TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

LỜI GIẢI THAM KHẢO

KÌ THI CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN

MÔN TOÁN

Ngày thi: Thứ bảy 11/01/2025

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Đáp án tham khảo được thực hiện bởi đội ngũ giáo viên trung tâm STAR Education: Thầy TRẦN MINH NGỌC - Thầy NGUYỄN THÁI HƯNG - Thầy NGUYỄN PHƯỚC THỊNH - Thầy VÕ HOÀNG THÀNH - Thầy NGUYỄN QUÍ HUỲNH LONG.

Bài 1. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Chứng minh rằng

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| + abc \leq 1.$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $x = b+c-a, y = c+a-b, z = a+b-c$, suy ra $a = \dfrac{y+z}{2}, b = \dfrac{z+x}{2}, c = \dfrac{x+y}{2}$. Hơn nữa ta có $x+y+z = 3$ và $z \geq y \geq x$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{y-x}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot \frac{z-x}{2} + \frac{x+y}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z+x}{2} \leq 1 \\
\iff &(yz^2 + zx^2 + xy^2) - (y^2z + z^2x + x^2y) + (x^2y + y^2z + z^2x) + (xy^2 + yz^2 + zx^2) + 2xyz \leq 8 \\
\iff &xy^2 + yz^2 + zx^2 + xyz \leq 4.
\end{aligned}$$

Do $z \geq y \geq x$ nên $(y-z)(y-x) \leq 0$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
y^2 + xz \leq yz + xy \quad &\iff xy^2 + x^2z \leq xy(x+z) \\
&\iff xy^2 + x^2z + yz^2 + xyz \leq y(x+z)^2 = y(3-y)^2 \leq 4.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay $a = b = c = 1$. $\square$

Bài 2. Giả sử chúng ta có thể sắp xếp 2025 các số nguyên dương trên một đường tròn theo chiều kim đồng hồ lần lượt là $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ và thỏa mãn điều kiện

$$a_i \mid a_j^2 + 1 \text{ và } a_j \mid a_i^2 + 1,$$

với mọi số a_i, a_j cạnh nhau hoặc chúng cách nhau một số. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2025}$.

(Ví dụ: hai số a_1, a_2 là cạnh nhau, hai số a_2, a_{2025} là cách nhau một số.)

Lời giải.

Với các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a \mid b^2+1$ và $b \mid a^2+1$ thì $ab \mid a^2+b^2+1$. Đặt $a^2+b^2+1 = kab$, ta sẽ chứng minh $k = 3$.

Dễ dàng thấy $k \geq 3$. Xét tập hợp

$$A = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^{*2} : k = \frac{a^2+b^2+1}{ab}\right\}.$$

Xét $(a_0, b_0) \in A$ sao cho $a_0 + b_0$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_0 \geq b_0$. Xét phương trình

$$x^2 - kb_0x + b_0^2 + 1 = 0.$$

Phương trình trên có nghiệm a_0, gọi c là nghiệm còn lại của phương trình. Theo định lý Viete, ta có

$$\begin{cases} a_0 + c = kb_0 \\ a_0c = b_0^2 + 1 \end{cases}. \qquad (1)$$

Khi đó $c \in \mathbb{N}^*$ nên $(c, b_0) \in A$. Vì $a_0 + b_0$ nhỏ nhất nên $c \geq a_0 \geq b_0$. Từ (1), ta được

$$\frac{kb_0}{b_0^2+1} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{c} \leq \frac{2}{b_0}.$$

Do đó $kb_0^2 \leq 2b_0^2 + 2$, từ đó suy ra $k \leq 4$. Nếu $k = 4$ thì $b_0 = 1$; từ $a_0c = b_0^2 + 1$ trong (1), ta suy ra $a_0 = 1$ và $c = 2$; tuy nhiên khi đó $a_0 + c = kb_0$ không xảy ra. Như vậy $k = 3$.

Quay lại bài toán ban đầu, từ giả thiết ta suy ra

$$\begin{cases} a_i^2 + a_{i+1}^2 + 1 = 3a_ia_{i+1} \\ a_i^2 + a_{i+2}^2 + 1 = 3a_ia_{i+2} \end{cases}. \qquad (2)$$

Do đó $a_{i+1} = a_{i+2}$ hoặc $a_{i+1} + a_{i+2} = 3a_i$. Nếu $a_{i+1} + a_{i+2} = 3a_i$ với mọi $i = \overline{1, 2025}$ thì

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2025}) = \sum_{i=1}^{2025}(a_{i+1} + a_{i+2}) = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2025}).$$

