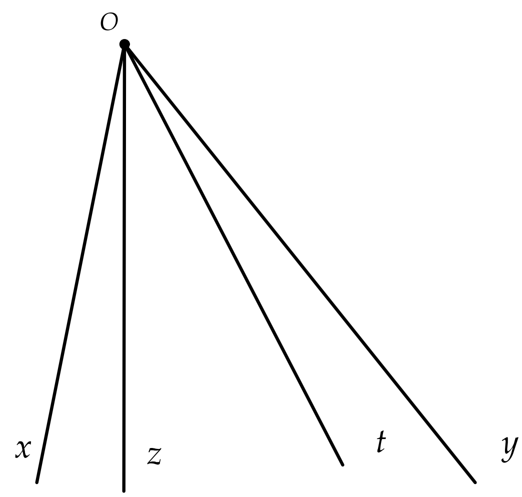
CHƯƠNG

1 BÀI GIẢNG CHUYÊN TOÁN

§1. HAI ĐƯỜNG ĐẲNG GIÁC

Trong bài giảng này chúng ta sẽ tìm hiểu về một khái niệm tương đối lạ với cấp trung học cơ sở tuy nhiên lại khá quen thuộc vì hầu hết ta đã làm các bài tập liên quan đến nó, đó là "Hai đường đẳng giác". Các tính chất lý thuyết trong phần này đều không được sử dụng trong các kì thi bậc trung học cơ sở nên tôi phát biểu dưới dạng bài tập, các em rèn luyện nhé.
Trước hết ta đến với định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.1. Cho góc xOy, hai đường thẳng d_1, d_2 qua O đối xứng qua phân giác góc xOy được gọi là hai đường đẳng giác trong góc xOy. Ta có thể nói d_1 đẳng giác với d_2 trong góc xOy.



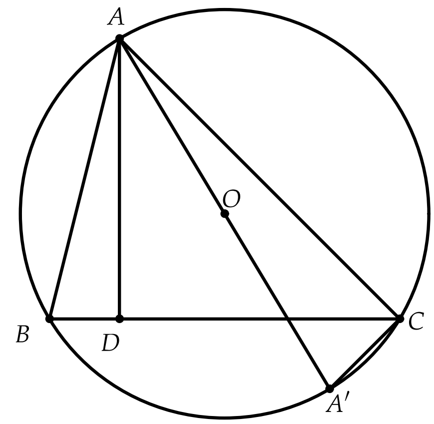
Nhận xét: 1.1.
1) Từ định nghĩa trên ta có nhận xét đơn giản là phân giác trong (phân giác ngoài) của góc xOy là đẳng giác với chính nó trong góc xOy.
2) Nếu Oz, Ot là đẳng giác trong góc xOy thì Ox, Oy cũng đẳng giác trong góc zOt.

Trong chương trình trung học cơ sở việc chứng minh các đường đẳng giác cũng xuất hiện nhiều, sau đây là một số ví dụ về các cặp đường đẳng giác thường gặp.

Ví dụ 1.1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng đường cao AH và trung tuyến AM là hai đường đẳng giác trong góc BAC.
Lời giải.
Ta có tam giác ABC vuông có AM là trung tuyến nên $AM = MB = MC$. Khi đó $\angle ACM = \angle ACB$, hơn nữa $\angle ACB = \angle BAC$. Do đó $\angle CAM = \angle BAH$, chứng tỏ AH, AM đẳng giác trong góc BAC.

Ví dụ 1.2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng đường cao AD và đường kính AA' là hai đường thẳng đẳng giác.
Lời giải.

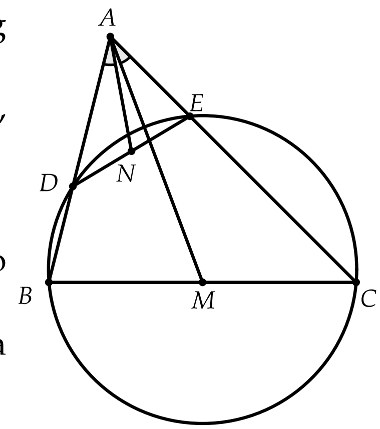
Chú ý rằng hai đường thẳng AH, AA' luôn cùng nằm trong hoặc cùng nằm ngoài hai tia AB, AC. Do đó để chứng minh AD và AA' đẳng giác trong góc BAC, ta cần chứng minh $\angle HAB = \angle A'AC$. Trong hình ta xét tam giác ABC nhọn và AD, AA' cùng nằm trong góc BAC.
Ta có $\angle ABD = \angle AA'C$ và $\angle ACA' = 90^\circ$, do đó $\angle BAD = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - \angle AA'C = \angle CAA'$.
Vậy AD, AA' đẳng giác trong góc BAC.■



