§9. CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Huỳnh Trung Hiếu

Bài giảng này đề cập đến các tính chất và bài bài toán liên quan đến số chính phương. Chúng ta tìm hiểu những tính chất thú vị của số chính phương từ đó giúp giải quyết các bài toán thi học sinh giỏi trong và ngoài nước.

A Một số lưu ý về lý thuyết

Định nghĩa 1.6. Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên.
Ví dụ các số 0, 1, 4, 9, 16 là 5 số chính phương đầu tiên.

Khi chia một số chính phương n^2 cho số nguyên $m > 1$ nào đó, ta không nhận được đầy đủ các số dư $0, 1, 2, \ldots, m-1$ mà có một vài số dư nhất định, tùy thuộc vào giá trị m. Chẳng hạn khi $m = 3$ hoặc $m = 4$ thì số dư khi chia n^2 là 0 hoặc 1, khi $m = 5$ thì số dư là $0, 1, 4$.

Tính chất 1.2.
a) Nếu hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $(a, b) = 1$ và $ab = n^2$ thì bản thân mỗi số a, b phải là số chính phương. Tổng quát hơn, nếu $(a, b) = d$ và $ab = n^2$ thì $a = da_1^2, b = db_1^2$ với các số $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$.
b) $n^2 < k < (n+1)^2$ thì k không thể là số chính phương.

Các bài toán thường gặp về số chính phương: giải phương trình nghiệm nguyên, chứng minh đẳng thức, tìm các ràng buộc giữa các số trong đẳng thức, ... thường xuất hiện trong vai trò một bài toán số học trong các kỳ thi tuyển sinh THPT chuyên, kỳ thi HSG các cấp THPT.

B Các ví dụ

Ví dụ 9.1. Cho n là số tự nhiên.
a) Chứng minh rằng $n^2 + 3n + 4$ không chia hết cho 6.
b) Chứng minh rằng $(3n+1)(5n+3)$ không là số chính phương.

Lời giải:

a) Xét số dư của số đã cho khi chia cho 3, ta thấy $n^2 + 1$ không bao giờ chia hết cho 3 vì n^2 khi chia cho 3 dư $0, 1$. Mà $3n + 3$ chia hết cho 3 nên $n^2 + 1 + 3n + 3$ không chia hết cho 3 và nó cũng không chia hết cho 6.

b) Giả sử $(3n+1)(5n+3) = m^2$. Đặt $d = (3n+1, 5n+3)$ thì $d | 3n+1, d | 5n+3 \rightarrow d | 5(3n+1) - 3(5n+3) = -4$ nên $d \in \{1, 2, 4\}$. Ta xét các trường hợp:

- Nếu $d = 1$ thì $3n+1, 5n+3$ đều là số chính phương. Điều này vô lý vì $5n+3$ chia 5 dư 3.
- Nếu $d = 4$ thì cũng tương tự, các số trên đều là số chính phương, cũng vô lý.
- Nếu $d = 2$ thì $3n+1 = 2x^2, 5n+3 = 2y^2$, chú ý rằng $2x^2$ chia 3 dư 0 hoặc 2, trong khi $3n+1$ chia 3 dư 1, cũng vô lý.

Do đó trong mọi trường hợp thì biểu thức trên không thể là số chính phương.

Ví dụ 9.2. Tìm các số nguyên dương n sao cho các biểu thức sau đây là số chính phương
a) $A = n^2 + 3n$.
b) $B = 7n + 4$.
c) $C = n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$.

Lời giải:

a)) Ta thấy $n^2 < n^2 + 3n < (n+2)^2$ nên ta phải có $n^2 + 3n = (n+1)^2$, suy ra $n = 1$.

b) Đặt $7n + 4 = m^2$ thì m phải chia 7 dư 2 hoặc 5 thì lần lượt viết $m = 7k + 2, m = 7k - 2$ với $k \in \mathbb{Z}^+$. Thay vào ta có

$$7n + 4 = (7k \pm 2)^2 \Rightarrow 7n = 49k^2 \pm 28k \Rightarrow n = 7k^2 \pm 4k.$$

Đó chính là tất cả các số n cần tìm.

c) Ta có

$$4C = 4n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 4n + 1 < 4n^4 + 4n^3 + 9n^2 + 4n + 4 = (2n^2 + n + 2)^2,$$

mà $4C > 4n^4 + 4n^3 + n^2 = (2n^2 + n)^2$ nên ta phải có $4C = (2n^2 + n + 1)^2$ hay $n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow n = 3$. Vậy $n = 3$ là giá trị duy nhất thỏa mãn.

