

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1	Lời nói đầu.....	3
PHẦN 1	Các bài giảng	5
CHƯƠNG 2	Phản chứng và quy nạp.....	7
1	Phương pháp phản chứng	7
2	Phương pháp chứng minh quy nạp	11
CHƯƠNG 3	CHIA HẾT.....	17
1	Khái niệm mở đầu	17
2	Định Lí Euler, Định lí Fermat nhỏ.....	20
CHƯƠNG 4	Biến đổi biểu thức đại số	23
1	Các bài toán tính giá trị của biểu thức	23
2	Các bài toán rút gọn biểu thức	25
3	Các bài toán chứng minh.....	27
CHƯƠNG 5	Bất đẳng thức.....	33
1	Các phương pháp cơ bản	33
CHƯƠNG 6	Mở đầu về đa thức.....	49
1	Định nghĩa và các phép toán	49
2	Nghiệm của đa thức.....	57
3	Bài tập rèn luyện	63
PHẦN 2	Phụ lục 1	67
CHƯƠNG 7	Giới thiệu các bài toán đề nghị trong kì thi JBMO.....	69
1	ĐẠI SỐ	69
2	TỔ HỢP	75
3	HÌNH HỌC.....	77
4	SỐ HỌC	84
CHƯƠNG 8	Giới thiệu đề thi và đáp án đề tuyển sinh vào PTNK	87



1 Đề thi năm 2021	87
2 Đề thi năm 2022	88

PHẦN 3 Phụ lục 2	89
------------------------	----

CHƯƠNG 9 Quá trình phát triển khối chuyên Toán PTNK	91
---	----

1 Sự hình thành khối chuyên Toán PTNK	91
2 Quá trình phát triển – Thành tích của tổ	95



CHƯƠNG

1

LỜI NÓI ĐẦU

Với mong muốn bồi dưỡng và phát huy tài năng của các học sinh khối lớp Trung học cơ sở trong lĩnh vực Toán và Trí tuệ nhân tạo, trường Phổ Thông Năng khiếu đã tổ chức “Trường hè phát triển tài năng Toán và Trí tuệ nhân tạo Việt Nam” lần thứ nhất vào tháng 7/2022. Đây là hoạt động đầu tiên trong chuỗi chương trình sẽ được Nhà trường triển khai nhằm giúp học sinh khối Trung học cơ sở có thêm say mê, động lực trong học tập; rèn luyện để sau này các em sẽ trở thành nhân tài cho đất nước.

Giúp các em bước đầu làm quen với một số kiến thức chuyên toán, ban tổ chức thực hiện tài liệu "Kỷ yếu trường hè VSSAM" xem như tài liệu tham khảo chính hỗ trợ các em trong quá trình học tập sau này. Nội dung kỷ yếu lần này xoay quanh các chủ đề về các môn Đại số và Số học dành cho đối tượng lớp 8, 9 cụ thể:

- Các bài giảng của giáo viên trường Phổ thông Năng khiếu tại trường hè.
- Tuyển tập bài tập đề nghị của kì thi học sinh giỏi vùng Balkan dành cho học sinh trung học cơ sở (JBMO).
- Giới thiệu đề thi vào chuyên toán trường Phổ thông Năng khiếu năm 2021, 2022.
- Giới thiệu về quá trình hình thành trường PTNK và một số thành tích của các anh chị học sinh chuyên toán trong những năm vừa qua.

Dù được thực hiện trong thời gian ngắn, các giáo viên vẫn chưa kịp để triển khai và dạy một cách học một cách đầy đủ các nội dung cần giảng, tuy vậy vẫn mong các em từ những kiến thức thu nhận được trong đợt học ngắn này thêm yêu thích môn toán và công nghệ, từ đó phát triển thêm trong tương lai.

Trong thời gian ngắn, ban biên tập làm việc cẩn thận và chăm chút nhưng không tránh khỏi những thiếu sót, rất mong các em học sinh và quý thầy cô bỏ qua, mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ qua email ntvu@ptnk.edu.vn.

Ban biên tập xin cảm ơn quý thầy cô Nguyễn Ngọc Duy, Vương Trung Dũng, Võ Tiến Trình, Tạ Hoàng Thông, các bạn sinh viên Nguyễn Thủy Tiên, Võ Hoàng Thành, Nguyễn Thái Hưng đã gửi bài, chúc mọi người công tác và làm việc tốt.

Ban biên tập





PHẦN



CÁC BÀI GIẢNG

CHƯƠNG

2

PHẢN CHỨNG VÀ QUY nạp

Nguyễn Tăng Vũ

§1. PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

Phép phản chứng là một trong các phương pháp rất hay được sử dụng trong các bài toán, đây là một phương pháp chứng minh gián tiếp dựa trên tương đương logic $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Thay vì chứng minh mệnh đề $A \Rightarrow B$ để khai thác giả thiết A , ta đi chứng minh mệnh đề tương đương với nó là $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, để khai thác giả thiết mới là $\overline{B}$.

Tất nhiên sau khi phản chứng thì phải biết suy luận tiếp để tìm được điều vô lí, sự vô lí đó có thể là một mệnh đề sai, hoặc mâu thuẫn với giả thiết A hoặc các mệnh đề đúng trước đó.

Một số mệnh đề thường gặp và mệnh đề phủ định:

- $M = "\forall x \in A, P(x)";$
- $\overline{M} = "\exists x \in A, \overline{P(x)}"$

và

- $N = "\exists x \in A, P(x)";$
- $\overline{N} = "\forall x \in A, \overline{P(x)}"$

Một số tương đương logic quan trọng

- $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B};$
- $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B};$

Trên đây là một số lưu ý nhỏ trước khi ta bắt đầu với các ví dụ đơn giản.



MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

Lời giải.

Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, tức là tồn tại $\frac{p}{q}$ trong đó $p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1, q \neq 0$ và $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Khi đó ta có $p^2 = 2q^2$, suy ra p^2 chia hết cho 2 mà 2 nguyên tố nên p chia hết cho 2, $p = 2k$.

Suy ra $q^2 = 2k^2$, lí luận tương tự thì q chia hết cho 2, do đó $(p, q) \neq 1$ (mâu thuẫn).

Vậy điều giả sử sai, $\sqrt{2}$ là số vô tỉ. □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với n là số tự nhiên và $2^n - 1$ là số nguyên tố thì n cũng là số nguyên tố.

Lời giải.