Ví dụ 1.3. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E lần lượt thuộc các đường thẳng AB, AC sao cho 4 điểm D, E, B, C cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng đường trung tuyến xuất phát từ A của hai tam giác ADE và ABC là cặp đường đẳng giác trong góc $\angle BAC$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AN. Ta chứng minh AM, AN đẳng giác trong góc BAC.
Do tứ giác $BDEC$ nội tiếp, suy ra $\angle ADE = \angle ACB$, dẫn tới $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$.
Khi đó $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{2DN}{2CM} = \dfrac{DN}{CM}$.
Dẫn tới $\triangle ADN \backsim \triangle ACM \Rightarrow \angle ADN = \angle ACM$, do đó AM, AN đẳng giác trong góc $\angle BAC$.
Các đường cao tương ứng chứng minh tương tự ta cũng đẳng giác trong góc BAC.



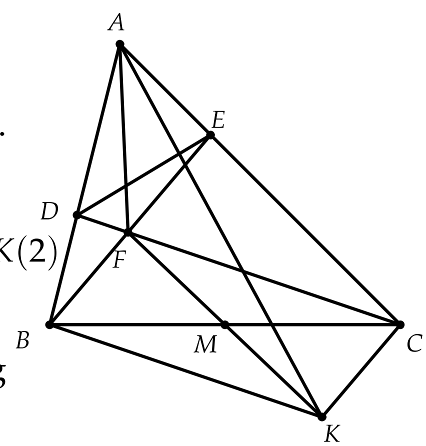
Ví dụ 1.4. Cho tam giác ABC. Đường tròn qua B, C cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Gọi F là giao điểm của BE, CD và K là đối xứng của F qua trung điểm BC. Chứng minh rằng AF, AK đẳng giác trong góc BAC.

Lời giải.

Ta có $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ nên $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ và $\triangle FDE \backsim \triangle FBC \Rightarrow \dfrac{DF}{BF} = \dfrac{DF}{CK}$. Do đó $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DF}{CK}$ (1).
Hơn nữa:

$$\angle ADF = \angle ABF + \angle BFD = \angle ACD + \angle FCK = \angle ACK (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\triangle DAF \backsim \triangle ACK$, suy ra $\angle DAF = \angle CAK$ hay AF, AK đẳng giác trong góc $\angle BAC$.



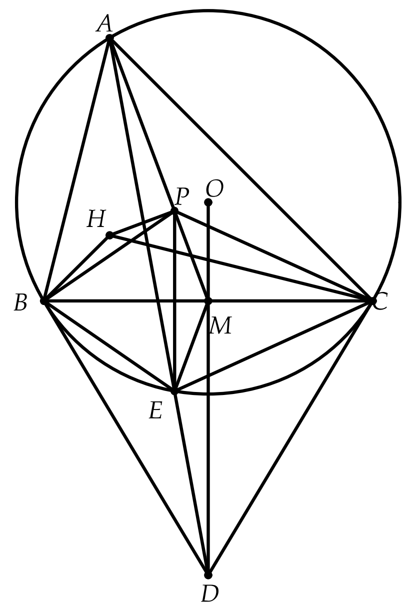
Nhận xét: 1.2.
1) Trong ví dụ trên AD và trung tuyến AM đẳng giác trong góc BAC, người ta gọi đường thẳng đẳng giác với trung tuyến là **đường đối trung**. Có nhiều cách dựng đường đối trung, ví dụng trên là 1 cách.
2) Điểm P trong ví dụ trên, hình chiếu của trực tâm trên trung tuyến xuất phát từ điểm A được gọi là điểm $A - humpty$.

Ví dụ 1.5. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại điểm D. AD cắt (O) tại E khác A. OD cắt BC tại M.

a) Chứng minh rằng $\angle DAB = \angle CAM$.

b) Gọi P là điểm đối xứng của E qua BC. H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh $BHPC$ nội tiếp và $HP \perp AM$.

