

Ngày thi: Thứ ba 27/9/2022

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \left(\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n} \right).$$

Bài 2. a) Tìm tất cả các số nguyên dương x thỏa mãn $x^2 - x = 2^x - 2$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x > y > 2$ và $x^y - x = y^x - y$.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định (BC không đi qua O), A là điểm thay đổi trên cung lớn BC . Gọi I, M, N là trung điểm của BC, CA và AB . Đường tròn qua M tiếp xúc với BC tại B và đường tròn qua N tiếp xúc với BC tại C lần lượt cắt IM và IN tại E và F . Gọi D là giao điểm của BE và CF .

a) Chứng minh rằng AD luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi K là giao điểm của AD và EF . Chứng minh rằng K thuộc một đường tròn cố định.

Bài 4. Với n là số nguyên dương, một tập hợp $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ gồm các số nguyên dương được gọi là "tốt" nếu tồn tại n tập hợp $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- Với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, các tập hợp $\mathcal{C}_i$ gồm b_i số nguyên liên tiếp.
- Với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, nếu đặt a_i là tổng tất cả các phần tử của $\mathcal{C}_i$ thì

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0.$$

a) Chứng minh rằng nếu $\mathcal{B}$ có chứa ít nhất một số lẻ thì $\mathcal{B}$ là tập hợp tốt.

b) Hỏi có bao nhiêu tập con khác rỗng của $\{1, 2, \dots, 100\}$ là tập tốt ?

– HẾT –

STAR EDUCATION
Success Through Academic Readiness

Ngày thi: Thứ năm 29/9/2022

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 5. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của z .

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. Gọi K là giao điểm của AC, BD và I là trung điểm của AB . Đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác ICD cắt lại AB tại T , TK cắt lại (J) tại M . Gọi H là hình chiếu của K lên CD và N là giao điểm của MH với (J) .

- Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác NTK tiếp xúc với AB .
- IK cắt lại (J) tại L . Chứng minh rằng LT, MN và JK đồng quy.

Bài 7. Cho $n, k \geq 2$ là hai số nguyên dương và $a_0, a_1, \dots, a_k$ là các số nguyên dương cho trước. Đặt $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$, ta ký hiệu A_n là số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in S_n^k$ thỏa điều kiện:

$$n \mid a_0 + a_1x_1 + \dots + a_kx_k.$$

- Xét số nguyên tố $p \geq 5$; $a_0, a_1, \dots, a_k$ phân biệt và đều nhỏ hơn p . Tính A_{p^2} .
- Tính A_n với trường hợp tổng quát.

– HẾT –

LỜI GIẢI

Thực hiện bởi nhóm giáo viên và trợ giảng trung tâm STAR EDUCATION:
NGUYỄN THÁI HÙNG - NGUYỄN THỦY TIÊN - VÕ HOÀNG THÀNH -
ĐOÀN QUANG ĐĂNG - HUỖNH TRUNG HIỂU

Bài 1

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \left(\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n} \right).$$

 **Lời giải.** Dễ thấy $u_n > 0 \forall n \geq 1$. Trước hết ta chứng minh rằng $u_n < 2$ bằng phương pháp quy nạp toán học:

- Với $n = 1$ thì $u_1 = 1 < 2$ nên khẳng định trên đúng;
- Giả sử khẳng định đã đúng với $n \geq 1$, nghĩa là $u_n < 2$. Khi đó

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Như vậy $u_n < 2 \forall n \geq 1$. Với mọi số nguyên dương n thì

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} > 0.$$

Do đó $u_{n+1} > u_n$ hay (u_n) là dãy tăng. Hơn nữa (u_n) bị chặn trên bởi 2 nên hội tụ về một giới hạn L . Nhận thấy rằng $L \in [0; 2]$. Từ hệ thức truy hồi của đề bài thì

$$L = \sqrt{L + 2} \Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Leftrightarrow L = 2.$$

Áp dụng định lý Stolz, có thể tính được

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \left(\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_{n+1}}{n+1} \right) - \left(\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n} \right)}{\ln(n+1) - \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{u_{n+1}}{n+1}}{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{(n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}. \end{aligned}$$

Biểu thức cuối cùng có thể viết lại thành

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{(n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Từ đây có thể kết luận rằng

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \left(\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n} \right) = 2.$$

□

Bài 2

- a) Tìm tất cả các số nguyên dương x thỏa mãn $x^2 - x = 2^x - 2$.
- b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x > y > 2$ và $x^y - x = y^x - y$.