Giả sử n không là số nguyên tố. Nếu $n = 0$ khi đó $2^n - 1 = 0$ không là số nguyên tố. Nếu $n = 1$ thì $2^n - 1 = 1$ không là số nguyên tố. Nếu $n > 1$ khi đó $n = ab$ với $1 < a, b < n$, khi đó $2^n - 1 = 2^{ab} - 1$ chia hết cho $2^a - 1$ mà $1 < 2^a - 1 < 2^n - 1$ nên $2^n - 1$ không là số nguyên tố. Mâu thuẫn. Vậy n là số nguyên tố. $\square$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y sao cho các số $x + y, x + 2y, 2x + y$ đều là các số chính phương.

Lời giải.

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y sao cho $x + y, 2x + y, 2y + x$ là các số chính phương. Khi đó tồn tại a, b, c nguyên dương thỏa $x + y = a^2, 2x + y = b^2, 2y + x = c^2$, suy ra $b^2 + c^2 = 3a^2$ (1). Ta chứng minh (1) không có nghiệm nguyên dương, giả sử ngược lại (1) có nghiệm nguyên dương là a, b, c sao cho a là nhỏ nhất. Ta có $b^2 + c^2$ chia hết cho 3, mà b^2, c^2 chia 3 có số dư là 0 hoặc 1 nên ta có b, c phải chia hết cho 3, khi đó $b = 3b', c = 3c'$ thế vào (1) ta có $9b'^2 + 9c'^2 = 3a^2$, suy ra a cũng chia hết cho 3, do đó $a = 3a'$, từ đó $b'^2 + c'^2 = 3a'^2$, ta có a', b', c' cũng là nghiệm của (1), mâu thuẫn vì ta chọn a nhỏ nhất. Vậy (1) không có nghiệm nguyên dương, do đó không tồn tại các số nguyên dương x, y để $x + y, 2x + y, 2y + x$ là số chính phương. $\square$

Ví dụ 4. Chứng tỏ rằng với hợp số n thỏa $n > 4$ thì không tồn tại sự sắp xếp $a_1, a_2, \dots, a_n$ trong số $1, 2, \dots, n$ sao cho những số

$$a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots, a_1a_2 \cdots a_n$$

có số dư phân biệt khi chia cho n . Điều này có đúng với $n = 4$ không?

Lời giải.

Giả sử tồn tại cách xếp thỏa đề bài khi $n > 4$. Ta có $a_1 \cdots a_2 \cdots a_n = n!$ nên chia hết cho n . Ta có a_n bằng n vì nếu $a_k = n$ với $k < n$ thì $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$ và $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ cùng chia hết cho n . Vì n là hợp số, khi đó tồn tại hai số a, b thỏa $n = ab$ với $1 < a \leq b < n$.

- $a < b$, thì xét tích $a_1 \cdots a_2 \cdots a_{n-1}$ chứa hai số hạng a, b nên chia hết cho n . (mâu thuẫn).
- Nếu $a = b$, vì $n = a^2 > 4$, suy ra $a > 2, 2a < n$, do đó trong các số $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ là hoán vị của $1, 2, \dots, n - 1$ sẽ chứa hai số hạng là a và $2a$, do đó tích $a_1 \cdots a_{n-1}$ chia hết cho n . (mâu thuẫn).

Với $n = 4$, ta xếp 1, 3, 2, 4; thỏa đề bài. $\square$

Ví dụ 5. (PTNK 2019) Cho n là số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng $2^n + 1$ không chia hết cho $2^m - 1$ với mọi số tự nhiên m sao cho $2 < m \leq n$.

Lời giải.

Ta có $2^{n-m}(2^m - 1):2^m - 1$, suy ra $2^n - 2^{n-m}:2^m - 1$, mà $2^n + 1:2^m - 1$ suy ra $2^{n-m} + 1$ chia hết cho $2^m - 1$.

Lý luận tương tự ta có $2^{n-km} + 1$ chia hết cho $2^m - 1$. Giả sử $n = km + q, 0 \leq q < m$. Chọn k như trên ta có $2^q + 1$ chia hết cho $2^m - 1$. Mà $q < m$ nên $2^q + 1 = 2^m - 1$, giải ra $q = 1, m = 2$ (vô lý). $\square$

Ví dụ 6. Cho n lẻ và $n \geq 3$. Có tồn tại hay không n số nguyên tố phân biệt $p_1, p_2, \dots, p_n$ sao cho $p_i + p_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$ và $p_1 = p_{n+1}$) là các số chính phương.

Lời giải.

- Một số chính phương thì chia 4 dư 1 hoặc dư 1.
- Giả sử tồn tại n số thỏa đề bài.
- Nếu $p_i \neq 2, \forall i = 1, \dots, n$. Khi đó không thể tất cả đều có dạng $4k+1$ hoặc $4k+3$. Nếu $p_1 = 4k_1+1$ thì $p_2 = 4k_2+3, p_3 = 4k_4+1, \dots, p_n = 4k+1$ (do n lẻ), khi đó $p_n + p_1 \equiv 2(mod4)$ (vô lý). Tương tự với $p_1 = 4k_1+3$.
- Nếu $p_1 = 2$. Khi đó $p_2 = 4k_2+3, \dots, p_n = 4k_n+1$ và $p_n + p_1 = 4k_n+3$ (vô lý).
- Vậy với n lẻ không tồn tại các số nguyên tố thỏa đề bài.

$\square$

B BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng

- Có vô hạn các số nguyên tố.
- Có vô hạn các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

Lời giải.

- Giả sử có hữu hạn số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_k$ xét $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ thì có thêm một ước nguyên tố.
- Xét $A = 4p_1p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 3$ cũng có thêm 1 ước nguyên tố dạng $4k+3$.

$\square$

Bài 2. Cho hai số nguyên dương x, y . Chứng minh rằng các số $x^2 + y + 1, y^2 + 4x + 3$ không thể đồng thời là các số chính phương.

Lời giải.

- Giả sử $x^2 + y + 1 = a^2, y^2 + 4x + 3 = b^2$.
- Nếu $x \leq y$, ta có $y^2 < b^2 < (y+2)^2$, suy ra $b = y+1$, khi đó $a^2 = x^2 + 2x + 2$ (vô nghiệm).
- Nếu $x > y$, ta có $x^2 < a^2 < (x+1)^2$ (vô lý).
- Vậy $x^2 + y + 1, y^2 + 4x + 3$ không thể đồng thời là các số chính phương.

$\square$

Bài 3. Chứng minh rằng mọi lũy thừa của 2 không thể biểu diễn thành tổng của hai hay nhiều số nguyên dương liên tiếp.

Lời giải.

- Giả sử 2^k có thể biểu diễn thành tổng của $n \geq 2$ số nguyên dương liên tiếp là $a + a + 1 + \dots + (a + n - 1)$.
- Ta có phương trình $2^k = \frac{1}{2}n(a + a + n - 1)$ hay $2^{k+1} = n(2a + n - 1)$.
- Ta có $n, 2a + n - 1$ không cùng tính chẵn lẻ, mà $n > 1$ ta có $n = 2^{k+1}, 2a + n - 1 = 1$ (Vô nghiệm).
- Vậy điều giả sử sai, ta có điều cần chứng minh. $\square$.