Lời giải.
a) Ta chứng minh được $DM \cdot MO = MB^2$ và $DB^2 = DE \cdot DA$, suy ra $DM \cdot DO = DE \cdot DA$. Dẫn đến $\triangle DEM \backsim \triangle DOA$ và $\angle DEM = \angle DOA$, tứ giác $OMEA$ nội tiếp.

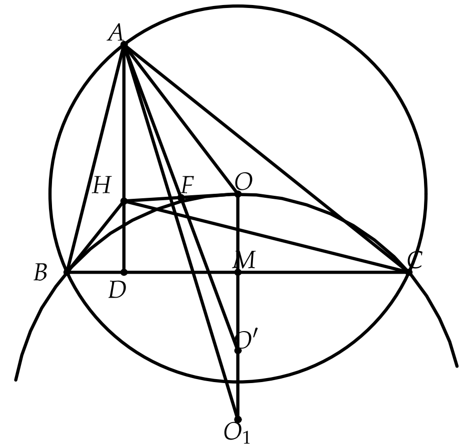


Từ đó $\angle OMA = \angle OEA = \angle OAE = \angle DME$.
Tam giác DEM và AOM có $\angle DEM = \angle AOM, \angle DME = \angle AMO$ nên đồng dạng, suy ra $MA \cdot ME = MO \cdot MD$.
Mặt khác $MO \cdot MD = MB^2$, từ đó $MA \cdot ME = MB^2$, suy ra $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MB}{ME}$ (1)
Ta lại có $\angle AMB = 90^\circ - \angle AMO = 90^\circ - \angle MDE = \angle EMB$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $\triangle MAB \backsim \triangle MEA$, suy ra $\angle MAB = \angle MBE$.
Hơn nữa $\angle MBE = \angle CAE$, do đó $\angle MAB = \angle CAE$ và $\angle DAB = \angle CAM$.

b) Ta có $\angle BPC = \angle BEC = 180^\circ - \angle BAC = \angle BHC$, suy ra $BHPC$ nội tiếp.
BC là trung trực của EP, suy ra $\angle PME = \angle BME = \angle AME$, suyra A, P, M thẳng hàng.
Vì $MP = ME$ nên $MP \cdot MA = \angle ME \cdot MA = MB^2$, dẫn đến $\triangle MPB \backsim \triangle MBA$, suy ra $\angle MPB = \angle MAB$.
Từ $BHPC$ nội tiếp, suy ra $\angle HPB = \angle HCB$. Khi đó $\angle HPM = \angle HPB + \angle MPB = \angle HCB + \angle MBA = 90^\circ$, do đó $HP \perp AM$.

Ví dụ 1.6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và F là trung điểm OH. Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC. Chứng minh rằng $\angle O_1AC = \angle FAB$.
Lời giải.

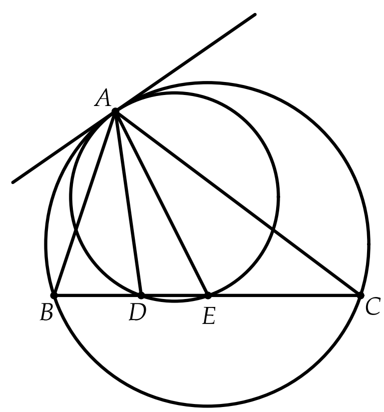
Gọi M là trung điểm BC và O' là điểm đối xứng của của O qua M.
Ta có $AH = 2OM = OO'$, tứ giác $AHO'O$ là hình bình hành nên F là trung điểm OO'.



Vẽ đường kính OK của (BOC), ta có $OM \cdot OK = OB^2$, mà $OO' = 2OM, OK = 2OO_1$ nên $OM \cdot OK = OO' \cdot OO_1 = OB^2 = OA^2$.
Dẫn tới $\triangle OAO' \backsim \triangle OO_1A$, kéo theo $\angle OAO' = \angle OO_1A$, mà $\angle OO_1A = \angle HAO_1$ nên $\angle OAO' = \angle HAO_1$.
Mặt khác có $\angle HAB = \angle CAO$ nên $\angle BAO_1 = \angle CAO'$ và $\angle O_1AC = \angle O'AB$.