Lời giải.

- a) Nhận thấy $x = 1$ và $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho. Ta chứng minh rằng:

$$2^x - 2 > x^2 - x \quad \forall x \in \mathbb{N}^*, x \geq 3.$$

Mệnh đề trên đúng với $x = 3$. Giả sử rằng điều đó đã đúng với số nguyên $x \geq 3$. Khi đó

$$2^{x+1} - 2 = 2(2^x - 1) = 2(2^x - 2 + 1) > 2(x^2 - x + 1).$$

Từ đây thì chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} 2(x^2 - x + 1) &> (x+1)^2 - (x+1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-2) > 0 \text{ (Luôn đúng vì } x \geq 3). \end{aligned}$$

Do đó $2^{x+1} - 2 > (x+1)^2 - (x+1)$, hay mệnh đề quy nạp đúng với $x+1$.

Như vậy $2^x - x > x^2 - x$ với mọi số nguyên $x \geq 3$.

Tóm lại, phương trình có các nghiệm nguyên là $x \in \{1, 2\}$.

- b) Viết lại phương trình đã cho thành

$$y^x + x - y = x^y.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ trên $[3, \infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} < 0 \quad \forall t \geq 3$, do đó f nghịch biến trên $[3, +\infty)$. Hơn nữa $x > y \geq 3$ nên

$$f(y) > f(x) \Rightarrow \frac{\ln y}{y} > \frac{\ln x}{x} \Rightarrow x \ln y > y \ln x \Rightarrow y^x > x^y$$

Như vậy $y^x + x - y > y^x > x^y$, và phương trình không có nghiệm nguyên khi $x > y > 2$.

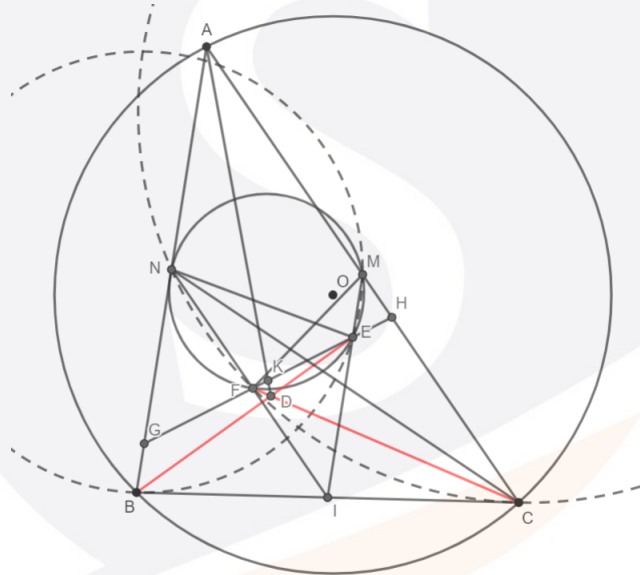
□

Bài 3

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định (BC không đi qua O), A là điểm thay đổi trên cung lớn BC . Gọi I, M, N là trung điểm của BC, CA và AB . Đường tròn qua M tiếp xúc với BC tại B và đường tròn qua N tiếp xúc với BC tại C lần lượt cắt IM và IN tại E và F . Gọi D là giao điểm của BE và CF .

- Chứng minh rằng AD luôn đi qua một điểm cố định.
- Gọi K là giao điểm của AD và EF . Chứng minh rằng K thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải.



- Vì (CFN) tiếp xúc với BC tại C và $IN \parallel AC$ nên $\angle ICF = \angle INC = \angle ACN$. Do đó CF là đường đối trung của tam giác ABC . Tương tự thì BE là đường đối trung của tam giác ABC . Từ đó D là điểm Lemoine của tam giác ABC , và AD là đường đối trung của tam giác ABC . Gọi T là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B, C của (O) thì AD đi qua T là điểm cố định.