Do đó $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2025} = 0$ (Vô lí). Vì vậy tồn tại ít nhất một cặp (a_j, a_{j+1}) sao cho $a_j = a_{j+1}$. Hơn nữa

$$a_j^2 + a_{j+1}^2 + 1 = 3a_ja_{j+1}$$

nên $a_j = a_{j+1} = 1$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 = a_2 = 1$. Giả sử $a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots, a_{l_k}$ là các số lớn hơn 1 trong dãy $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ với $3 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_k$. Ta thấy rằng $a_{l_1-1} = 1$ và $a_{l_1-1}^2 + a_{l_1}^2 + 1 = 3a_{l_1-1}a_{l_1}$ nên $a_{l_1} = 2$. Kết hợp với $a_{l_1-2} = a_{l_1-1} = 1$ và (2), ta suy ra $a_{l_1+1} = 1$ và $a_{l_1+2} = 1$. Do đó $a_{l_2} = 2$ và $l_2 - l_1 \geq l_1 + 3 - l_1 = 3$. Tương tự như vậy, ta suy ra $a_{l_1} = a_{l_2} = \cdots = a_{l_k} = 2$ và

$$2025 \geq l_k \geq l_{k-1} + 3 \geq \cdots \geq 3(k-1) + l_1 \geq 3k.$$

Do đó $k \leq 675$. Từ đó ta được

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2025} \leq (1 + 1 + 2) \cdot 675 = 2700.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_{3k-1} = a_{3k-2} = 1$ và $a_{3k} = 2$ với $k = \overline{1, 2025}$. □

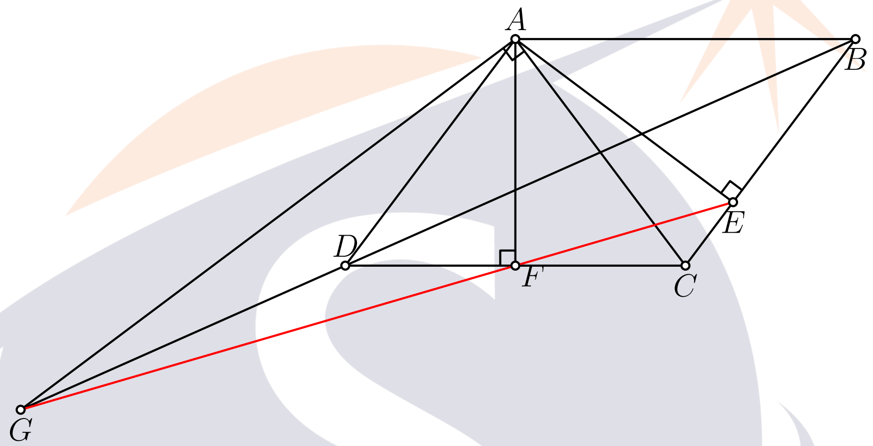
Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{BAD} > 90°$. Gọi G, E, F là các điểm trên BD, CB, CD sao cho: $AG \perp AC, AE \perp CB, AF \perp CD$.

a) Chứng minh G, E, F thẳng hàng.

b) Đường cao qua A của tam giác ABD và trung tuyến qua A của tam giác AEF cắt CB, CD lần lượt tại M, N. Chứng minh EN, FM và đường cao qua A của tam giác AEF đồng quy.

Lời giải.

a) Xét vị trí các điểm như hình vẽ, các trường hợp khác tương tự.

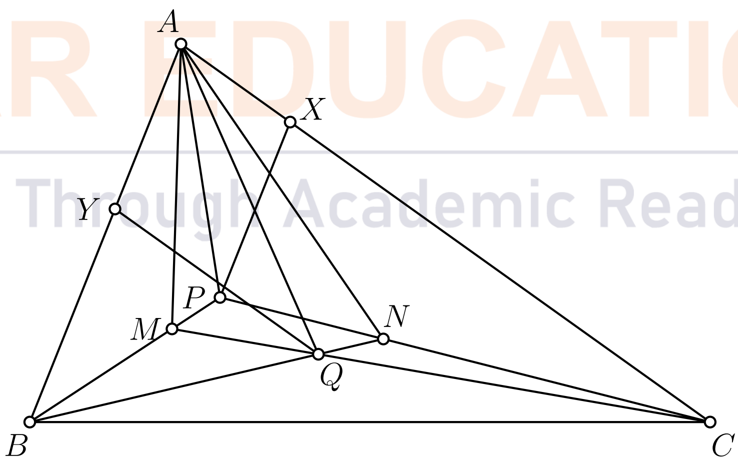


Ta có

$$\frac{GD}{GB} = \frac{S_{AGD}}{S_{AGB}} = \frac{AD \cdot \sin \angle GAD}{AB \cdot \sin \angle GAB} = \frac{AD \cdot \sin(90^\circ - \angle CAD)}{AB \cdot \sin(90^\circ + \angle BAD)} = \frac{AD \cdot \cos \angle CAD}{AB \cdot \cos \angle BAD}.$$

