

ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

Năm học: 2025 - 2026

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

*Đề thi được sưu tầm từ học sinh nên không tránh khỏi sai sót trong quá trình đánh máy.**Rất mong nhận được sự đóng góp từ bạn đọc.***Bài 1.** Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m = 0$.

- a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .
- b) Chứng minh $x_1^4 + x_2^4 > \frac{9}{2}$.
- c) Chứng minh $(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1})(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}) = 1$ khi và chỉ khi $m = -1$.

Lời giải.

- a) Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - 2m = m^2 + 1 > 0$ với mọi m , nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.
- b) Theo định lý Viète, ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ và $x_1x_2 = 2m$. Áp dụng bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \text{ với mọi } a, b;$$

ta được

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &\geq \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{2} = \frac{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2}{2} = \frac{[4(m+1)^2 - 4m]^2}{2} \\ &= \frac{(4m^2 + 4m + 4)^2}{2} = \frac{[(2m+1)^2 + 3]^2}{2} \geq \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1^2 = x_2^2$ và $2m+1 = 0$. Lúc này ta được $x_1 = -x_2$ (vì x_1 và x_2 phân biệt). Tuy nhiên khi đó $2(m+1) = x_1 + x_2 = 0$ hay $m = -1$, mâu thuẫn với $2m+1 = 0$. Như vậy, $x_1^4 + x_2^4 > \frac{9}{2}$.

- c) Nếu $(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1})(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}) = 1$, ta có

$$x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1} = \sqrt{x_1^2 + 1} - x_1, \text{ và } x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1} = \sqrt{x_2^2 + 1} - x_2$$

Cộng vế theo vế, ta được $x_1 + x_2 = 0$, hay $m = -1$.

Ngược lại, nếu $m = -1$, phương trình trở thành $x^2 - 2 = 0$, kéo theo $x = \pm\sqrt{2}$. Khi đó

$$(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1})(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})(-\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 1.$$

Bài 2. Các số thực được viết lên bốn đỉnh của một hình vuông $ABCD$ sao cho thỏa mãn các điều kiện sau đây

- i) Bốn số được viết đôi một phân biệt.
 - ii) Tổng hai số ở hai đỉnh A và B bằng 0.
 - iii) Tổng các số ở các cạnh hình vuông chứa ba đỉnh còn lại là các số phân biệt: 1, 2, 3.
- a) Chỉ ra một cách viết số thỏa mãn đề.
- b) Với các cách viết thỏa mãn đề, tìm cách viết sao cho tổng bình phương các số ghi ở bốn đỉnh là nhỏ nhất.

Lời giải.

- a) Ta chỉ ra một cách như sau: các số ở các đỉnh A, B, C, D lần lượt là 1; -1; 3; 0.
- b) Gọi a, b, c, d lần lượt là 4 số viết tại các đỉnh A, B, C, D . Đặt $T = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Theo đề bài, ta có $a + b = 0$ và $b + c, c + d, d + a \in \{1; 2; 3\}$. Suy ra

$$(b + c) + (c + d) + (d + a) = 6 \Rightarrow c + d = 3.$$

Vậy $b + c, d + a \in \{1; 2\}$. Ta có hai trường hợp:

- 1) $b + c = 1$ và $d + a = 2$. Kết hợp với $a + b = 0$ và $c + d = 3$, ta giải được $c = a + 1 \Rightarrow d = 2 - a$.
Khi đó:

$$T = a^2 + a^2 + (a + 1)^2 + (2 - a)^2 = 4a^2 - 2a + 5 = 4\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{19}{4} \geq \frac{19}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{1}{4}$, khi đó $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$.

- 2) $b + c = 2$ và $d + a = 1$. Kết hợp với $a + b = 0$ và $c + d = 3$, ta giải được $c = a + 2 \Rightarrow d = 1 - a$.
Khi đó:

$$T = a^2 + a^2 + (a + 2)^2 + (1 - a)^2 = 4a^2 + 2a + 5 = 4\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{19}{4} \geq \frac{19}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = -\frac{1}{4}$, khi đó $(a, b, c, d) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

Vậy một cách viết thỏa mãn T nhỏ nhất là $(a, b, c, d) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

Bài 3. Xét m, n là số nguyên dương sao cho

$$m^2 + m + n^2 \text{ chia hết cho } m \cdot n. \quad (1)$$

- (a) Chứng minh không tồn tại m thỏa mãn (1) với $n = 3$.
- (b) Tìm các số nguyên dương m, n thỏa mãn (1) với m chia hết cho n .
- (c) Gọi d là ước chung lớn nhất của m và n . Giả sử m, n thỏa mãn (1), chứng minh rằng $m = d^2$.