Chú ý rằng bài toán này hình thức đơn giản nhưng việc nhân thêm số 4 vào rồi đánh giá như trên thực sự không dễ nghĩ ra.

Ví dụ 9.3.
a) Cho các số nguyên a, b, c sao cho $3a + 4b = 5c$, chứng minh rằng $a^2 + b^2 - c^2$ là số chính phương.
b) Cho các số nguyên a, b thỏa mãn đẳng thức $(a - b)^2 = a + 8b - 16$. Chứng minh rằng a là số chính phương.

Lời giải:

a) Ta có đẳng thức sau

$$25(a^2 + b^2) = (3^2 + 4^2)(a^2 + b^2) = (3a + 4b)^2 + (4a - 3b)^2 = 25c^2 + (4a - 3b)^2.$$

Suy ra $a^2 + b^2 - c^2 = \left(\frac{4a - 3b}{5}\right)^2$ là số chính phương (vì vế phải là bình phương của số hữu tỷ, còn vế trái là số nguyên).

b) Đẳng thức đã cho có thể viết lại thành phương trình bậc hai theo biến b như sau:

$$b^2 - 2b(a + 4) + a^2 - a + 16 = 0.$$

Khi đó, ta có $\Delta' = (a + 4)^2 - (a^2 - a + 16) = 9a$ phải là số chính phương, suy ra a cũng là số chính phương.

Ví dụ 9.4.

a) Các số nguyên dương lẻ a, b thỏa mãn $a^b b^a$ là số chính phương. Chứng minh rằng ab cũng là số chính phương.

b) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $c(ac+1)^2 = (2c+b)(3c+b)$. Chứng minh rằng c là số chính phương.

Lời giải:

a) Giả sử $a \geq b$ thì ta viết $a^b b^a = (ab)^b b^{a-b}$. Vì a, b lẻ nên $a - b$ chẵn kéo theo b^{a-b} là số chính phương. Vì thế nên $(ab)^b$ cũng chính phương, nhưng b lẻ nên phải có ab chính phương.

b) Ta có

$$(2c+b)(3c+b) = 6c^2 + 5bc + b^2,$$

mà vế trái chia hết cho c nên $c|b^2$. Đặt $c = mn^2$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$ (số m không có ước chính phương nào khác 1) thì số b sẽ có dạng $b = kmn$. Đẳng thức đã cho viết lại thành

$$(amn^2+1)^2 = m(2n+k)(3n+k)$$

hay $m|(amn^2+1)^2$.

Điều này cho thấy $m = 1$ nên c là số chính phương.

Ví dụ 9.5. Tìm các số tự nhiên n sao cho các biểu thức sau đây là số chính phương

a) $M = 3^n + 63$.

b) $K = 13 + 2 \cdot n!$.

c) $P = 1! + 2! + 3! + \cdots + n!$.

Lời giải:

a) Đặt $3^n + 63 = m^2$. Nếu $n = 0$ thì $M = 64$ thỏa mãn. Số dư của M khi chia cho 4 là $(-1)^n + 3$ nên phải có n chẵn, vì nếu không thì số dư trên sẽ là 2, không thỏa. Khi n chẵn, đặt $n = 2k$ thì

$$3^{2k} + 63 = m^2 \Rightarrow 63 = (m - 3^k)(m + 3^k).$$

Nếu $k \geq 4$ thì $m + 3^k > 81$,không thỏa nên $k \in \{1, 2, 3\}$. Thử trực tiếp, ta thấy $k = 2$ thỏa, và khi đó $n = 4$.

Vậy các giá trị cần tìm là $n = 0, n = 4$.

b) Nếu $n \geq 5$ thì K chia 5 dư 3, không thỏa.

Thử trực tiếp với $n = 1, 2, 3, 4$, ta thấy có $n = 3$ thỏa vì khi đó $K = 13 + 2 \cdot 6 = 25$.

3) Với $k \geq 5$ thì $k!$ chia hết cho 10 nên chữ số tận cùng của P bằng với chữ số tận cùng của $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$ và là 3. Tuy nhiên, số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là $0, 1, 4, 5, 6, 9$ nên không thỏa.