- Kẻ đường cao BH, CG của tam giác ABC . Gọi X là giao điểm của GH và IN . Ta có

$$\angle IGX = \angle IGH = 90^\circ - \frac{\angle GIH}{2} = 90^\circ - \angle GBH = \angle BAC = \angle GNI.$$

Từ đó NG tiếp xúc với (IGX) . Hơn nữa $IB = IC = IG = IH$ nên

$$IX \cdot IN = IG^2 = IC^2 = IF \cdot IN.$$

Do đó $F \equiv X$, nghĩa là G, H, F thẳng hàng. Chứng minh tương tự thì G, H, E, F thẳng hàng. Nhắc lại rằng AD là đường đối trung của tam giác ABC và chú ý rằng $\triangle AGH \sim \triangle ACB$ nên

K là trung điểm GH . Từ đây thì $IK \perp GH$ và

$$IK = IG \cdot \cos \angle GIK = \frac{BC \cdot \sin \angle BAC}{2}$$

không đổi. Vậy K nằm trên đường tròn tâm I bán kính $\frac{BC \cdot \sin \angle BAC}{2}$ cố định.

□

Bài 4

Với n là số nguyên dương, một tập hợp $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ gồm các số nguyên dương được gọi là "tốt" nếu tồn tại n tập hợp $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- Với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, các tập hợp $\mathcal{C}_i$ gồm b_i số nguyên liên tiếp.
- Với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, nếu đặt a_i là tổng tất cả các phần tử của $\mathcal{C}_i$ thì

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0.$$

- Chứng minh rằng nếu $\mathcal{B}$ có chứa ít nhất một số lẻ thì $\mathcal{B}$ là tập hợp tốt.
- Hỏi có bao nhiêu tập con khác rỗng của $\{1, 2, \dots, 100\}$ là tập tốt ?

Lời giải.

- Không mất tính tổng quát, giả sử rằng b_1 lẻ. Mỗi tập hợp $\mathcal{C}_i$ ($1 \leq i \leq n$) có dạng:

$$\mathcal{C}_i = \{x_i + 1, x_i + 2, \dots, x_i + b_i\} \quad (x_i \in \mathbb{Z})$$

Khi đó $a_i = b_i x_i + \frac{b_i(b_i + 1)}{2}$. Ta chọn $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ để $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$, hay là:

$$b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + \frac{b_1(b_1 + 1)}{2} + \dots + \frac{b_n(b_n + 1)}{2} = 0$$

Từ đây tính được

$$x_1 = -\frac{b_1 + 1}{2} - \sum_{k=2}^n \frac{b_k x_k + \frac{b_k(b_k + 1)}{2}}{b_1}.$$

Để ý rằng $-\frac{b_1 + 1}{2} \in \mathbb{Z}$. Ta chọn $x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ để $x_1 \in \mathbb{Z}$ là đủ. Với $k \geq 2$ thì:

- Nếu b_k lẻ: Chọn $x_k = -\frac{b_k + 1}{2}$, khi đó $\frac{b_k x_k + \frac{b_k(b_k + 1)}{2}}{b_1} = 0$
- Nếu b_k chẵn: Chọn $x_k = \frac{b_1}{2} - \frac{b_k + 1}{2} \in \mathbb{Z}$, khi đó:

$$\frac{b_k x_k + \frac{b_k(b_k + 1)}{2}}{b_1} = \frac{b_k}{2} \in \mathbb{Z}$$

Do đó với $k \geq 2$ thì ta chọn được x_k để $\frac{b_k x_k + \frac{b_k(b_k + 1)}{2}}{b_1} \in \mathbb{Z}$
 Vậy $x_1 \in \mathbb{Z}$ và bài toán được chứng minh.

b) • Trường hợp 1: $\mathcal{B}$ chứa ít nhất một số lẻ. Khi đó số tập B tốt là

$$(2^{100} - 1) - (2^{50} - 1) = 2^{100} - 2^{50}.$$

• Trường hợp 2: $\mathcal{B}$ chứa toàn số chẵn.

Giả sử x là số các số mũ đúng của 2 nhỏ nhất trong $\mathcal{B}$ và $v_2(x) = a$ ($a \geq 1$).

Gọi k là số các phần tử trong $\mathcal{B}$ có số mũ đúng của 2 bằng a (B có n phần tử).