Lời giải.

- a) Giả sử khi $n = 3$ thì tồn tại số nguyên dương m thỏa mãn (1). Khi đó

$$m^2 + m + 9 \vdots 3m.$$

Từ đây suy ra $9 \vdots m$, dẫn đến $m \in \{1; 3; 9\}$. Lần lượt kiểm tra từng giá trị của m , ta thu được điều vô lý.

- b) Vì $m \vdots n$ nên $m = kn$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Thay vào (1), ta được

$$k^2n^2 + kn + n^2 \vdots kn^2 \Rightarrow k^2n + k + n \vdots kn.$$

Từ đây suy ra $k + n \vdots kn$, dẫn đến $k \vdots n$ và $n \vdots k$. Vì vậy $k = n$ và khi đó $2k \vdots k^2$, kéo theo $2 \vdots k$ hay $k \in \{1; 2\}$. Như vậy $k = n = 1$ hoặc $k = n = 2$, suy ra $(m; n) = (1; 1)$ hoặc $(m; n) = (4; 2)$, thử lại ta thấy thỏa mãn.

- c) Đặt $d = \gcd(m, n)$, khi đó tồn tại $m_1, n_1 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m = dm_1$, $n = dn_1$ và $\gcd(m_1, n_1) = 1$. Từ (1), ta được

$$d^2m_1^2 + dm_1 + d^2n_1^2 \vdots d^2m_1n_1 \Rightarrow dm_1^2 + m_1 + dn_1^2 \vdots dm_1n_1. \quad (2)$$

Từ (2), ta suy ra $m_1 \vdots d$ và $dn_1^2 \vdots m_1$. Hơn nữa $\gcd(m_1, n_1) = 1$ nên $\gcd(m_1, n_1^2) = 1$, do đó $d \vdots m_1$.

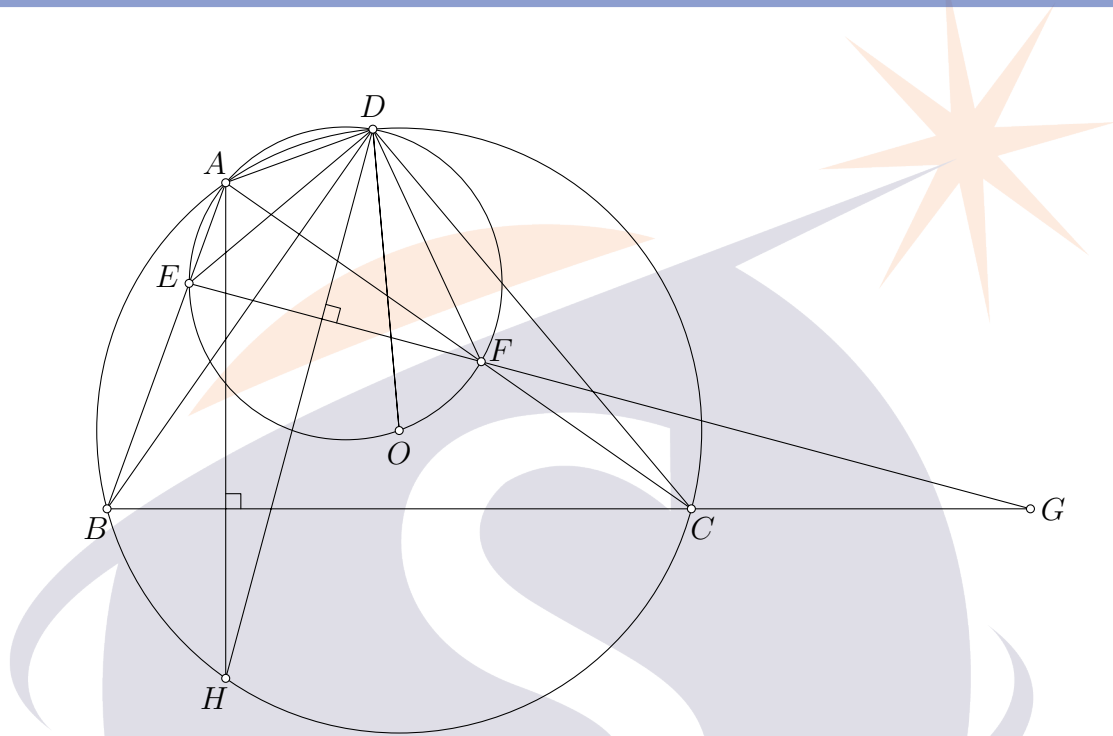
Từ $m_1 \vdots d$ và $d \vdots m_1$, ta được $m_1 = d$. Khi đó $m = dm_1 = d^2$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$. Lấy D trên cung nhỏ AC sao cho $CD > AB$. Đường trung trực DB cắt AB tại E và đường trung trực DC cắt AC tại F .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $ADFE$ nội tiếp một đường tròn đi qua O .
- b) Chứng minh tam giác DEB đồng dạng với tam giác DFC và đường cao từ D trong tam giác FDE cắt đường cao tại A trong tam giác ABC tại một điểm thuộc (O) .