Thử trực tiếp với $n = 1, 2, 3, 4$ ta thấy P cũng không là số chính phương. Do đó, không tồn tại n thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 9.6.

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $1 + p \cdot 2^p$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n \cdot 2^{n-1} + 1$ là số chính phương.

Lời giải:

a) Với $p = 2, p = 3$ biểu thức trên tương ứng là $9, 25$ thỏa mãn đề bài.

Xét $p \geq 5$ và giả sử tồn tại $x \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $1 + p \cdot 2 = x^2$ thì

$$p \cdot 2^p = (x-1)(x+1).$$

Rõ ràng $x - 1, x + 1$ cùng tính chẵn lẻ, mà vế trái là số chẵn nên cả hai số này phải cùng chẵn. Ta viết

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right) = p \cdot 2^{p-2}.$$

Để ý rằng $\gcd\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = 1$ nên ta phải có $p, 2^{p-2}$ có một số là $\frac{x+1}{2}$ và số kia là $\frac{x-1}{2}$, nghĩa là hiệu của hai số phải bằng 1. Suy ra $\left|2^{p-2} - p\right| = 1$. Tuy nhiên, với $p \geq 5$, bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $2^{p-2} > p + 1$ nên đẳng thức trên không thể xảy ra.

Vậy tất cả các số nguyên tố cần tìm là $p = 2, 3$.

b) Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $n \cdot 2^{n-1} + 1 = k^2$ hay

$$n \cdot 2^{n-1} = (k-1)(k+1).$$

Bằng cách làm tương tự câu trên, ta thấy trong hai số $k - 1, k + 1$ có một số chia hết cho 4 và một số chia 4 dư 2. Do đó có hai trường hợp:

a) Nếu $k + 1$ chia 4 dư 2 thì $k - 1 = a \cdot 2^{n-2}$ với $a \in \mathbb{Z}^+$ hay $n = a \cdot 2^{n-2} + 1$. Dễ thấy $(a, n) = (2, 3), (1, 5)$ là các nghiệm, nếu $n > 5$ thì ta có $n < 2^{n-3} + 1$ nên đẳng thức trên không thể xảy ra. Thử lại ta thấy chỉ có $n = 5$ là thỏa mãn.

b) Nếu $k - 1$ chia 4 dư 2 thì $k + 1 = a \cdot 2^{n-2}$ với $a \in \mathbb{Z}^+$, thay vào đẳng thức trên suy ra $n = a \cdot 2^{n-3} - 1$. Dễ thấy $(a, n) = (4, 3)$ là nghiệm duy nhất, thử lại ta thấy không thỏa mãn đề bài.

Vậy số nguyên dương $n = 5$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Ví dụ 9.7. Giả sử rằng với n nguyên dương, ta có $n^3 + n^2 + n + 1$ là số chính phương. Chứng minh rằng $\frac{n+1}{2}$ là số chính phương.

Lời giải:

Ta thấy $n^3 + n^2 + n + 1 = (n+1)(n^2+1)$. Đặt $d = (n + 1, n^2 + 1)$ thì

$$d | n + 1 \Rightarrow d | n^2 + n,$$

mà $d | n^2 + 1$ nên $d | n - 1$. Do đó $d | 2$, kéo theo $d \in \{1, 2\}$. Ta có các trường hợp:

- Nếu $d = 1$ thì các số $n + 1, n^2 + 1$ đều chính phương, vô lý vì $n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2$.
- Nếu $d = 2$ thì đặt $n + 1 = 2x^2, n^2 + 1 = 2y^2$. Khi đó, rõ ràng $\frac{n+1}{2}$ là số chính phương.

Ví dụ 9.8. Cho các số nguyên dương a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác, không có ước nguyên dương nào chung lớn hơn 1. Giả sử rằng

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$$

đều là các số nguyên. Chứng minh rằng $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ là số chính phương hoặc là 2 lần của số chính phương.