◦ Nếu k là số lẻ.

$$\mathcal{B} = \{2^a(2t_i + 1) \mid t_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, k}\} \cup \{2^{a+1} \cdot r_j \mid r_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1, n-k}\}.$$

Nhận xét: Tổng của $2m$ số nguyên liên tiếp:

$$(b+1) + (b+2) + \dots + (b+2m) = m + 2m(b+m) = m + 2mq \quad (q = b+m).$$

Tổng của $2m$ số nguyên liên tiếp có dạng $m + 2mq$ ($q \in \mathbb{Z}$)

Do đó

$$\begin{cases} a_i = 2^{a-1}(2t_i + 1) + 2^a(2t_i + 1) \cdot h_i = 2^{a-1} + 2^a \cdot s_i \quad (s_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, k}) \\ a_j = 2^a \cdot r_j + 2^{a+1} \cdot r_j \cdot d_j = 2^a \cdot l_j \quad (l_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{k+1, n}) \end{cases}$$

(Với a_i ($i = \overline{1, n}$) là tổng các phần tử của $\mathcal{C}_i$)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i = k \cdot 2^{a-1} + p \cdot 2^a \quad (p \text{ là số nguyên})$$

Giả sử $\mathcal{B}$ tốt $\Rightarrow k \cdot 2^{a-1} + p \cdot 2^a = 0 \Rightarrow k + 2p = 0$, điều này vô lí vì k lẻ.

Vậy trong trường hợp k lẻ thì B không là tập tốt.

◦ Nếu k là số chẵn.

Giả sử $v_2(b_1) \leq v_2(b_2) \leq \dots \leq v_2(b_n)$.

Ta có $v_2(b_1) = v_2(b_2) = a$.

Chọn $\mathcal{C}_1 = \{u+1, u+2, \dots, u+b_1\}$ với $b_1 = 2^a(2m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$ và m cố định.

Tổng của $2m$ số nguyên liên tiếp có dạng $m + 2mq$ ($q \in \mathbb{Z}$) nên ta nhận thấy

$$a_1 = 2^{a-1}(2m+1) + 2^a(2m+1)q = 2^{a-1} + 2^a(2mq + m + q) \quad (q \in \mathbb{Z}).$$

Chọn $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_n$ sao cho

$$\begin{cases} \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n = \{z+1, z+2, \dots, z+(b_2 + \dots + b_n)\} \\ \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset \quad (i, j = \overline{2, n}; i \neq j) \end{cases}$$

$$\forall \begin{cases} b_i = 2^a(2n_i + 1), n_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{2, k} \\ b_j = 2^{a+1} \cdot q_j, q_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{k+1, n} \end{cases} \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n b_i &= 2^a(k-1) + t \cdot 2^{a+1} = 2^a(2t + k - 1) \\ &= 2^a(2p + 1), p \in \mathbb{Z} \text{ và } p \text{ cố định} \end{aligned}$$

Tổng của $2m$ số nguyên liên tiếp có dạng $m + 2mq$ ($q \in \mathbb{Z}$) nên ta nhận thấy

$$\sum_{i=2}^n a_i = 2^{a-1}(2p + 1) + 2^a(2p + 1)s = 2^{a-1} + 2^a \cdot (2ps + p + s) \quad (s \in \mathbb{Z}).$$

Ta có thể chọn các $\mathcal{C}_i$ sao cho $q = p$ và $s = -m - 1$, khi đó $\sum_{i=1}^n a_i = 0$.

Vậy trong trường hợp k chẵn thì $\mathcal{B}$ luôn là tập tốt.

Đếm số tập tốt:

Xét tập $\{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$

- Có 25 phần tử có số mũ đúng của 2 là 1: $\{2, 6, 10, \dots, 98\}$
- Có 13 phần tử có số mũ đúng của 2 là 2: $\{4, 12, 20, \dots, 100\}$
- Có 6 phần tử có số mũ đúng của 2 là 3: $\{8, 24, \dots, 88\}$
- Có 3 phần tử có số mũ đúng của 2 là 4: $\{16, 48, 80\}$
- Có 2 phần tử có số mũ đúng của 2 là 5: $\{32, 96\}$
- Có 1 phần tử có số mũ đúng của 2 là 6: $\{64\}$

Số tập con tốt trong trường hợp này là:

$$(2^{24} - 1) \cdot 2^{25} + (2^{12} - 1) \cdot 2^{12} + (2^5 - 1) \cdot 2^6 + (2^2 - 1) \cdot 2^3 + (2^1 - 1) \cdot 2^1.$$

Vậy số tập con tốt khác rỗng của $\{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ là:

$$\begin{aligned} &(2^{100} - 2^{50}) + (2^{24} - 1) \cdot 2^{25} + (2^{12} - 1) \cdot 2^{12} + (2^5 - 1) \cdot 2^6 + (2^2 - 1) \cdot 2^3 + (2^1 - 1) \cdot 2^1 \\ &= 2^{100} - 2^{49} - 2^{24} - 2^{11} - 2^5 - 2^2 - 2. \end{aligned}$$

□

Bài 5

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của z .