$\square$

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b, c thì tồn tại số nguyên dương n sao cho $f(n) = n^3 + an^2 + bn + c$ không là số chính phương

Lời giải.

- Giả sử tồn tại a, b, c sao cho $f(n) = n^3 + an^2 + nb + c$ là số chính phương với mọi n .
- Với mọi số nguyên dương x thì $x \equiv 0, 1(mod4)$ Ta có $f(1) = a + b + c + 1, f(2) = 4a + 2b + c + 8, f(3) = 9a + 3b + c + 27, f(4) = 16a + 4b + c + 64$ là các số chính phương.
- $f(4) - f(2) \equiv 2b(mod4), f(3) - f(1) \equiv 2b + 2(mod4)$. Vì $x^2 - y^2 \equiv 0, 1, -1(mod4)$ suy ra b chẵn.
- Nếu b chẵn thì $2b + 2 \equiv 2(mod4)$ (Mâu thuẫn).
- Vậy điều giả sử sai, từ đó ta có điều cần chứng minh.

□

Bài 5. Cho các số $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng phương trình $xbc + yca + zab = 2abc - ab - ac - bc$ không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải.

- Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương (x, y, z) .
 - Từ phương trình ta có $ab(z + 1) : c$, mà $(a, c) = (b, c) = 1$ nên $z + 1 : c$, suy ra $z \geq c - 1$.
 - Chứng minh tương tự ta có $x \geq a - 1, y \geq b - 1$.
 - Khi đó $xbc + yca + zab \geq (a - 1)bc + (b - 1)ac + (c - 1)ab = 3abc - ab - bc - ac > 2abc - ab - bc - ac$ (Vô lý).
- Vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

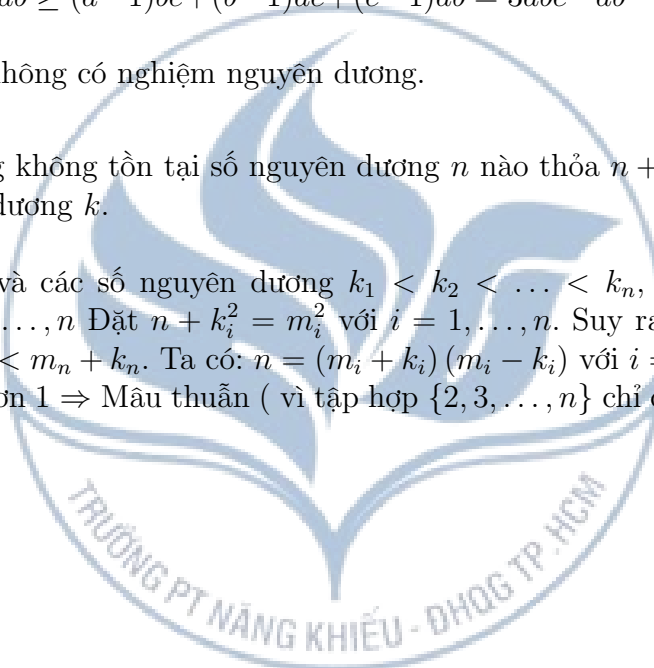
□

Bài 6. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên dương n nào thỏa $n + k^2$ là số chính phương với ít nhất n giá trị nguyên dương k .

Lời giải.

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ và các số nguyên dương $k_1 < k_2 < \dots < k_n$, sao cho $n + k_i^2$ là một số chính phương, với $i = 1, \dots, n$ Đặt $n + k_i^2 = m_i^2$ với $i = 1, \dots, n$. Suy ra $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ và $m_1 + k_1 < m_2 + k_2 < \dots < m_n + k_n$. Ta có: $n = (m_i + k_i)(m_i - k_i)$ với $i = 1, \dots, n$ nên n có ít nhất n ước số khác nhau lớn hơn 1 $\Rightarrow$ Mâu thuẫn (vì tập hợp $\{2, 3, \dots, n\}$ chỉ có $n - 1$ phần tử) $\Rightarrow$ dpcm.

□



§2. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH QUY NẠP

Phương pháp chứng minh quy nạp thường được dùng để chứng minh một mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương $n \geq n_0$, để chứng minh điều đó ta thực hiện các bước sau:

- Bước cơ sở: chứng minh $P(n)$ đúng với $n = n_0$;
- Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng, chứng minh $P(n + 1)$ đúng.

Quy nạp được sử dụng rộng rãi trong chứng minh các tính chất, định lí hay các bài toán, trong số học thì cũng được áp dụng nhiều vì hầu hết ta làm việc trên tập số nguyên.

Ngoài ra ta còn một số kiểu quy nạp khác.

Tính chất

Quy nạp mạnh, chứng minh mệnh đề $P(n)$ với mọi số nguyên dương n .

- Chứng minh $P(1)$ đúng.
- Giả sử $P(1), P(2), \dots, P(n)$ đúng. Chứng minh $P(n + 1)$ đúng.

Tính chất

Quy nạp bước nhảy k .

- Chứng minh $P(1), P(2), \dots, P(k)$ đúng.
- Giả sử $P(n)$ đúng, chứng minh $P(n + k)$ đúng.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $5^{2n} + 3n - 1$ chia hết cho 9

Lời giải.

Khi $n = 1$ ta có $A(n) = 5^{2n} + 3n - 1 = 27$ chia hết cho 9;

Giả sử $A(n) = 5^{2n} + 3n - 1$ chia hết cho 9, ta chứng minh $A(n + 1) = 5^{2(n+1)} + 3(n + 1) - 1$ cũng chia hết cho 9.

Ta có $A(n + 1) = 5^{2(n+1)} + 3n + 2 = 25A(n) - 72n + 27$ chia hết cho 9, do theo giả thiết quy nạp thì $A(n)$ chia hết cho 9.

Vậy $A(n)$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n . □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nguyên dương n thì $(n + 1)(n + 2) \dots (n + n)$ chia hết cho 2^n .

Lời giải.

- Khi $n = 1$ ta có $1 + 1 = 2$ chia hết cho 2.
- Giả sử khẳng định đúng với n , ta chứng minh khẳng định đúng với $n + 1$.

Ta có $(n + 2)(n + 3) \dots (2n)(2n + 1)(2n + 2) = 2(n + 1)(n + 2) \dots (2n)(2n + 1)$ chia hết cho 2^{n+1} theo giả thiết quy nạp. □



Ví dụ 3. Cho $n = 2^k$. Chứng minh rằng trong $2n - 1$ số tự nhiên bất kì thì luôn chọn được n số sao cho tổng của chúng chia hết cho n .