Lời giải:

Ta có

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c} = \frac{(a+b)^2-c^2-2ab}{a+b-c} = a+b+c-\frac{2ab}{a+b-c}$$

là số nguyên, kéo theo $2ab$ chia hết cho $a+b-c$. Tương tự ta cũng có $2bc$ chia hết cho $b+c-a$, còn $2ca$ chia hết cho $c+a-b$. Do đó

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \mid 8(abc)^2.$$

Đặt S là diện tích tam giác tương ứng với các cạnh a, b, c thì

$$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b). \; (*)$$

Khi đó, tồn tại số k để $8(abc)^2(a+b+c) = 16kS^2 \Rightarrow 2kS^2 = (a+b+c)(abc)^2$.

a) Nếu $\gcd(k, a+b+c) = 1$ thì $\dfrac{a+b+c}{2k} = \left(\dfrac{S}{abc}\right)^2$ là bình phương của số hữu tỷ. Nếu $2k$ là số chính phương thì $a+b+c$ cũng chính phương, từ $(*)$ suy ra đpcm, còn nếu k là số chính phương thì $\dfrac{a+b+c}{2}$ là số chính phương, ta cũng có đpcm.

b) Nếu $\gcd(k, a+b+c) > 1$ thì gọi p là một ước nguyên tố chung nào đó giữa k và $a+b+c$. Tuy nhiên, nếu $p > 2$ thì $p|abc$, giả sử $p|a$ thì kéo theo $p|b+c$ nên $p|b+c-a$ và $p|bc$. Suy ra $p|b, p|c$, mâu thuẫn vì a, b, c không có ước chung lớn hơn 1. Do đó, $p = 2$ và ta cũng đưa về tương tự trường hợp trên.

Ví dụ 9.9. Cho các số nguyên dương a, b, c, d đôi một phân biệt sao cho $a+b = c+d = p$ với số nguyên dương lẻ $p > 3$. Chứng minh rằng $abcd$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử rằng $abcd = n^2$ với số nguyên dương $n \in \mathbb{Z}^+$. Ta cũng sắp thứ tự các số $a < c < d < b$. Khi đó, ta có

$$bd + ac - ad - bc = (b-a)(d-c) > 0,$$

nên

$$ad + bc < \frac{1}{2}(ad+bc+bd+ac) = \frac{(a+b)(c+d)}{2} = \frac{p^2}{2}.$$

Ký hiệu $\gcd(ad, bc) = k \in \mathbb{Z}^+$ thì $ad = ku^2, bc = kv^2$ với $u, v \in \mathbb{Z}^+$, và $u < v, \gcd(u, v) = 1$. Từ a, b, c, d nguyên tố cùng nhau với p ta suy ra $\gcd(k, p) = 1$. Do đó

$$k(v^2-u^2) = bc - ad = (p-a)c - a(p-c) = p(c-a).$$

Thế nên $p|v^2 - u^2$ vì $\gcd(k,p) = 1$. Suy ra, $p|v-u$ hoặc $p|v+u$. Trong cả hai trường hợp, ta đều có $u+v \geq p$. Từ đó ta có thể kết luận rằng

$$ad + bc = k(u^2+v^2) > k\frac{(u+v)^2}{2} \geq \frac{p^2}{2}$$

theo bất đẳng thức Cô-si.

Tuy nhiên, điều này mâu thuẫn với đánh giá ở trên nên $abcd$ không thể là số chính phương.

Ví dụ 9.10. Cho a,b,c,d là các số nguyên dương sao cho $a < b \leq c < d$, $ad = bc$ và $\sqrt{d} - \sqrt{a} \leq 1$. Chứng minh rằng a là số chính phương.

Lời giải:

Đặt $b = a + x;\ c = a + x + y;\ d = a + x + y + z$ với $x, z > 0$ và $y \geq 0$. Ta có

$$a(a+x+y+z) = (a+x)(a+x+y) \Leftrightarrow a(z-x) = x^2 + xy$$

và

$$\sqrt{a+x+y+1} \leq \sqrt{a} + 1 \Leftrightarrow x+y+z-1 \leq 2\sqrt{a}.$$

Ta thấy rằng từ đẳng thức thứ nhất, ta có $z - x > 0$ hay $z \geq x+1$ nên $a \leq x^2 + xy$. Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$2\sqrt{a} \leq 2\sqrt{x^2+xy} = 2\sqrt{x(x+y)} \leq x + x + y \leq z - 1 + x + y = x + y + z - 1.$$

Đẳng thức phải xảy ra nên $y = 0 \Rightarrow a = x^2$.

Ví dụ 9.11. (JBMO 2014) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương a, b sao cho $ab, a+b$ đều là các số chính phương, ngoài ra $16a - 9b$ là số nguyên tố.