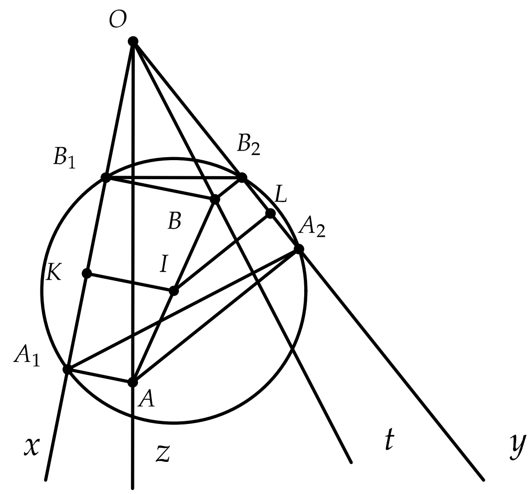
Nhận xét: 1.3. Các ví dụ trên là những cặp đường đẳng giác cơ bản trong tam giác, từ việc xác định được cặp đẳng giác sẽ giúp chúng ta giải các bài toán liên quan. Tiếp theo là ví dụ mà nội dung là một tính chất quan trọng của cặp đường đẳng giác, tính chất này thường được dùng để chứng minh các bài toán, trong chương trình trung học cơ sở các tính chất này không được sử dụng nên tôi để dưới dạng ví dụ cho các em học sinh thử sức.

Ví dụ 1.7. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E thuộc cạnh BC và AD, AE đẳng giác trong góc $\angle BAC$. Khi đó đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADE và ABC tiếp xúc với nhau.
Lời giải.
Gọi d là tiếp tuyến của (ABC) tại A. Ta chứng minh d cũng là tiếp tuyến của (ADE). Xét hai trường hợp:
Nếu $d \parallel BC$ thì tam giác ABC cân tại A, khi đó tam giác ADE cũng cân tại A và d cũng là tiếp tuyến của (ADE).
Nếu d cắt BC tại P. Khi đó $\angle PAB = \angle ACB$, suy ra $\angle PAD = \angle PAB + \angle BAD = \angle ACB + \angle CAE = \angle AED$. Do đó d cũng là tiếp tuyến của (ADE).
Vậy đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADE và ABC tiếp xúc nhau.



Ví dụ 1.8. Cho góc xOy, A và B là hai điểm sao cho OA, OB là hai đường đẳng giác trong góc $\angle xOy$. Gọi A_1, A_2 là hình chiếu của A trên Ox, Oy; B_1, B_2 là hình chiếu của B trên Ox, Oy. Khi đó bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 cùng thuộc một đường tròn có tâm trung điểm của đoạn AB.
Lời giải.

Ta có các tứ giác OA_1AA_2, OB_1BB_2 nội tiếp. Suy ra $\angle OB_1B_2 = \angle OBB_2 = 90^\circ - \angle BOB_2$ và $\angle OA_2A_1 = \angle OAA_1 = 90^\circ - \angle AOA_1$, do đó $\angle OB_1B_2 = \angle OA_2A_1$, kéo theo tứ giác $A_1A_2B_2B_1$ nội tiếp.
Gọi I là trung điểm của AB, vẽ $IK \perp A_1B_1$, khi đó IK là đường trung bình của hình thang ABB_1A_1 nên K là trung điểm của A_1B_1, do đó IK là trung trực của A_1B_1, do đó $IA_1 = IB_1$, tương tự thì $IA_2 = IB_2$, hơn nữa $A_1B_1B_2A_2$ nội tiếp nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.



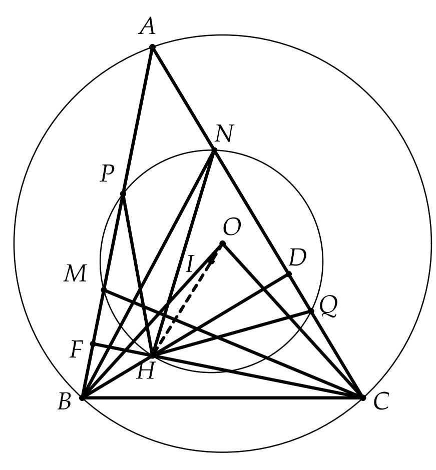
Nhận xét: 1.4. Ví dụ 1.8 là một tính chất rất quan trọng của hai đường đẳng giác. Ta sẽ sử dụng tính chất này để làm các bài toán khác.