Lời giải.

Ta quy nạp theo k .

- a) Với $k = 0$ thì hiển nhiên đúng.
- b) Giả sử mệnh đề đúng với k , tức là trong $2^{k+1} - 1$ số ta chọn được 2^k số có tổng chia hết cho 2^k ; Ta chứng minh đúng với $k + 1$, tức là trong $2 \cdot 2^{k+1} - 1$ có 2^{k+1} số có tổng chia hết cho 2^{k+1} .
- Áp dụng giả thiết quy nạp 3 lần với $4 \cdot 2^k - 1$ số thì ta chọn được 3 nhóm, mỗi nhóm có 2^k số có tổng chia hết cho 2^k , gọi tổng lần lượt là A_n, B_n, C_n , khi đó xét các thương của A_n, B_n, C_n khi chia cho 2^k thì sẽ có hai số có cùng tính chẵn lẻ nên tổng chia hết cho 2, giả sử là $\frac{A_n}{2^k}, \frac{B_n}{2^k}$, khi đó $A_n + B_n$ chia hết cho 2^{k+1} , do đó 2^{k+1} số từ nhóm A_n, B_n có tổng chia hết cho 2^{k+1} .

□

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì phương trình $a^2 + b^2 = c^n$ có nghiệm nguyên.

Lời giải.

- Bài toán đúng với $n = 1, n = 2$.
 - Giả sử bài toán đúng với n , tức là phương trình $a^2 + b^2 = c^n$ có nghiệm là a_o, b_o, c_o , ta chứng minh bài toán đúng với $n + 2$.
- Thực vậy ta có $c_o^{n+2} = c_o^n \cdot c_o^2 = (c_o a_o)^2 + (c_o b_o)^2$, do đó $(c_o a_o, c_o b_o, c_o)$ là nghiệm của phương trình $a^2 + b^2 = c^{n+2}$.

□

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì tồn tại các số nguyên a, b sao cho

$$(1 + \sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}, (1 - \sqrt{2})^n = a - b\sqrt{2}$$

Lời giải.

- Khi $n = 1$ ta có $a = 1, b = 1$.
- Giả sử mệnh đề đúng với n , tức là tồn tại a, b thỏa $(1 + \sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}, (1 - \sqrt{2})^n = a - b\sqrt{2}$.

Khi đó $(1 + \sqrt{2})^{n+1} = (a + b\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = (a + 2b) + (a + b)\sqrt{2}$ và $(1 - \sqrt{2})^{n+1} = (a - b\sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = (a + 2b) - (a + b)\sqrt{2}$.

Ta có điều cần chứng minh.

□

Ví dụ 6. Cho $a_n = (3 + \sqrt{8})^n + (3 - \sqrt{8})^n$. Chứng minh rằng $a_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ và a_n không chia hết cho 5.

Lời giải.

Đặt $a = 3 + \sqrt{8}, b = 3 - \sqrt{8}$, do đó a, b là nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$.

Ta chứng minh $a_n = a^n + b^n$ là số nguyên và không chia hết cho 5.

- $n = 1$ thì $a + b = 6$ đúng và $n = 2$ thì $a_2 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 34$ là số nguyên không

chia hết cho 5.

- Giả sử khẳng định đúng với $k \leq n$, ta chứng minh khẳng định đúng với $n + 1$, ta có $a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1} = 5a_n + 5a_{n-1} - a_{n-2}$ là số nguyên và không chia hết cho 5, theo giả thiết quy nạp. $\square$

Ví dụ 7. (IMO 2013) Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên dương k và n tồn tại k số nguyên dương $m_1, m_2, \dots, m_k$ thỏa

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

Lời giải.

Ta chứng minh bài toán bằng cách quy nạp theo k .

- Khi $k = 1$ ta chọn $m = n$.
- Giả sử bài toán đúng với $k - 1$, ta chứng minh bài toán đúng với k .
 - Khi n lẻ, đặt $n = 2t - 1$.

$$1 + \frac{2^j - 1}{2t - 1} = \frac{2(t + 2^{j-1} - 1)}{2t} \cdot \frac{2t}{2t - 1} = \left(1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{2t - 1}\right).$$

áp dụng giả thiết quy nạp và chọn $m_j = 2t - 1$ là xong.

- Trường hợp n chẵn, đặt $n = 2t$.

$$1 + \frac{2^j - 1}{2t} = \frac{2t + 2^j - 1}{2t + 2^j - 2} \cdot \frac{2t + 2^j - 2}{2t} = \left(1 + \frac{1}{2t + 2^j - 2}\right) \left(1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t}\right),$$

dễ thấy $2t + 2^j - 2 > 0$, theo giả thiết quy nạp

$$1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_{j-1}}\right).$$

Chọn $m_j = 2t + 2^j - 2$ ta có điều cần chứng minh. $\square$



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì

- $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ chia hết cho 17.
- $2^{3^n} + 1$ chia hết cho 3^{n+1}

Lời giải.

Tự giải $\square$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên dương n thì $(n + 1)(n + 2) \cdots (n + n)$ chia hết cho 2^n .

Lời giải.

- Khi $n = 1$ ta có $1 + 1 = 2$ chia hết cho 2.
- Giả sử khẳng định đúng với n , ta chứng minh khẳng định đúng với $n + 1$.
Ta có $(n + 2)(n + 3) \cdots (2n)(2n + 1)(2n + 2) = 2(n + 1)(n + 2) \cdots (2n)(2n + 1)$ chia hết cho 2^{n+1} theo giả thiết quy nạp. $\square$

Bài 3. Đặt $T_n = 1 + 2 + \dots + n$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số tự nhiên n để T_n là số chính phương.

Lời giải.



Ta có $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, nếu T_n là số chính phương thì $n(n+1) = 2k^2$.

Ta xét $T_{4n^2+4n} = \frac{(4n^2+4n)(4n^2+4n+1)}{2} = 2n(n+1)(2n+1)^2 = 4k^2(2n+1)^2$ là số chính phương.

□

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương M tồn tại số nguyên dương n và cách chọn các dấu $+$ hoặc $-$ sao cho $M = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm n^2$.

Lời giải.

- Bài toán đúng với $M = 1, 2, 3, 4$.
- Giả sử bài toán đúng với M , ta chứng minh bài toán đúng với $M + 4$.

□

Bài 5. Chứng minh rằng phương trình với mọi số nguyên dương $n \geq 3$ thì luôn tồn tại các số nguyên dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ phân biệt thỏa phương trình $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$.

Lời giải.

- Khi $n = 3$ phương trình có nghiệm là $(2, 3, 6)$.
- Giả sử với n thì phương trình có bộ nghiệm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đôi một phân biệt, khi đó ta xét bộ $n + 1$ số $(2, 2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)$ là nghiệm.

