

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. (2 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a + b + c = 1$. Đặt $x = \frac{2ab}{a+b}, y = \frac{2bc}{b+c}, z = \frac{2ca}{c+a}$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{-xy + yz + zx} + \frac{1}{xy - yz + zx} + \frac{1}{xy + yz - zx} = \frac{1}{xyz}$$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(x+y) = 3\left(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$$

Lời giải.

a) Ta có: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right); \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right); \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$

Khi đó:

$$\frac{xyz}{-xy + yz + zx} = \frac{1}{-\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{1}{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} = b$$

Như vậy: $\frac{xyz}{-xy + yz + zx} + \frac{xyz}{xy - yz + zx} + \frac{xyz}{xy + yz - zx} = a + b + c = 1$ b) $a = \sqrt[3]{x}; b = \sqrt[3]{y}$. Hệ trở thành:

$$\begin{cases} 2(a^3 + b^3) = 3(a^2b + ab^2) \\ a + b = 6 \end{cases}$$

Biến đổi tương đương phương trình thứ nhất ta có: $(a+b)(2a^2 - 2ab + 2b^2 - 3ab) = 0 \Leftrightarrow ab = 8$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x; y) = \{(64; 8), (8; 64)\}$ □

Bài 2. (1,5 điểm) Cho các số x, y, z thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

a) Chứng minh $-2 \leq x + y \leq 2$.

b) Chứng minh $x + y + z \leq xyz + 2$.

Lời giải.

a) Ta có $2xy \leq x^2 + y^2 \leq 2$.

Khi đó $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2 - z^2 + 2xy \leq 4$.

Suy ra $-2 \leq x + y \leq 2$.

b) Áp dụng bất đẳng thức BCS ta có:

$$|x(1 - yz) + (y + z)| \leq \sqrt{[x^2 + (y + z)^2] [(1 - yz)^2 + 1]}$$

Do đó cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & \sqrt{[x^2 + (y+z)^2] [(1-yz)^2 + 1]} \leq 2 \\ \Leftrightarrow & [x^2 + (y+z)^2] [(1-yz)^2 + 1] \leq 4 \\ \Leftrightarrow & 2(1+yz)(2-2yz+y^2z^2) \leq 4 \\ \Leftrightarrow & (1+yz)(2-2yz+y^2z^2) \leq 2 \\ \Leftrightarrow & 2-2yz+y^2z^2+2yz-2y^2z^2+y^3z^3 \leq 2 \\ \Leftrightarrow & -y^2z^2+y^3z^3 \leq 0 \Leftrightarrow y^3z^3 \leq y^2z^2 \end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq y^2 + z^2 \geq 2yz \Rightarrow yz \leq 1 \Rightarrow y^3z^3 \leq y^2z^2$$

Từ đó dẫn đến điều phải chứng minh.

□

Bài 3. (1,5 điểm) Xét phương trình $x^2 + 2025 = y^k$, trong đó x, y, k là các số nguyên dương.

- Tìm x, y khi $k = 2$.
- Chứng minh rằng khi $y = 3$ thì phương trình vô nghiệm.
- Khi $y = 5$ thì phương trình có nghiệm không? Tại sao?

Lời giải.

- a) Khi $k = 2$ ta có phương trình

$$x^2 + 2025 = y^2 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) = 2025$$

Do $0 < y-x < y+x$ nên ta có các cặp (x, y) thỏa:

$$(1013; 1012), (339; 336), (205; 200), (117; 108), (75; 60), (53; 28), (51; 24).$$

- b) Khi $y = 3$ ta có phương trình $x^2 + 2025 = 3^k$.

$k > 8$ và x chia hết cho 9, đặt $x = 9m$ ta có $m^2 + 25 = 3^{k-4}$. Mà $m^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$ suy ra $m^2 + 25 \equiv 1, 2 \pmod{3}$ mâu thuẫn. Phương trình vô nghiệm.

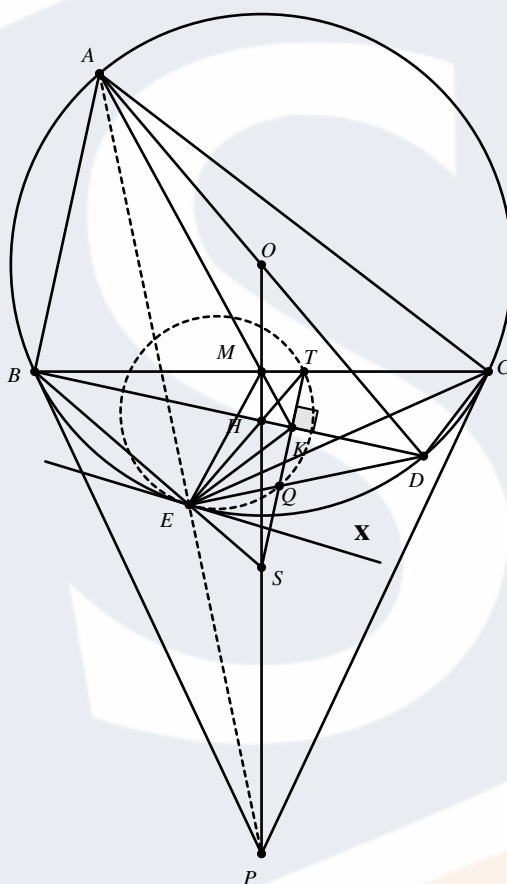
- c) Khi $y = 5$ ta có $x^2 + 2025 = 5^k$, khi đó x chia hết cho 25 và $k > 4$, đặt $x = 5m$ ta có phương trình $m^2 + 81 = 5^{k-2}$, mà $m^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$ nên $5^{k-2} \equiv 0, 1 \pmod{3}$, do đó k chẵn. Đặt $k-2 = 2n$ ta có phương trình $x^2 + 81 = 5^{2n}$ tương đương $(5^n - x)(5^n + x) = 81$, xét các trường hợp đều không có nghiệm thỏa. Do đó phương trình vô nghiệm.