Ví dụ 1.9. Cho tam giác ABC nhọn có BC là cạnh nhỏ nhất. Trên cạnh AB, AC lấy M, N sao cho $CM = BC = BN$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC, chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.
Lời giải.
Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của (HMN) với AB, AC. BH cắt AC tại D và CH cắt AB tại F.
Ta có $\angle NHD = \angle CHD = 90^\circ - \angle ACH = \angle BAC$, suy ra $ABHN$ nội tiếp.
Chứng minh tương tự thì tứ giác $AMHC$ nội tiếp.
Ta có $\angle HCQ = \angle ABH = \angle HMB = \angle HNP$ và $\angle HQC = \angle HPN$, suy ra $HQC \backsim HPN$ và $HC = HN$ nên $\triangle HQC = \triangle HPN$, do đó $\angle CHQ = \angle PHN$.
Theo Ví dụ 1.1 ta có CH, CO là hai đường đẳng giác trong góc ACB nên

$$\angle MCH = \angle BCH = \angle OCN$$

Các tam giác HCN, OBC cân và $\angle OCB = \angle HCN$, suy ra $\triangle OCB \backsim \triangle NCH$ và dẫn đến $\dfrac{CN}{CO} = \dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CH}{CM}$.

Do đó $\triangle COH \backsim \triangle CMN$, suy ra $\angle CHO = \angle CNM$.
Từ đó $\angle OHQ = \angle OHC - \angle CHQ$
$= \angle CNM - \angle PHN = \angle CNM - \angle NMA$
$= \angle BAC = \angle NHE.$
Mặt khác I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HNQ và $HE \perp EQ$, suy ra $\angle IHQ = \angle NHE = \angle OHQ$.
Vậy H, I, O thẳng hàng.

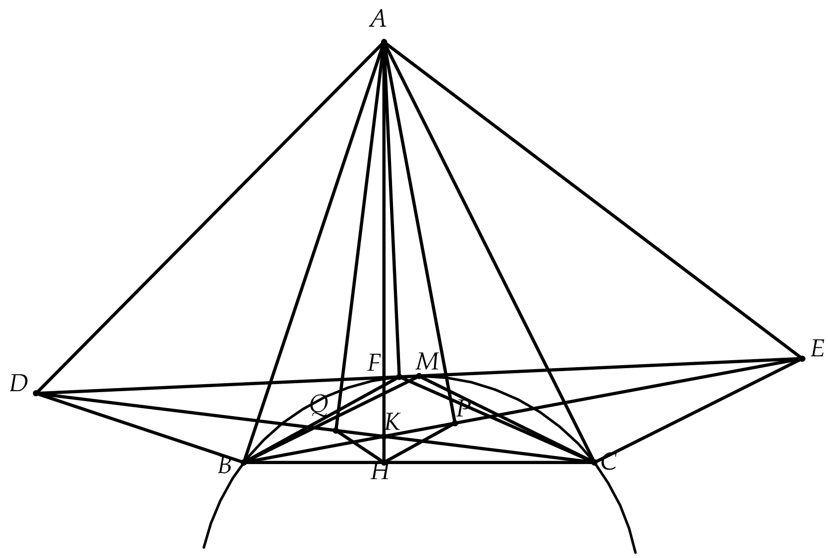


Ví dụ 1.10. Cho tam giác ABC nhọn. Trên đường thẳng vuông góc với AB tại B lấy điểm D khác phía C đối với AB và trên đường thẳng vuông góc với AC tại C lấy điểm E khác phía B đối với AC thỏa mãn $\angle BAD = \angle CAE$.

a) Gọi K là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng $AK \perp BC$.

b) Vẽ $AF \perp DE$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC đi qua trung điểm của DE.

Lời giải.