□

Bài 6. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x + 1 = 0$. Chứng minh $S = x_1^{2002} + x_2^{2002}$ có thể biểu diễn được dưới dạng tổng bình phương của ba số nguyên liên tiếp.

Lời giải.

□

Bài 7. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên k luôn tồn tại số tự nhiên n sao cho :

$$\sqrt{n + 2022^k} + \sqrt{n} = (1 + \sqrt{2023})^k.$$

Lời giải.

Ta chứng minh quy nạp thì $(1 + \sqrt{2023})^k$ có thể viết dưới dạng $a + b\sqrt{2023}$ và $(1 - \sqrt{2023})^k = a - b\sqrt{2023}$, trong đó a, b là các số tự nhiên.

Khi đó ta có ta có $a^2 - 20023b^2 = (-2022)^k$.

- Nếu k lẻ thì ta chọn $n = a^2$ ta có điều cần chứng minh.
- Nếu k chẵn thì chọn $n = (b\sqrt{2002})^2$ ta có điều cần chứng minh.

□

Bài 8. Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 = c^2$. Đặt $S_k = a^{2^k} + b^{2^k} + c^{2^k}, T_k = (ab)^{2^k} + (bc)^{2^k} + (ca)^{2^k}$.

a) Chứng minh rằng $a^4 + b^4 + c^4$ là một số chẵn.

b) Đặt $m = \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4)$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $k \geq 2$ ta đều có $m \mid S_k$ và $m \mid T_k$.

Lời giải.

Chứng minh $S_{k+1} + 2T_k = S_k^2, \quad T_{k+1} + 2(abc)^{2^k} \cdot S_k = T_k^2$

□

Bài 9. Cho a, b, c các số nguyên, a chẵn và b lẻ. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì tồn tại số nguyên dương x sao cho

$$2^n \mid ax^2 + bx + c.$$

Lời giải.

Ta chứng minh bài toán bằng qui nạp theo $n \in \mathbb{N}$.

- Khi $n = 0$, rõ ràng $1 \mid a + b + c$ với mọi x .
- Giả sử khẳng định đúng với n , tức là tồn tại x_n sao cho $2^n \mid ax_n^2 + bx_n + c = P(x_n)$. Ta sẽ chọn x_{n+1} để $2^{n+1} \mid ax_{n+1}^2 + bx_{n+1} + c$.
 Nếu $2^{n+1} \mid P(x_n)$ thì ta chọn $x_{n+1} = x_n$.
 Ngược lại ta có $P(x_n) = 2^n \cdot d$ với d lẻ.
 Ta có $P(x) - P(x_n) = (x - x_n)(a(x + x_n) + b)$, trong đó $a(x + x_n) + b$ lẻ với $x \in \mathbb{N}$.

Đặt $x_{n+1} = x_n + 2^n \cdot f$, với $f \in \mathbb{N}$, lẻ

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(x_{n+1}) &= P(x_n) + 2^n \cdot f(a(x_{n+1} + x_n) + b) = \\ &= 2^n(d + f(a(x_{n+1} + x_n) + b)) : 2^{n+1} \end{aligned}$$

vì $d + f(a(x_{n+1} + x_n) + b)$ chẵn, ta có điều cần chứng minh. □





CHƯƠNG

3

CHIA HẾT

Nguyễn Ngọc Duy

§1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

KHÁI NIỆM

Số nguyên a gọi là chia hết số nguyên b nếu tồn tại số nguyên k sao cho $a = kb$.
Khi đó, a gọi là bội của b , còn b gọi là ước của a .
Một số nguyên dương gọi là số nguyên tố nếu như nó chỉ có hai ước dương là 1 và chính nó.

Ví dụ 1. Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2 + 1$ chia hết $2n + 1$.

Ví dụ 2. Chứng minh nếu $a - c \mid ab + cd$ thì $a - c \mid ad + bc$.

Ví dụ 3. Tìm số nguyên tố p sao cho với mọi số nguyên tố q nhỏ hơn p thì $p + 2q$ cũng là số nguyên tố.

Ví dụ 4. Cho hai số nguyên a, b . p là số nguyên tố lẻ vừa là ước của $a + b$ và $a^2 + b^2$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2$ chia hết cho p^2 .

Tính chất

Nếu a chia hết cho b và $a \neq 0$ thì $|a| \geq |b|$.

Ví dụ 5. Cho n là một số tự nhiên dương, p là một số nguyên tố. Biết rằng $n \mid p - 1$ và $p \mid n^3 - 1$. Chứng minh rằng $n = 1$ hoặc $p = n^2 + n + 1$.

Ví dụ 6. Tìm hai số nguyên tố p, q thỏa mãn $p^5 + p^3 + 2 = q^2 - q$.

KHÁI NIỆM

Cho hai số nguyên a và b , ta nói a đồng dư với b theo modulo m , kí hiệu $a \equiv b \pmod m$, nếu $a - b$ chia hết cho m .

Tính chất

Cho các số nguyên a, b và m . Khi đó

- Nếu $a \equiv b \pmod m$ mà $c \equiv d \pmod m$, thì $a + c \equiv b + d \pmod m$.
- Nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$, thì $ac \equiv bd \pmod m$.
- Nếu $a \equiv b \pmod m$ và n là các số nguyên, thì $a^n \equiv b^n \pmod m$.
- Nếu $ac \equiv bc \pmod m$ và c là số nguyên tố cùng nhau với m , thì $a \equiv b \pmod m$.

KHÁI NIỆM

Cho hai số nguyên a và b , d gọi là ước chung lớn nhất của a và b nếu d là số nguyên dương lớn nhất là ước của cả a và b . Ta kí hiệu $d = (a, b)$

Hai số nguyên a và b gọi là nguyên tố cùng nhau nếu ước chung lớn nhất của chúng bằng 1.

Tính chất

Giả sử $d = (a, b)$ và c là một ước chung của a và b thì d chia hết cho c .

Ví dụ 7. Tìm ước chung lớn nhất của $2^{1000} - 1$ và $2^{2022} - 1$.

Ví dụ 8. Tìm hai số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^4 - y^4 = (xy)^3$.

Ví dụ 9. Tìm cặp số nguyên dương (a, b) sao cho $ab = \gcd(a, b) + \text{lcm}(a, b)$, trong đó $\gcd(a, b), \text{lcm}(a, b)$ lần lượt là ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của a, b .

Ví dụ 10. Cho a, b, c là ba số nguyên dương thỏa $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Gọi d là ước chung lớn nhất của ba số đó . Chứng minh rằng $d(b - a)$ là số chính phương.

