

$$\widehat{DHO} = \widehat{DHC} + \widehat{OHC} = \widehat{ABC} + \widehat{OBC} = 105^\circ = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{AED}.$$

Suy ra tứ giác $AHTE$ nội tiếp **(0,25đ)**, kéo theo $\widehat{ATH} = 90^\circ$. Mà tam giác AHO cân tại A nên T là trung điểm của HO. Chú ý rằng tam giác BEC cân tại E nên $EO \perp BC$, dẫn đến $EO \parallel HD$. Từ đây ta kết luận được tứ giác $HDOE$ là hình bình hành, nên là T cũng là trung điểm của DE **(0,25đ)**. Chú ý rằng tam giác DEF vuông tại F, vậy là $TF = TD$. **(0,25đ)**

Bài 5 (1,5 điểm). Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh

a) $a + b + c \leq 3 \leq a^3 + b^3 + c^3$

b) $\sqrt{2a^4 + 6b^2 + 6c^2 - 13} + \sqrt{2b^4 + 6c^2 + 6a^2 - 13} + \sqrt{2c^4 + 6a^2 + 6b^2 - 13} \geq 3$

Đáp án

a) Ta chứng minh: $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Thật vậy, bất đẳng thức đã cho tương đương:
$0 \leq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ (luôn đúng)
Do đó ta có: $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \Rightarrow a + b + c \leq 3$
Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$ **(0,5đ)**
Ta chứng minh: Với a, b, c, d là các số thực thì $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

Bất đẳng thức đã cho tương đương: $(ad-bc)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Áp dụng:

Khi $a+b+c=0$ thì $a=b=c$ (mâu thuẫn với giả thiết)

Khi $a+b+c \neq 0$, ta có:

$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geq \left(a^2+\sqrt{(b^3+c^3)(b+c)}\right)^2$

$\geq \left(a^2+\sqrt{(b^2+c^2)^2}\right)^2$

$=(a^2+b^2+c^2)^2=9$

Do đó $a^3+b^3+c^3 \geq \dfrac{9}{a+b+c} \geq 3$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$ **(0,5đ)**

b) $\sqrt{2a^4+6b^2+6c^2-13}+\sqrt{2b^4+6c^2+6a^2-13}+\sqrt{2c^4+6a^2+6b^2-13} \geq 3$

Đặt $x=a^2, y=b^2, z=c^2 \Rightarrow x+y+z=3$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$\sqrt{2x^2-6x+5}+\sqrt{2y^2-6y+5}+\sqrt{2z^2-6z+5} \geq 3$

Ta chứng minh: $\sqrt{2x^2-6x+5} \geq 2-x$, thật vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$2x^2-6x+5 \geq (x-2)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng) **(0,25đ)**

Áp dụng ta có: $\sqrt{2x^2-6x+5}+\sqrt{2y^2-6y+5}+\sqrt{2z^2-6z+5} \geq 2-x+2-y+2-z=3$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$ hay $a^2=b^2=c^2=1$. **(0,25đ)**

Bài 6 (0,5 điểm). Tìm độ dài các cạnh của một tam giác vuông biết tam giác có diện tích bằng 6 và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác bằng 1.

Đáp án

Gọi các cạnh là a,b,c trong đó c là độ dài cạnh huyền. Giả sử $a<b$. Ta có $ab=12$, $c^2=a^2+b^2$, $a+b-c=2$ **(0,25đ)** giải ra được $a=3$, $b=4$, $c=5$. **(0,25đ)**

— HẾT —

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Nộp lại đề thi và giấy làm bài.