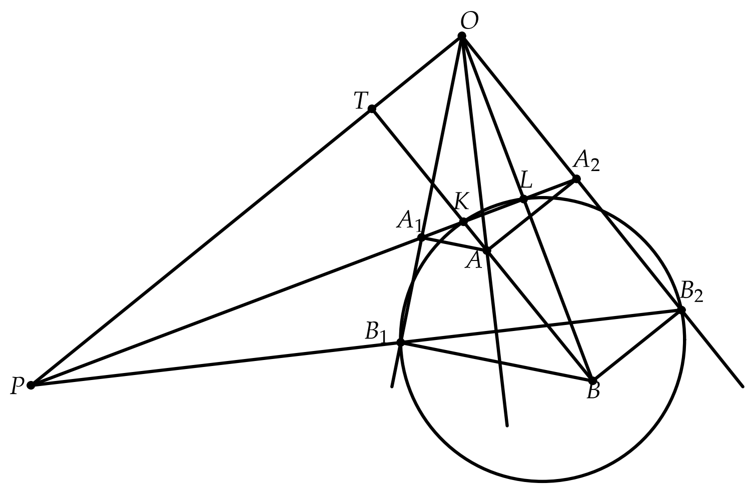
a) Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của A trên BE và CD. AF cắt BC tại H. Ta cần chứng minh rằng $\angle AHC = 90^\circ$.
Dễ thấy các tứ giác $ADBQ, AECP$ nội tiếp, kết hợp với giả thiết ta có

$$\angle BQD = \angle BAD = \angle CAE = \angle CPE$$

suy ra $\angle BQC = \angle BPC$, từ đó tứ giác $BQPC$ nội tiếp, kéo theo $\angle BPQ = \angle BCQ$. (1)
Lại có $APFQ$ nội tiếp nên $\angle BPQ = \angle FAQ$. (2)
Từ (1) và (2) ta được $\angle BCQ = \angle FAQ$, dẫn tới tứ giác $AQHC$ nội tiếp, và $\angle AHQ = \angle AQC = 90^\circ$, do đó $AH \perp BC$.
b) Gọi M là trung điểm DE.
Ta có các tứ giác $ADBF, AECM$ nội tiếp, khi đó $\angle BFD = \angle BAD, \angle CFE = \angle CAE$, suy ra $\angle BFD = \angle CFE$ và DE là phân giác ngoài của $\angle BFC$.
Gọi M' là giao điểm của (BFC) với DE. Ta có $\angle M'BC = \angle M'FC = \angle BFD = \angle M'CB$, suy ra $M'B = M'C$. (3)
Lại có AB, AC là hai đường đẳng giác trong góc DAE, B, C là hình chiếu của D, E trên AB, AC nên theo Ví dụ 1.7 thì $MB = MC$. (4)
Từ (3) và (4) ta có $M' \equiv M$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC đi qua trung điểm của DE.

Ví dụ 1.11. Cho góc xOy. OA, OB là đẳng giác trong góc xOy. Gọi A_1, A_2 là hình chiếu của A trên Ox, Oy; B_1, B_2 là hình chiếu của B trên Ox, Oy. Gọi K, L là giao điểm của OB, AB với A_1A_2. Chứng minh rằng 4 điểm B_1, B_2, K, L cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



Gọi D là giao điểm của OA và A_1A_2, E là giao điểm của OB và B_1B_2, P là giao điểm của A_1A_2 và B_1B_2.

Dễ thấy các cặp tam giác ODA_1, OEB_2 và OAA_1, OBB_2 đồng dạng, suy ra

$$\frac{OD}{OE} = \frac{OA_1}{OB_2} = \frac{OA}{OB}$$

từ đó $ED \parallel AB$.

Tam giác OPE có $OA \perp PE, PL \perp OE$ nên D là trực tâm, suy ra $DE \perp OP$, do đó $AB \perp OP$ tại T, từ đó $PT \perp PO = PK \cdot PL$.

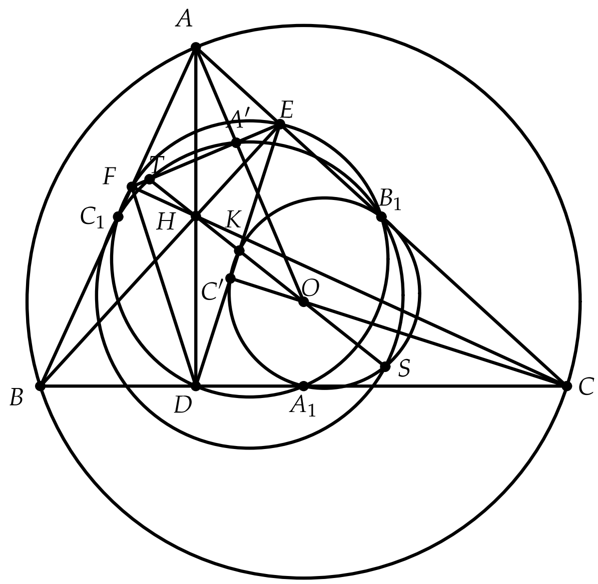
Hơn nữa OTA_1A_2 và $A_1A_2B_2B_1$ nội tiếp nên $PT \cdot PO = PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$.