Mặt khác, ta có $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB \cdot \cos \angle ABC}{AC \cdot \cos \angle ACB}$ và $\dfrac{FC}{FD} = \dfrac{AC \cdot \cos \angle ACD}{AD \cdot \cos \angle ADC}$. Kết hợp với $ABCD$ là hình bình hành ta suy ra $\dfrac{GD}{GB} \cdot \dfrac{EB}{EC} \cdot \dfrac{FC}{FD} = 1$.
Từ đó áp dụng định lý Ceva đảo cho tam giác BCD ta được G, E, F thẳng hàng.

b) Ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau: Cho tam giác ABC và hai điểm M, N sao cho AM, AN đẳng giác. Gọi P là giao điểm của BM và CN, Q là giao điểm của BN và CM. Khi đó AP, AQ đẳng giác $\angle BAC$.



Chứng minh. Áp dụng định lý Cevasin cho tam giác ABC

$$\frac{\sin\angle MAB}{\sin\angle MAC}\cdot\frac{\sin\angle MCA}{\sin\angle MCB}\cdot\frac{\sin\angle MBC}{\sin\angle MBA}=\frac{\sin\angle NAC}{\sin\angle NAB}\cdot\frac{\sin\angle NBA}{\sin\angle NBC}\cdot\frac{\sin\angle NCB}{\sin\angle NCA}=1.$$

Hơn nữa $\angle MAB=\angle NAC, \angle MAC=\angle NAB$ nên

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\angle MCA}{\sin\angle MCB}\cdot\frac{\sin\angle MBC}{\sin\angle MBA}=\frac{\sin\angle NBA}{\sin\angle NBC}\cdot\frac{\sin\angle NCB}{\sin\angle NCA}\\ \iff&\frac{\sin\angle QCA}{\sin\angle QCB}\cdot\frac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}=\frac{\sin\angle QBA}{\sin\angle QBC}\cdot\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA}\\ \iff&\frac{\sin\angle QCA}{\sin\angle QCB}\cdot\frac{\sin\angle QBC}{\sin\angle QBA}=\frac{\sin\angle PBA}{\sin\angle PBC}\cdot\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA}.\end{aligned}$$

Áp dụng định lý Cevasin cho tam giác ABC:

$$\frac{\sin\angle QAB}{\sin\angle QAC}\cdot\frac{\sin\angle QBC}{\sin\angle QCB}\cdot\frac{\sin\angle QBC}{\sin\angle QBA}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin\angle PBA}{\sin\angle PBC}\cdot\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA}=1$$

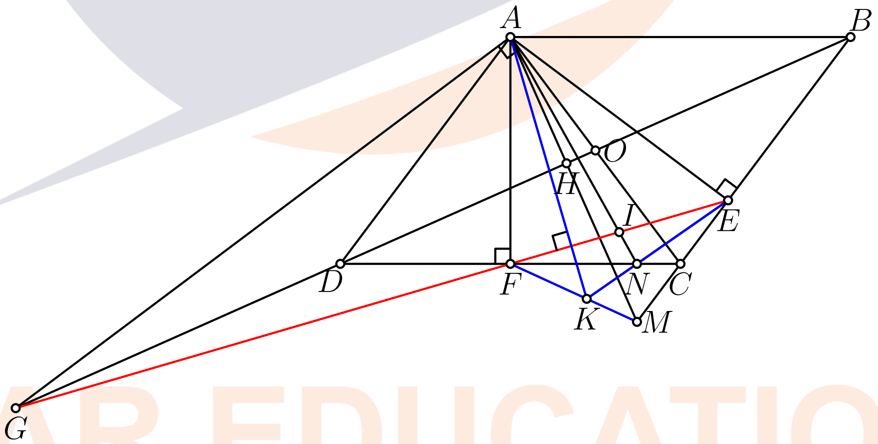
$$\Rightarrow\frac{\sin\angle QAB}{\sin\angle QAC}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}.\quad (*)$$

Lấy X, Y lần lượt thuộc CA, AB sao cho $PX \parallel AB, QY \parallel AC$. Khi đó

$$(*)\iff\frac{\sin\angle QAY}{\sin\angle AQY}=\frac{\sin\angle PAX}{\sin\angle APX}\iff\frac{YQ}{YA}=\frac{XP}{XA}.$$

Mặt khác $\angle AYQ=180^\circ-\angle BAC=\angle AXP$ nên $\triangle AYQ\backsim\triangle AXP$, suy ra $\angle QAY=\angle PAX$, từ đó AP, AQ đẳng giác $\angle BAC$.