- c) Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADFE$. Tiếp tuyến tại O của (I) cắt tiếp tuyến tại D của O ở S . Lấy R là trung điểm DO và K là giao điểm thứ hai của IS với đường tròn ngoại tiếp tam giác DOS . Chứng minh rằng $\widehat{RKD} = 90^\circ$ và DK đi qua trung điểm IR .

Lời giải.



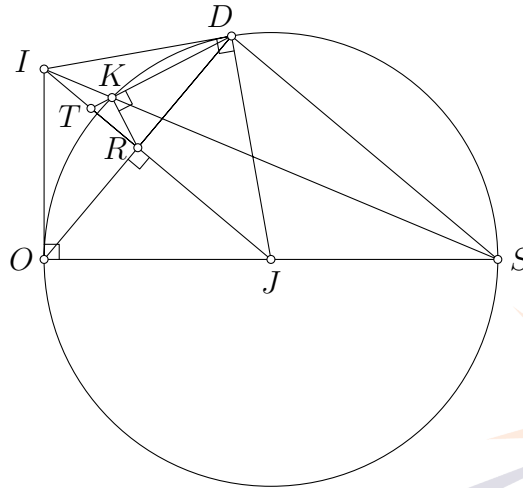
- a) Ta có $\widehat{AED} = 2\widehat{ABD} = 2\widehat{ACD} = \widehat{AFD}$, nên tứ giác $AEFD$ là tứ giác nội tiếp. Mặt khác, ta lại có $\widehat{AOD} = 2\widehat{ABD} = \widehat{AED}$, nên O cũng thuộc (ACD) .
- b) Dễ thấy tam giác DEB và tam giác DFC là hai tam giác cân lần lượt tại E và F có $\widehat{DBE} = \widehat{DCF}$, nên tam giác DEB đồng dạng với tam giác DFC .

Gọi EF cắt BC tại G , đường cao qua A của tam giác ABC cắt đường cao qua D của tam giác DEF tại H . Khi đó, ta có

$$\widehat{AHD} = \widehat{EGB} = \widehat{AEF} - \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADF} - (180^\circ - \widehat{ADC}) = \widehat{FDC} = \widehat{ACD}.$$

Từ đó, ta được H cũng thuộc (O) .

- c) Gọi J là trung điểm OS . Ta có JR là đường trung bình của tam giác DOS , do đó ta thấy JR là trung trực của OD nên đi qua I .



Từ đó ta có $IR \cdot IJ = ID^2 = IK \cdot IS$ (do ID là tiếp tuyến của (ODS)). Vì vậy ta suy ra R, J, K, S cùng thuộc một đường tròn. Khi đó

$$\widehat{DKR} = \widehat{DKS} + \widehat{SKR} = \widehat{DOS} + \widehat{RJO} = 90^\circ.$$

Cho DK cắt IR tại T . Vì tam giác DTR vuông tại R có RK là đường cao nên

$$TR^2 = TK \cdot TD. \quad (3)$$

Mặt khác, ta lại có $\widehat{TIK} = \widehat{DSK} = \widehat{IDK}$ nên tam giác TIK đồng dạng với tam giác TDI , từ đó

$$TI^2 = TK \cdot TD. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta được T là trung điểm của IR , kết thúc chứng minh.

Bài 5. Cho bảng 2×9 và số nguyên dương $k \leq 18$. An và Bình chơi game. An chọn trước 1 ô trên bảng và không cho Bình biết. Luật chơi như sau: sau khi An chọn 1 ô trên bảng và không cho Bình biết, Bình chọn k ô và hỏi xem có ô của An đã chọn không. Nếu có thì Bình thắng, còn không thì An sẽ di chuyển ô mình chọn sang ô có chung cạnh với ô trước đó. Tiếp tục như vậy.