Khi đó $PK \cdot PL = PB_1 \cdot PB_2$, suy ra B_1, K, L, B_2 cùng thuộc một đường tròn.

Ví dụ 1.12. Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Các đường cao AD, BE, CF. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB. Gọi A' là giao điểm của OA và EF, các điểm B', C' được xác định tương tự. Chứng minh rằng các đường tròn $(A_1B_1C'), (B_1C_1A')$,
(A_1C_1B') cùng đi qua một điểm thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi T, K là giao điểm của OH với EF và DE.



Ta có AH, AO đẳng giác trong $\angle BAC$, E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB và B_1, C_1 là hình chiếu của O trên AC, AB, theo ví dụ 1.10 ta có $T \in (B_1C_1A')$. Tương tự K thuộc (A_1B_1C').
Gọi S là giao điểm của (B_1C_1A') với OH khác T. Ta chứng minh S thuộc (A_1B_1C'). Thật vậy ta có $\angle B_1SK = \angle B_1A'E = \angle B_1C'E = \angle B_1A_1K$, suy ra $S \in (A_1B_1K)$ hay $S \in (A_1B_1C')$.
Tương tự cũng chứng minh được $S \in (A_1C_1B')$. Do đó (A_1B_1C'), $(B_1C_1A'$, (A_1C_1B') cùng đi qua S thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.

A Bài tập rèn luyện

Bài 1.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , một đường tròn thay đổi qua BC cắt AB, AC tại D, E.

a) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE nằm trên đường thẳng cố định.

b) Tiếp tuyến tại D, E của (ADE) cắt nhau tại P. Chứng minh AP đi qua điểm cố định.

Bài 1.2. Cho tam giác ABC, về phía ngoài tam giác dựng các tam giac ABD và ACE thỏa $\angle ABD = \angle ACE = 90^\circ, \angle DAB = \angle CAE$. Gọi K là giao điểm của AE và BD.

a) Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định.

b) Chứng minh trung điểm của DE thuộc một đường cố định.

Bài 1.3. Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm BC. Đường thẳng qua M vuông góc AB cắt AC tại D, đường thẳng qua M vuông góc AC cắt AB tại E. Vẽ hình bình hành $MDPE$.

a) Chứng minh PB, PC là tiếp tuyến của (ABC).

b) Gọi K là điểm đối xứng của A qua M, H là hình chiếu của K trên BC. Chứng minh D, E, M, H cùng thuộc một đường tròn.

Bài 1.4. Cho tam giác ABC, P là điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. Gọi D, E là hình chiếu của P trên AC và BC. Chứng minh trung trực của DE luôn qua một điểm cố định.

Bài 1.5. Cho tam giác ABC, các điểm P, Q thay đổi trên cạnh BC sao cho $\angle PAB = \angle CAQ$. Gọi D là hình chiếu của B trên AP, E là hình chiếu của C trên AQ và M là trung điểm AB. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MDE luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O và H là trực tâm tam giác. Gọi M là trung điểm OH, gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Chứng minh AM và AI là đẳng giác với góc $\angle BAC$

Bài 1.7. Cho đường tròn (O), dây cung BC không chứa tâm O và điểm A thay đổi trên cung lớn BC. Lấy các điểm E và F thỏa mãn: $\angle ABE = \angle CAE = \angle ACF = \angle BAF = 90^\circ$.

a) Chứng minh rằng $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ và điểm O là trung điểm EF.

b) Hạ AD vuông góc với EF $(D \in EF)$. Chứng minh các tam giác DAB và DCA đồng dạng và điểm D thuộc một đường tròn cố định.

c) Gọi G là giao điểm của AD với đường tròn (O) $(G \neq A)$. Chứng minh AD đi qua một điểm cố định và $GB \cdot AC = GC \cdot AB$.

d) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Chứng minh AK đi qua một điểm cố định.