Lời giải:

Đặt $\gcd(a,b) = d$ và $a = da_1, b = db_1$ thì $\gcd(a_1,b_1) = 1$. Ta có $d(16a_1 - 9b_1)$ là số nguyên tố. Ta xét các trường hợp sau

a) Nếu $d = 1$ thì $a = u^2, b = v^2$ và $p = 16u^2 - 9v^2 = (4u-3v)(4u+3v)$. Do đó $4u - 3v = 1, 4u + 3v = p$. Suy ra $p + 1 = 8u, p - 1 = 6v$ kéo theo$p$ chia 8 dư 7, chia 3 dư 1 nên p chia 24 dư 7, đặt $p = 24t + 7$, thì $u = 3t+1, v = 4t+1$. Do đó $(3t+1)^2 + (4t+1)^2 = 25t^2 + 14t + 2$ là số chính phương.

   Tuy nhiên điều này vô lý vì $(5t+1)^2 < 25t^2 + 14t + 2 < (5t+2)^2$.

b) Nếu $16a_1 - 9b_1 = 1$ thì tồn tại $t \in \mathbb{Z}^+$ để $a_1 = 9t + 4, b_1 = 16t + 7$ nên

$$ab = d^2 a_1 b_1 = d^2(9t+4)(16t+7) = d^2(144t^2 + 127t + 28)$$

   Tuy nhiên, $(12t+5)^2 < 144t^2 + 127t + 28 < (12t+6)^2$ với mọi $t \in \mathbb{Z}^+$ nên biểu thức trên không thể là số chính phương.

Do đó, trong mọi trường hợp, các số a, b là không tồn tại.

Ví dụ 9.12. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương x, y sao cho $x^2 + 8y$ và $y^2 + 8x$ là các số chính phương.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y$, khi đó

$$x^2 < x^2 + 8y < (x+4)^2.$$

Mà $x^2 + 8y$ cùng tính chẵn lẻ với x^2 nên chỉ có thể là $x^2 + 8y = (x+2)^2$ hay $x = 2y - 1$. Khi đó $y^2 + 8x = y^2 + 16y - 8 = (y+2)^2 + 12y - 12 \geq (y+2)^2$ và $y^2 + 16y - 8 < (y+8)^2$. Tương tự, ta cũng thấy rằng $y^2 + 8x$ cùng tính chẵn lẻ với y^2 nên có các trường hợp

- Nếu $y^2 + 16y - 8 = (y+2)^2 \Rightarrow y = 1$. Khi đó $x = 1$.
- Nếu $y^2 + 16y - 8 = (y+4)^2 \Rightarrow y = 3$. Khi đó $x = 5$.
- Nếu $y^2 + 16y - 8 = (y+6)^2 \Rightarrow y = 11$. Khi đó $x = 21$.

Thử lại ta thấy đều thỏa. Vậy các cặp số cần tìm là $(x, y) = (1, 1), (3, 5), (11, 21)$.

Ví dụ 9.13. (Dựa theo đề thi tuyển sinh PTNK 2013) Số nguyên dương n được gọi là "tốt" nếu như tổng bình phương các ước của nó (tính cả 1 và n) thì bằng $(n+3)^2$.

a) Chứng minh rằng 287 là số tốt.

b) Giả sử với hai số nguyên tố p, q nào đó (không nhất thiết phân biệt) thì $n = pq$ là số tốt, chứng minh rằng $n + 2$ và $2(n+1)$ là các số chính phương.

Lời giải:

a) Ta có $n = 287 = 7 \cdot 41$, nên tổng bình phương các ước của nó là

$$1^2 + 7^2 + 41^2 + 7^2 \cdot 41^2 = (1^2 + 7^2)(1^2 + 41^2) = 50 \cdot 1682 = 100 \cdot 841 = 290^2 = (287+3)^2.$$

Suy ra $n = 287$ là số tốt.

b) Ta xét hai trường hợp sau: Nếu như $p = q$ thì các ước của $n = p^2$ là $1, p, p^2$ nên n là số tốt khi $(p^2+3)^2 = 1 + p^2 + p^4$ hay $5p^2 + 8 = 0$, vô nghiệm. Suy ra $p \neq q$ và các ước của $n = pq$ là $1, p, q, pq$. Nếu n là tốt thì $(pq+3)^2 = 1 + p^2 + q^2 + p^2q^2$ hay

$$6pq + 8 = p^2 + q^2 \to \begin{cases} 4(pq+2) = (p-q)^2 \\ 8(pq+1) = (p+q)^2 \end{cases}$$

Do $(p-q)^2$ và 4 là các số chính phương nên $n + 2 = pq + 2$ cũng phải là số chính phương. Tương tự, $2(n+1) = \dfrac{(p+q)^2}{4}$ cũng là số chính phương.