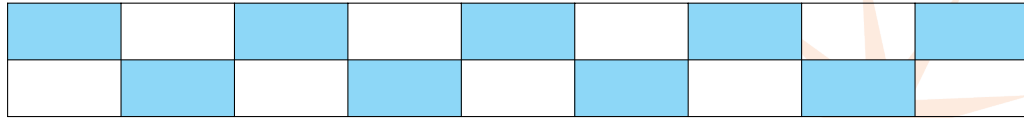
- Với $k = 4$, chứng minh Bình có chiến thuật thắng sau không quá 8 lượt chơi.
- Với $k = 2$, chứng minh Bình có chiến thuật thắng sau không quá 16 lượt chơi.

Lời giải.

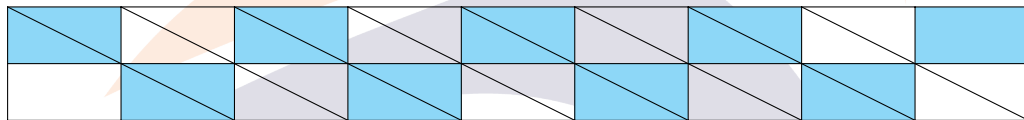
- Bình thực hiện việc chọn 4 ô mỗi lượt như sau: Mỗi lượt, Bình chọn 4 ô của bảng vuông 2×2 từ phía ngoài cùng bên trái. Khi đó nếu trong 4 ô được chọn có chứa ô An chọn thì Bình thắng. Ngược lại, nếu ở bước thứ n ($1 \leq n \leq 8$) mà Bình không chọn trúng ô của An thì ô mà An chọn ở trước đó sẽ nằm trong bảng vuông $2 \times (9 - n - 1)$. Khi đó hoặc An di chuyển ô vuông đã chọn

sang ô vuông kề bên trái, hoặc vẫn nằm trong bảng vuông $2 \times (9 - n - 1)$. Khi đó ở bước thứ $n + 1$, 4 ô mà Bình chọn hoặc chứa ô vuông của An hoặc nếu không thì cứ tiếp tục cho đến khi Bình chọn đến bảng 2×2 cuối cùng thì chắc chắn sẽ chọn trùng ô của An. Do có 8 bảng 2×2 nên Bình sẽ thắng sau không quá 8 lượt chơi.

b) Tô màu xen kẽ các ô trên bảng vuông 2×9 màu xanh và trắng như sau:



Ở mỗi lượt trong 8 lượt đầu, Bình chọn 2 ô nằm trên mỗi đường chéo như hình dưới, lần lượt từ trái qua phải.

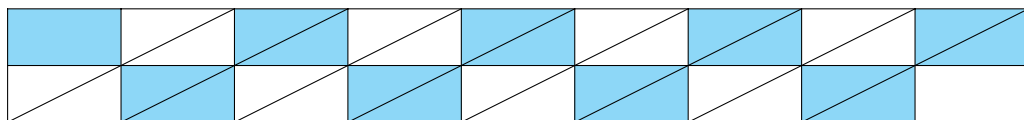


Nếu ban đầu (lượt thứ nhất) An chọn ô màu xanh thì sau mỗi lượt (khi Bình đã chọn), ô của An và 2 ô của Bình luôn cùng màu. Sau bước thứ 7 (nếu Bình vẫn chưa bắt được), An phải nằm trên 1 ô màu xanh nào đó, và ở bên phải đường chéo thứ 7 sau khi Bình đã chọn.

- Thật vậy, nếu An nằm bên trái đường chéo, thì phải có một lượt (sau khi Bình đã chọn) mà ô của An nằm kế bên phải 1 trong 2 ô trên đường chéo của Bình (do ô màu xanh của An chọn ban đầu luôn nằm bên phải hoặc nằm trên đường chéo thứ nhất), tức ô của An và 2 ô của Bình khác màu nhau, vô lý.

Nói cách khác, An chỉ có thể nằm ở góc phải trên cùng màu xanh. Đến lượt thứ 8, An di chuyển đến 1 trong 2 ô màu trắng kế bên ô đó, và Bình chọn 2 ô trên đường chéo cuối sẽ bắt được ô của An.

Nếu sau 8 bước như vậy mà vẫn không bắt được An, thì ban đầu An chọn ô có màu trắng. Sau lượt thứ 9 của An, An cũng sẽ nằm trên 1 ô màu trắng, và Bình sẽ lần lượt chọn 2 ô trên mỗi đường chéo từ trái qua phải như hình dưới.



Lập luận tương tự như trên, Bình sẽ bắt được An sau nhiều nhất 8 bước nữa. Như vậy, sau nhiều nhất 16 bước, Bình chọn được 2 ô mà có ô của An.

— HẾT —