□

Bài 4. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O trong đó BC cố định và A thay đổi. Vẽ đường kính AD , gọi M là trung điểm của AD . AM cắt BD tại K . Đường thẳng qua K vuông góc BD cắt BC tại T . OM cắt BD tại H và TK tại S .

- TH cắt BS tại E . Chứng minh tứ giác $EMTS$ nội tiếp và $\angle KMS = \angle EMS$.
- Chứng minh $ME \cdot MA = MB^2 = MC^2$ và $E \in (O)$.
- Gọi Q là giao điểm của ED và ST . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác EQT và (O) tiếp xúc nhau.
- Chứng minh rằng AE luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Lời giải.



- M là trung điểm BC nên $OM \perp BC$.

Tam giác BST có các đường cao SM và BK cắt nhau tại H nên H là trực tâm, suy ra $TH \perp BS$ tại E .

Tứ giác $EMTS$ có $\angle TES = \angle TMS = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp.

Các tứ giác $KMBS, BMHE$ nội tiếp nên $\angle KMS = \angle KBS = \angle SME$.

- Ta có $\angle EMB = \angle BST = \angle THK$ và $\angle TMK = \angle AMB$ nên $\angle EMB = \angle AMB$.

Hơn nữa $\angle BEM = \angle BTS$ và $\angle BTS = \angle ABH$ (so le trong), suy ra $\angle BEM = \angle ABH$.

Xét tam giác MAB và MBE có $\angle AMB = \angle BME, \angle ABM = \angle BEH$, do đó $\triangle MAB \sim \triangle MBE$, dẫn tới $MB^2 = MA \cdot ME$.

Mà $MB = MC$ nên $MA \cdot ME = MC^2$, mặt khác cũng có $\angle AMC = \angle EMC$ nên $\triangle MAC \sim \triangle MCE$, suy ra $\angle MEC = \angle MCA$.

Từ đó ta có $\angle BEC = \angle BEM + \angle CEM = \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC$, do đó $ABEC$ nội tiếp hay $E \in (O)$.

c) Vẽ tia tiếp tuyến Ex của (O) ta chứng minh Ex cũng là tiếp tuyến của (TEQ) .

Ta có $\angle xED = \angle EBD = \angle ETQ$, do đó Ex cũng là tiếp tuyến của (TEQ) . Do đó (TEQ) và (O) tiếp xúc nhau.

d) AE cắt OM tại P .

Ta có $\angle EHS = \angle EBH = \angle EBD = \angle OAE$, suy ra $OAEM$ nội tiếp.

Khi đó $\angle OMA = \angle OEA = \angle OAE = \angle OAP$, suy ra $\triangle OMA \sim \triangle OAP$, dẫn tới $OM \cdot OP = OA^2$ không đổi, suy ra M cố định.

□

Bài 5. (1,5 điểm) Các số tự nhiên từ 1 đến 101 được viết vào bảng vuông 101×101 , mỗi số viết đúng 101 lần.

a) Gọi s là tổng số cột và số dòng chứa các số 1. Chứng minh $s \geq 21$.

b) Chứng minh rằng có một dòng hoặc một cột chứa ít nhất 11 số khác nhau.

Lời giải.

a) Giả sử có m dòng và k cột chứa các số 1, $m + k \leq 20$. Khi đó số số 1 chứa được nhiều nhất trong m dòng và k cột này là $m \cdot k \leq \frac{1}{4}(m + k)^2 < 101$. Vô lý. Vậy $s = m + k \geq 21$.

b) Giả sử ngược lại, không có dòng nào hoặc cột nào chứa 11 số khác nhau. Gọi a_k là tổng số dòng và số cột chứa các chữ số k . Theo câu a ta có $a_k \geq 21$. Khi đó $a_1 + a_2 + \dots + a_{101} \geq 2121$.

Nhưng nếu mỗi dòng và mỗi cột chứa không quá 10 số khác nhau thì ta có

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{101} \leq 202 \cdot 10 = 2020 \text{ Mâu thuẫn}$$

.

□

HẾT