Ví dụ 9.14. Tìm tất cả các số nguyên dương n, k sao cho $2^k + 10n^2 + n^4$ là số chính phương.

Lời giải:

Đặt $m = 2^k + 10n^2 + n^4$. Ta xét các trường hợp sau:

a) Nếu n lẻ thì m chia 8 dư $3, 5, 7$, không thể là số chính phương. Do đó n phải chẵn.

b) Nếu $n = 2$ thì $m = 2^k + 56$. Khi đó $k \geq 4$ sẽ kéo theo m chia hết 8 chứ không chia hết cho 16, cũng không thể là số chính phương. Thử các trường hợp $k \in \{1, 2, 3\}$ ta có $k = 3$ thì $m = 64$.

c) Nếu $n \geq 4$ và n chẵn, ta có $m > (n^2+4)^2$, mà m cùng tính chẵn lẻ với n^2 nên $m \geq (n^2+6)^2$. Do đó $2^k + 10n^2 + n^4 \geq (n^2+6)^2 \Rightarrow 2^k \geq 2n^2 + 36$. Đặt $n = k \cdot 2^t$ với $t \geq 1$ và k lẻ, trong đó $t, k \in \mathbb{Z}^+$. Vì $2^k \geq 2n^2 + 36 > 2n^2 = k \cdot 2^{2t} \Rightarrow k - 2t \geq 2$. Ta có

$$m = 2^k + 10k^2 \cdot 2^{2t} + k^4 \cdot 2^{4t} = 2^{2t}(2^{k-2t} + 10k^2 + k^4 \cdot 2^{2t})$$

chú ý rằng biểu thức trong ngoặc chia 4 dư 2 do $2^{k-2t}, k^4 \cdot 2^{2t}$ đều chia hết cho 4 còn k^2 lẻ. Điều này không thể xảy ra vì m là số chính phương.

Từ đó ta thấy rằng chỉ có $(n,k) = (2,3)$.

Ví dụ 9.15. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $2^{a!} + 2^{b!}$ là số chính phương.

Lời giải:

Nếu $a = b = 1$ thì $2^{a!} + 2^{b!} = 4$. Còn nếu $a = b > 1$ thì $a!, b!$ là các số chẵn, đặt chúng là $2k$ thì

$$2^{a!} + 2^{b!} = 2 \cdot 2^{a!} = 2^{a!+1} = 2^{2k+1},$$

không thể là số chính phương. Nếu $a \neq b$, giả sử rằng $a > b$ thì $2^{b!}(2^{a!-b!}+1)$. Ta có các trường hợp sau

- Nếu $b = 1$ thì $2^{a!} + 2 = x^2 + 2$, không thể là số chính phương.
- Nếu $b > 1$ thì $2^{a!-b!} + 1 = x^2 + 1$, cũng không thể là số chính phương.

Vậy tất cả các cặp số cần tìm là $(a,b) = (1,1)$.

Bằng cách tương tự trên, ta có thể bài toán sau: Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho $2^{a!} + 2^{b!} + 2^{c!}$ là một lập phương đúng.

Ví dụ 9.16. Hai tập hợp các số nguyên dương A, B được gọi là "liên kết" nhau nếu chúng đều khác rỗng và với mọi $a \in A$, mọi $b \in B$ thì số $ab + 1$ là chính phương.

a) Với tập hợp $A = \{1,2,3,4\}$, chứng minh rằng không có tập hợp B nào liên kết với A.

b) Xét hai tập hợp A, B liên kết nhau, $a_1, a_2 \in A$; $b_1, b_2 \in B$ sao cho $a_1 > a_2, b_1 > b_2$. Chứng minh rằng $a_1b_1 > 13a_2b_2$.

Lời giải:

a) Giả sử tồn tại tập hợp B liên kết với A thì xét $n \in B$. Ta phải có $n + 1 = x^2, 4n + 1 = y^2$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ nào đó. Khi đó

$$x^2y^2 = (n+1)(4n+1) = 4n^2 + 5n + 1.$$

Chú ý rằng $(2n+1)^2 < 4n^2 + 5n + 1 < (2n+2)^2$ nên đây không thể là số chính phương, vô lý.