Trở lại bài toán, gọi H là hình chiếu từ A lên BD, I là trung điểm của EF, AC cắt BD tại O, khi đó O là trung điểm AC, BD (do $ABCD$ là hình bình hành).



Ta có $\angle AEF=\angle ACF$ (do $AECF$ nội tiếp) $=\angle CAB$ (do $CD\parallel AB$) và $\angle AFE=\angle ACB$ ($AECF$ nội tiếp). Do đó $\triangle AEF\backsim\triangle BAC$. Hơn nữa I, O là trung điểm EF, AC, để ý $AB\parallel CD$ và $AHFD$ nội tiếp, ta có

$$\angle IAE=\angle OBA=\angle HDF=\angle HAF.$$

Vậy AM, AN đẳng giác $\angle FAE$. Gọi K là giao điểm của FM và EN, áp dụng bổ đề trên cho tam giác AEF và hai điểm M, N ta được AK, AC đẳng giác $\angle FE$. Mà AC là đường kính của (AEF) nên AK là đường cao (kéo dài) của tam giác AEF. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 4. Hỏi có bao nhiêu bộ số có thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_{2025})$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

i. $a - i \in \{1, 2, \ldots, 2026\}$.

ii. $|a_i - a_j| \geq |i - j|$ với mọi $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2025\}$.

iii. $a_i \neq a_j$ với mọi $i \neq j$.

Lời giải.

Chú ý rằng nếu $(a_1, \ldots, a_{2025})$ thỏa mãn bài toán thì $(2027 - a_1, \ldots, 2027 - a_{2025})$ cũng thế, do đó ta chỉ cần xét $a_1 < a_{2025}$.

Xét các trường hợp

- **Trường hợp 1:** Nếu có k để $a_k = 2026$ thì $|a_k - a_{2025}| \geq |k - 2025|$, từ đó $1 \geq |k - 2025|$ nên $k = 2024$. Hơn nữa, bây giờ nếu có l để $a_k = 2024$ thì $|a_l - 2025| \geq |l - 2025|$ hay $1 \geq |l - 2025|$, do đó $l = 2024$ (vô lí). Vậy $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2025}\} = \{1, 2, \ldots, 2023\}$.
  Bây giờ, lấy l để $a_l = 2023$, khi đó $|a_l - a_{2025}| \geq |l - 2025|$ nên $l = 2023$. Từ đó ta chứng minh được $a_l = l,\ \forall l \leq 2023$, khi đó ta thu được một bộ số thỏa mãn là $(1, 2, \ldots, 2023, 2026, 2025)$.
  Nếu không tồn tại k để $a_k = 2026$, khi đó $\{a_1, \ldots, a_{2025}\} = \{1, \ldots, 2025\}$. Thực hiện tương tự như trên ta được một bộ số thỏa mãn là $(1, 2, \ldots, 2024, 2025)$.

- **Trường hợp 2:** Gọi l là số tự nhiên nhỏ nhất đẩ $a_l \neq l$, khi đó $a_i = i,\ \forall i \in \{1, \ldots, l-1\}$ và $\{a_{l+1}, \ldots, a_{2025}\} = \{l+1, \ldots, 2026\}$. Ta chứng minh $a_j = j + 1,\ \forall j \in \{l, \ldots, 2025\}$.
  Thật vậy, lần lượt xét $|a_j - a_{2025}|$ với $j = \overline{l, 2025}$ ta có $a_j = j + 1,\ \forall j \in \{l, \ldots, 2025\}$.
  Như vậy mỗi bộ số trong trường hợp này có được bằng cách chọn ra chỉ số l thuộc $\{2, \ldots, 2025\}$, do đó có 2024 bộ số thỏa mãn trong trường hợp này.

- **Trường hợp 3:** Nếu có j để $a_j = 1$ thì $j = 2$, khi đó nếu có l để $a_l = 3$ thì $|3 - 2| = |a_l - a_1| \geq |l - 1|$ (vô lí). Do đó $\{a_3, \ldots, a_{2025}\} = \{4, \ldots, 2026\}$. Tương tự Trường hợp 1, ta chứng minh được $a_l = l + 1,\ \forall l = \overline{3, 2025}$, do đó có một bộ số thỏa mãn là $(2, 1, 4, 5, \ldots, 2025, 2026)$.
  Nếu không có j để $a_j = 1$ thì $\{a_1, \ldots, a_{2025}\} = \{2, \ldots, 2026\}$. Từ đó chứng minh được $a_l = l + 1,\ \forall l \geq 1$.

Tóm lại, số bộ số thỏa mãn là $2\left[(1+1) + 2024 + (1+1)\right] = 4056$ (bộ). □

—— **HẾT** ——