ĐỊNH LÝ

Nếu a và b nguyên tố cùng nhau thì tồn tại hai số nguyên x, y sao cho $ax + by = 1$.

Hệ quả

Giả sử $d = (a, b)$, khi đó tồn tại hai số nguyên x, y sao cho $ax + by = d$.



BÀI TẬP

Bài 1. Tìm số tự nhiên n để $n^4 - 3n^2 + 9$ là số nguyên tố.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 9 thì abc chia hết cho 3.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu $a - b, a^2 - b^2, a^3 - b^3, \dots$ đều là số nguyên thì a, b là số nguyên.

Bài 4. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng số $\frac{2^p + 1}{3}$ không chia hết cho 3.

Bài 5. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $2ab$ là số chính phương nhưng $a^2 + b^2$ là số nguyên tố.

Bài 6. Tìm số tự nhiên a để $4^a + 4a^2 + 4$ là số chính phương.

Bài 7. Cho a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng $2a(a^2 + 3b^2)$ không là lập phương đúng của một số nguyên.

Bài 8. Cho số nguyên $n > 1$ bất kì. Chứng minh rằng $n^5 + n^4 + 1$ không là số nguyên tố.

Bài 9. Tìm tất cả các số nguyên a, b sao cho $a^4 + 4b^4$ là số nguyên tố.

Bài 10. Cho a, b là hai số nguyên sao cho tồn tại c, d là hai số nguyên liên tiếp thỏa $a - b = a^2c - b^2d$. Chứng minh rằng $|a - b|$ là số chính phương.

§2. ĐỊNH LÝ EULER, ĐỊNH LÝ FERMAT NHỎ

KHÁI NIỆM

(Hệ thặng dư đầy đủ) Cho tập $A = a_1, a_2, \dots, a_n$. Giả sử $a_i = q_i n + r_i, 0 \leq r_i < n$, nếu tập $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ trùng với tập $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ thì ta nói A là một hệ thặng dư đầy đủ modulo n .

KHÁI NIỆM

(Hệ thặng dư thu gọn) Cho tập $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ là một tập hợp k số nguyên và $(b_i, n) = 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$. Giả sử $b_i = q_i n + r_i, 1 \leq r_i < n$, nếu tập $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ phân biệt và gồm k số hạng nguyên tố cùng nhau với n thì B được gọi là hệ thặng dư thu gọn modulo n .

ĐỊNH LÝ

(Định lí thặng dư Trung Hoa) Cho k số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau $m_1, m_2, \dots, m_k$. Và $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các số nguyên. Khi đó hệ phương trình đồng dư tuyến tính

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

sẽ có duy nhất nghiệm theo modulo $m_1 m_2 \dots m_k$

Tính chất

Cho $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ là một hệ thặng dư thu gọn của n . Với mọi số nguyên m nguyên tố cùng nhau với n thì $\{na_1, na_2, \dots, na_k\}$ cũng là một hệ thặng dư thu gọn của n .

KHÁI NIỆM

Cho n là số nguyên dương. Ta kí hiệu $\phi(n)$ là số các số nguyên dương không lớn hơn n và nguyên tố cùng nhau với n .

Ví dụ 1. Tính $\phi(20)$.

Ví dụ 2. Cho p là số nguyên tố lẻ. Tính $\phi(2p^2)$.

Tính chất

Nếu $n = p^k$, với p là số nguyên tố, thì

$$\phi(n) = p^k - p^{k-1} = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Tính chất

Cho m, n là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Khi đó

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n).$$

ĐỊNH LÝ

Cho n là số nguyên dương có khai triển thành thừa số nguyên tố như sau

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

,trong đó p_i là các số nguyên tố phân biệt.

Khi đó,

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

ĐỊNH LÝ

Định lí Euler) Cho a, n là các số nguyên dương thoả $(a, n) = 1$. Khi đó,

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Ví dụ 3. Cho $(m, n) = 1$, chứng minh rằng $m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$.

Ví dụ 4. Cho p, q là hai số nguyên tố phân biệt, a là số nguyên dương. Chứng minh

$$a^{pq-p-q+2} \equiv a \pmod{pq}.$$

ĐỊNH LÝ

Định lí Fermat nhỏ Cho p là số nguyên tố. Khi đó với mọi số nguyên dương a thì $a^p \equiv a \pmod{p}$

Tính chất

Cho p là số nguyên tố. Khi đó tồn tại số nguyên dương x thỏa $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ khi và chỉ khi $p = 2$ hoặc $p \equiv 1 \pmod{4}$

Tính chất

Nếu $p = 4k + 3$ là một ước nguyên tố của $a^2 + b^2$ thì a, b đều chia hết cho p .

Ví dụ 5. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng số $11 \dots 1$ (có $p - 1$ chữ số 1) chia hết cho p .

Ví dụ 6. Cho $p = 3k + 2$ là một ước nguyên tố của $a^2 + ab + b^2$. Chứng minh rằng a và b đều chia hết cho p .

Ví dụ 7. Tìm số tự nhiên n sao cho $n! - n^2$ là số chính phương.

Ví dụ 8. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^n - 1$ là ước của $m^2 + 9$, trong đó m là số nguyên.



BÀI TẬP

Bài 1. Tìm các số nguyên dương a, b sao cho $a^2 - 1$ là ước của $b^2 + 1$.

Bài 2. Tìm các số nguyên dương a, b sao cho $4ab - a - b$ là số chính phương.

Bài 3. Cho a là số nguyên dương. Chứng minh rằng $2a^2 - 1$ không có ước nào dạng $b^2 + 2$.

Bài 4. Xét phương trình nghiệm nguyên $x^3 + x + p = y^2$. Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất dạng $4k + 1$ sao cho phương trình có nghiệm.

Bài 5. Cho a nguyên dương bất kì, chứng minh rằng có vô số hợp số n sao cho

$$a^{n-1} \equiv a \pmod{n}.$$

Bài 6. Cho $p > 2$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên n sao cho $n2^n + 1$ chia hết cho p .

CHƯƠNG

4

BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Võ Tiến Trình

Các hằng đẳng thức

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$4. (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$5. (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$6. a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$7. a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

$$8. (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$9. (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - bc - ca)$$

$$10. (a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab + bc - ca)$$

$$11. a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$12. (a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

§1. CÁC BÀI TOÁN TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Ví dụ 1. Cho a là số thỏa $a^2 - 4a + 2 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{5a^2}{a^4 - 7a^2 + 4}$

Lời giải.

$$\text{Vì } a^2 - 4a + 2 = 0 \Rightarrow a^2 + 2 = 4a$$

$$P = \frac{5a^2}{a^4 - 7a^2 + 4} = \frac{5a^2}{(a^2 + 2)^2 - 11a^2} = \frac{5a^2}{16a^2 - 11a^2} = 1$$

□

Ví dụ 2. Cho a là số thỏa $a + \frac{1}{a} = 3$. Tính giá trị biểu thức $P = a^2 + \frac{1}{a^2}$

Lời giải.

$$\text{Ta có : } P = a^2 + \frac{1}{a^2} = a^2 + 2a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

□

Ví dụ 3. Cho $x = 2 - \sqrt{2}$. Tính giá trị biểu thức $P(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 2018$.