Do đó, không tồn tại tập hợp B nào thỏa mãn.

b) Vì $a_1 > a_2, b_1 > b_2$ nên $(a_1b_1+1)(a_2b_2+1) > (a_1b_2+1)(a_2b_1+1)$ hay

$$\sqrt{(a_1b_1+1)}\sqrt{(a_2b_2+1)} > \sqrt{(a_1b_2+1)}\sqrt{(a_2b_1+1)}.$$

Chú ý rằng biểu thức dưới dấu căn đều là các số chính phương nên cả hai vế đều nguyên và ta có

$$\sqrt{(a_1b_1+1)}\sqrt{(a_2b_2+1)} \geq \sqrt{(a_1b_2+1)}\sqrt{(a_2b_1+1)}+1.$$

Bình phương và khai triển, ta đi đến

$$a_1b_1+a_2b_2 \geq a_1b_2+a_2b_1+2\sqrt{(a_1b_2+1)(a_2b_1+1)}+1 > a_1b_2+a_2b_1+2\sqrt{a_1a_2b_1b_2}.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$a_1b_2+a_2b_1 \geq 2\sqrt{a_1a_2b_1b_2},$$

nên ta có

$$a_1b_1+a_2b_2 \geq 4\sqrt{a_1a_2b_1b_2} \text{ hay } \frac{a_1b_1}{a_2b_2}+1 \geq 4\sqrt{\frac{a_1b_1}{a_2b_2}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{a_1b_1}{a_2b_2}}$ thì $t^2-4t+1 \geq 0$ hay $t \geq 2+\sqrt{3}$ nên

$$\frac{a_1b_1}{a_2b_2} > (2+\sqrt{3})^2 = 7+4\sqrt{3} > 7+4\cdot\frac{3}{2} = 13.$$

Ta có điều phải chứng minh.

C Bài tập rèn luyện

Bài tập 9.1. Ký hiệu $A=\underbrace{111\ldots11}_{2m \text{ chữ số}}, B=\underbrace{444\ldots44}_{m \text{ chữ số}}$. Chứng minh rằng $A+B+1$ là số chính phương. Tìm chữ số hàng đơn vị của $\sqrt{A+B+1}$.

Bài tập 9.2. Chứng minh rằng số các ước của số nguyên dương n là lẻ khi và chỉ khi n là số chính phương. Từ đó chỉ ra rằng số các ước của số $n^{2018}+3$ là số chẵn với mọi $n>1$.

Bài tập 9.3. Tìm tất cả các số tự nhiên x để các số sau đây là số chính phương:
a) $n=x^2+7x+4$.
b) $m=x^3+16$.
c) $k=7^x+15$.

Bài tập 9.4. Cho n là số tự nhiên khác 0 và d là ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh rằng n^2+d không phải là số chính phương.

Bài tập 9.5. Tìm tất cả các số nguyên a để phương trình $x^2-(3+2a)\,x+40-a=0$ có nghiệm nguyên x.

Bài tập 9.6. *(Bài toán về phương trình Pytago)* Giả sử các số nguyên dương x, y, z không có ước nguyên tố chung và $x^2+y^2=z^2$. Chứng minh rằng tồn tại $m, n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $z=m^2+n^2$ và số xyz chia hết cho 60.

Bài tập 9.7. Chứng minh rằng không tồn tại n nguyên dương sao cho $(n^2+1)(5n^2+9)$ là số chính phương.

Bài tập 9.8. Cho bốn số nguyên dương a, b, c, d sao cho tích của ba số bất kỳ trong đó là số chính phương. Chứng minh rằng mỗi số a, b, c, d cũng đều là số chính phương.

Bài tập 9.9. Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $\gcd(a, b, c) = 1$ và $a|bc, b|ca, c|ab$. Chứng minh rằng $\dfrac{bc}{a}$ là số chính phương.

Bài tập 9.10. Cho hai số nguyên dương ab nguyên tố cùng nhau sao cho ab chia hết cho $a-b$. Chứng minh rằng $a-b$ là số chính phương.

Bài tập 9.11. Giả sử $2^9+2^6+2^n$ là số chính phương với n nguyên dương nào đó. Chứng minh rằng $n=10$.

Bài tập 9.12. *(Hàn Quốc, 2011)* Cho các số nguyên dương x, y nguyên tố cùng nhau và $x+3y^2$ là số chính phương. Chứng minh rằng x^2+9y^4 không thể là số chính phương.