 **Lời giải.** Từ giả thiết thì:

$$(x+y)(y+z)(x+z) = \frac{1}{3}((x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3) = 2.$$

Thay $x+y = 2-z$ vào đẳng thức trên và thu gọn, ta được:

$$(2-z)(2z+xy) = 2.$$

Vì $x+y+z = 2$ và $x \geq y \geq z$ nên $z \leq \frac{2}{3}$. Do đó viết được đẳng thức trên thành:

$$2z+xy = \frac{2}{2-z} \Rightarrow xy = \frac{2(z-1)^2}{2-z}.$$

Kết hợp với $x+y = 2-z$, theo định lý Viète thì x, y là hai nghiệm của đa thức

$$f(T) = T^2 - (2-z)T + \frac{2(z-1)^2}{2-z}.$$

Để đa thức trên có hai nghiệm x, y thì

$$\Delta = (2-z)^2 - 4 \cdot \frac{2(z-1)^2}{2-z} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 \leq z \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Mặt khác, do $x, y \geq z$ nên ta phải có $f(z) \geq 0$ hay

$$z^2 - (2-z)z + \frac{2(z-1)^2}{2-z} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ z \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Từ đó $z \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Khi $x = -1 + \sqrt{5}$ và $y = z = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ thì yêu cầu đề bài được thỏa mãn.

Vậy giá trị lớn nhất của z là $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

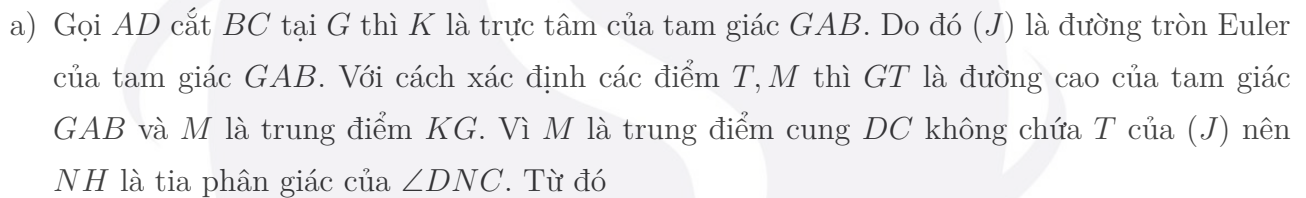
□

Bài 6

Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. Gọi K là giao điểm của AC, BD và I là trung điểm của AB . Đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác ICD cắt lại AB tại T , TK cắt lại (J) tại M . Gọi H là hình chiếu của K lên CD và N là giao điểm của MH với (J) .

- Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác NTK tiếp xúc với AB .
- IK cắt lại (J) tại L . Chứng minh rằng LT, MN và JK đồng quy.

 **Lời giải.**



Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của K trên TD và TC . Do K là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $TC D$ nên $HD = QD$ và $HC = PC$. Điều này cho thấy

Hơn nữa $\angle NDQ = \angle NCP$ nên $\triangle NDQ \sim \triangle NCP$ (c.g.c). Do đó $\angle NQD = \angle NPC$ và

Vậy N nằm trên (TPQ) có đường kính KT . Nói cách khác thì (NTK) tiếp xúc với AB .

Bài 7

Cho $n, k \geq 2$ là hai số nguyên dương và $a_0, a_1, \dots, a_k$ là các số nguyên dương cho trước. Đặt $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$, ta ký hiệu A_n là số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in S_n^k$ thỏa điều kiện:

$$n \mid a_0 + a_1x_1 + \dots + a_kx_k.$$

- Xét số nguyên tố $p \geq 5$; $a_0, a_1, \dots, a_k$ phân biệt và đều nhỏ hơn p . Tính A_{p^2} .
- Tính A_n với trường hợp tổng quát.