Lời giải.

Ta có : $x = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow 2 - x = \sqrt{2} \Rightarrow (2 - x)^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 16x^3 + 16x^2 + 2018 = (x^2 - 4x)^2 - 4 + 2022 \\ &= (x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x + 2) + 2022 = 2022 \end{aligned}$$

□

Ví dụ 4. Cho $x = \sqrt[3]{2021}$. Tính

$$C = \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x - (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}}$$

Lời giải.

$$\text{Ta có : } C^3 = x^3 - 3x + 3\sqrt[3]{\frac{(x^3 - 3x)^2 - (x^2 - 1)(x^2 - 4)}{4}} \cdot C = x^3 - 3x + 3C$$

$$\Leftrightarrow C^3 - 3C - (x^3 - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (C - x)(C^2 + Cx + x^3 - 3) = 0 \Leftrightarrow C = x = \sqrt[3]{2021}$$

$$\text{Vì } C^2 + Cx + x^3 - 3 = C^2 + C\sqrt[3]{2021} + 2018 = \left(C + \frac{\sqrt[3]{2021}}{2}\right)^2 + 2018 - \frac{\sqrt[3]{2021}}{4} > 0$$

□

Ví dụ 5. Cho a, b thỏa $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Lời giải.

Nhận xét. Với $2a > b > 0 \Rightarrow P > 0$

Ta có:

$$4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = 9ab \Leftrightarrow (2a + b)^2 = 9ab$$

$$4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 = ab \Leftrightarrow (2a - b)^2 = ab$$

$$P^2 = \frac{a^2b^2}{(2a - b)^2(2a + b)^2} = \frac{a^2b^2}{ab \cdot 9ab} = \frac{1}{9} \Rightarrow P = \frac{1}{3} \text{ (vì } P > 0 \text{)}.$$

□

Ví dụ 6. Cho $a, b, c \neq 0$. Biết x, y, z là ba số thỏa $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

Tính $P = x^{2019} + (y - 1)^{2019} + (1 - z)^{2019}$

Lời giải.

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} (b^2 + c^2) + \frac{y^2}{b^2} (c^2 + a^2) + \frac{z^2}{c^2} (a^2 + b^2) = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Vậy $P = 0$

□



Ví dụ 7. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $xy + yz + zx = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Lời giải.

Ta có:

$$1 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = (x + y)(x + z)$$

$$1 + y^2 = xy + yz + zx + y^2 = (x + y)(y + z)$$

$$1 + z^2 = xy + yz + zx + z^2 = (y + z)(z + x)$$

$$P = x\sqrt{(y+z)^2} + y\sqrt{(z+x)^2} + z\sqrt{(x+y)^2}$$

$$= x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2$$

□

§2. CÁC BÀI TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC

Ví dụ 1. Cho phân thức

$$A = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 + (ab + bc + ca)^2}{(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca)}$$

- Tìm điều kiện của a, b, c để phân thức A có nghĩa.
- Rút gọn phân thức A .

Lời giải.

- Xét mẫu thức:

$$(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

Vậy phân thức A có nghĩa khi và chỉ khi a, b, c không đồng thời bằng không.

- Ta có: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$$\text{Đặt } a^2 + b^2 + c^2 = x; ab + bc + ca = y$$

Ta có:

$$A = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 + (ab + bc + ca)^2}{(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca)} = \frac{x(x + 2y) + y^2}{x + 2y - y}$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y} = \frac{(x + y)^2}{x + y} = x + y = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$$

□



Ví dụ 2. Rút gọn phân thức: $C = \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2}$

Lời giải.

Xét tử thức: $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

Xét mẫu thức: $ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2 = b^2(a-b) - c^2(a-b) = (a-b)(b-c)(b+c)$

Vậy $C = \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2} = \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(b+c)} = \frac{a-c}{b+c}$ □

Ví dụ 3. Rút gọn phân thức $B = \frac{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}$

Lời giải.

Xét mẫu thức:

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = (a^2b - ab^2) + (b^2c - a^2c) + c^2(a-b)$$

$$= ab(a-b) - c(a-b)(a+b) + c^2(a-b)$$

$$= (a-b)(c^2 - ac + ab - bc) = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

Mà ta có nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Đặt $x = b-c$; $y = c-a$; $z = a-b$ ta có: $x + y + z = 0$

$$B = \frac{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)} = \frac{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{x^3 + y^3 + z^3}{-xyz} = \frac{3xyz}{-xyz} = -3$$
 □

Ví dụ 4. Rút gọn $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$

Lời giải.

$$A^3 = 6 - 3\sqrt[3]{\left(3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)\left(-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)} \cdot A = 6 - 5A$$

$$\Leftrightarrow A^3 + 5A - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (A-1)(A^2 + A + 6) = 0 \Leftrightarrow A = 1 \left(\text{vì } A^2 + A + 6 = \left(A + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0 \forall A \right)$$

Vậy $A = 1$ □

Ví dụ 5. Rút gọn $P = \sqrt{\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x+y)^2}} + \sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}}$ với $x \neq y$; $x \neq 0$; $y \neq 0$

Lời giải.

Nhận xét :

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\frac{a+b+c}{abc}$$

Nếu $a + b + c = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Ta thấy $x^2 + y^2 + [-(x^2 + y^2)] = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2}\right)^2 = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$

$$\sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}} = \left|\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2}\right| = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Do đó $P = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x + y)^2}}$

Ta lại thấy $x + y + (-(x + y)) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x + y}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x + y)^2}$

Vậy $P = \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x + y}\right|$

□

§3. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH

Ví dụ 1. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right) = 8$. Chứng minh $a = b = c$.

Lời giải.

Ta có : $\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right) = 8$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right) = 8$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{a}{b} + 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = b - c = c - a = 0 \Leftrightarrow a = b = c$$

□

Ví dụ 2. Cho a, b, c, d thỏa mãn $a + b = c + d$ và $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Chứng minh

$$a^{2022} + b^{2022} = c^{2022} + d^{2022}$$

Lời giải.