Lời giải. Chúng ta tính A_n trong trường hợp tổng quát.

Đặt $d = \gcd(n, a_1, a_2, \dots, a_k)$. Nếu $d \nmid a_0$ thì không có bộ số thỏa mãn điều kiện của đề bài, do đó từ đây chỉ xét $d \mid a_0$. Gọi b_i ($0 \leq i \leq k$) là các số nguyên để $a_i = db_i$, và m là số nguyên để $n = dm$. Theo cách đặt trên thì $\gcd(m, b_1, b_2, \dots, b_k) = 1$.

Với số nguyên dương $\ell \geq 2$, ta gọi một bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in S_\ell^k$ là ℓ -tốt nếu

$$\ell \mid b_0 + b_1x_1 + \dots + b_kx_k.$$

Gọi B_ℓ là số lượng các bộ số ℓ -tốt. Ta có các nhận xét sau:

- Nếu p là số nguyên tố và s là số nguyên dương thì $B_{p^s} = p^{s(k-1)}$.

Thật vậy, do $\gcd(m, b_1, \dots, b_k) = 1$ nên có $1 \leq i \leq k$ để $\gcd(b_i, p) = 1$. Với mỗi $j \neq i$, có thể chọn x_j bất kỳ trong S_{p^s} , khi đó luôn tồn tại duy nhất x_i để

$$b_ix_i \equiv -b_0 - \sum_{j \neq i} b_jx_j \pmod{p^s}$$

Vì có $k-1$ cách chọn chỉ số j và p^s cách chọn x_j nên $B_{p^s} = p^{s(k-1)}$.

- Nếu $(u, v) = 1$ thì $B_{uv} = B_u B_v$. Hệ quả là $B_m = m^{k-1}$.

Gọi (y_i) là một bộ u -tốt và (z_i) là một bộ v -tốt. Chú ý rằng $y_i \in S_u$ và $z_i \in S_v$. Theo định lý số dư Trung Hoa, tồn tại duy nhất $x_i \in S_{uv}$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_i \equiv y_i \pmod{u} \\ x_i \equiv z_i \pmod{v} \end{cases}$$

Từ đó thì

$$\begin{cases} u \mid b_0 + b_1x_1 + \dots + b_kx_k \\ v \mid b_0 + b_1x_1 + \dots + b_kx_k \end{cases}$$

nên $uv \mid b_0 + b_1x_1 + \dots + b_kx_k$. Do đó (x_i) là một bộ uv -tốt. Để kiểm tra được rằng anh xạ

$$S_u \times S_v \rightarrow S_{uv}, \quad (y_i, z_i) \mapsto x_i$$

là song ánh khi hạn chế trên các bộ u -tốt và v -tốt, nên $B_{uv} = B_u B_v$.

- $A_n = d^k B_m$. Hệ quả là $A_n = m^{k-1}d^k = n^k d$.

Với (x_i) là một bộ số thoả mãn bài toán thì:

$$dm \mid d(b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_kx_k) \iff m \mid b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_kx_k$$

Nếu đặt $x_i = y_im + z_i$ ($1 \leq z_i \leq m$) thì

$$m \mid b_0 + b_1z_1 + \cdots + b_kz_k$$

nên (z_i) là một bộ m -tốt. Do đó mỗi bộ số thoả mãn bài toán đều sinh ra được từ một bộ m -tốt bằng cách cộng thêm vào mỗi vị trí một bội phù hợp của m . Ngược lại, nếu gọi (z_i) là một bộ m -tốt, với $x_i = y_im + z_i$ và $0 \leq y_i \leq d-1$, thì (x_i) là một bộ thoả mãn đề bài.

Hai cách chọn bộ (y_i) phân biệt sẽ cho hai bộ phân biệt. Có d cách chọn mỗi y_i nên có d^k cách tạo ra bộ thoả mãn đề bài từ một bộ m -tốt. Từ đó $A_n = d^k B_m$.

Từ các nhận xét trên, ta kết luận đáp số tổng quát của bài toán như sau:

$$\text{Với } d = \gcd(n, a_1, a_2, \dots, a_k) \text{ thì } A_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } d \nmid a_0 \\ n^k d & \text{nếu } d \mid a_0 \end{cases}$$

□