Ta có : $a + b = c + d \Rightarrow a - c = d - b$

Ta có: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow (a^2 - c^2) + (b^2 - d^2) = 0$

$$\Rightarrow (a + c)(a - c) + (b + d)(b - d) = 0$$

$$\Rightarrow (a + c)(d - b) + (b + d)(b - d) = 0$$



$$\Rightarrow (d-b)(a+c-b-d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = d \\ a + c = b + d \end{cases}$$

Nếu $b = d \Rightarrow a = c$ ta có điều phải chứng minh.

Nếu $a + c = b + d \Rightarrow a = d$ và $b = c$ ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số hữu tỷ. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}}$$

là một số hữu tỷ

Lời giải.

$$\text{Vì } (a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$$

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + 2 \left(\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} \right)$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

$$\text{Do đó } \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} = \left| \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right| \text{ là một số hữu tỷ.} \quad \square$$

Ví dụ 4. Cho $a, b > 0, c \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$$

Lời giải.

$$\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c} = \sqrt{a+b} < \sqrt{a+b} + 2\sqrt{ab} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\Rightarrow c < 0$$

Ta có:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c} \Leftrightarrow (\sqrt{a+b})^2 = (\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c})^2$$

$$\Leftrightarrow a+b = a+c + 2\sqrt{(a+c)(b+c)} + b+c$$

$$\Leftrightarrow -c = \sqrt{(a+c)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (-c)^2 = (\sqrt{(a+c)(b+c)})^2 \Leftrightarrow c^2 = (a+c)(b+c)$$

$$\Leftrightarrow c^2 = ab + ac + bc + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

□

Bài tập

Bài 1. Cho $x + \frac{1}{x} = a$. Tính các biểu thức sau theo a :

- $x^2 + \frac{1}{x^2}$
- $x^3 + \frac{1}{x^3}$
- $x^4 + \frac{1}{x^4}$
- $x^5 + \frac{1}{x^5}$
- $x^6 + \frac{1}{x^6}$
- $x^7 + \frac{1}{x^7}$

Bài 2. Cho $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = a$. Tính biểu thức $P = \left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) : \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ theo a .

Bài 3. Cho $x^2 - 5x + 1 = 0$. Tính $P = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$

Bài 4. Cho a, b, c thỏa $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$.

Tính $P = \frac{c^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{a^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2 - b^2}$

Bài 5. Cho $a > b > 0$ thỏa $3a^2 + 3b^2 = 10ab$.

Tính $P = \frac{a^2}{ab + b^2} + \frac{b^2}{ab - a^2} - \frac{a^2 + b^2}{ab}$

Bài 6. Cho a, b, c là các số khác 0 và $(b + c)^2 \neq a^2$. Đặt $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $y = \frac{a^2 - (b - c)^2}{(b + c)^2 - a^2}$.

Tính $P = xy + x + y$

Bài 7. Cho a, b dương thỏa $a^2 + b^2 = a^3 + b^3 = a^4 + b^4$. Chứng minh $a + b = 2$

Bài 8. Cho a, b, c khác nhau đôi một thỏa $\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} = 0$

Chứng minh $\frac{a}{(b - c)^2} + \frac{b}{(c - a)^2} + \frac{c}{(a - b)^2} = 0$

Bài 9. Cho a, b, c khác 0 thỏa $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$ và $a + b + c = 3abc$.

Chứng minh $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 3$

Bài 10. Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$

Bài 11. Cho a, b, c thỏa $b \neq c$; $a + b + c \neq 0$ và $a^2 + b^2 = (a + b - c)^2$

Chứng minh $\frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2} = \frac{a - c}{b - c}$.

Bài 12. Cho a, b, c thỏa $8(a + b + c)^3 = 3 + (2a + b - c)^3 + (2b + c - a)^3 + (2c + a - b)^3$

Chứng minh $(a + 3b)(b + 3c)(c + 3a) = 1$.

Bài 13. Cho ba số a, b, c khác 0 và thỏa $ab + bc + ca = 0$. Chứng minh

$$\frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = 3$$

Bài 14. Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa $a + b + c = 2021$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2021}$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có một số bằng 2021.



Bài 15. Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ và $abc = 1$.
 Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có ít nhất một số bằng 1.

Bài 16. Cho a, b, c thỏa $\frac{a}{9} = \frac{b}{7} = \frac{c}{3}$. Chứng minh $9(a - b)(b - c) = 2(a - c)^2$

Bài 17. Chứng minh:

a) $A = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$ là số nguyên.

b) $B = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$ là một số nguyên.

(chuyên Trường THPT chuyên ĐHQG Hà Nội 2006)

c) Chứng minh rằng: $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với $a \geq \frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

d) Tính $x + y$ biết $(x + \sqrt{x^2 + 2015})(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015$.

Bài 18. a) Cho $x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}$$

b) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị $B = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2022$.

c) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2022$

Bài 19. Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$.

a) Tính giá trị biểu thức:

$$P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

b) Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$

Bài 20. Cho $ax + by + cz = 0$. Chứng minh

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ac(x-z)^2 + ab(x-y)^2} = \frac{1}{a+b+c}$$

Bài 21. Cho a, b, c là các số phân biệt và khác 0. Biết tồn tại các số x, y thỏa $a^3 + ax + y = 0, b^3 + bx + y = 0, c^3 + cx + y = 0$. Tính $S = a + b + c$.

Bài 22. Cho các số thực a, b, c, d thỏa $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d = 0$
 Chứng minh tồn tại hai số trong 4 số a, b, c, d có tổng bằng 0.

Bài 23. Cho a, b, c là các số khác 0 và thỏa $a^2(b+c-a) = b^2(c+a-b) = c^2(a+b-c)$. Chứng minh $a = b = c$.
Bài 24 (Phổ Thông Năng Khiếu 2015 - 2016). Tìm các số nguyên a, b, c sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 3 = 0$.

Bài 24. (Phổ Thông Năng Khiếu 2015 - 2016)

Tìm các số nguyên a, b, c sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 3 = 0$.

Bài 25. (Phổ Thông Năng Khiếu 2021-2022)

Cho $M = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, N = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}, K = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$



- a) Chứng minh nếu $MK = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$ thì $N = 0$.
 b) Cho $M = K = 4, N = 1$. Tính $a \cdot b \cdot c$

Bài 26. (Chuyên Bình Dương 2018)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x + \sqrt{2018 + x^2})(y + \sqrt{2018 + y^2}) = 2018$.

Tính giá trị biểu thức $P = x^{2019} + y^{2019} + 2018(x + y) + 2020$.

Bài 27. (Chuyên Phú Thọ 2018)

Cho a, b, c là ba số thực đôi một khác nhau thỏa $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = x$.

Tính $P = x \cdot a \cdot b \cdot c$

Bài 28. (Chuyên Hải Dương 2016)

Cho $x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}, y = \sqrt[3]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17 - 12\sqrt{2}}$

Tính giá trị $P = (x - y)^3 + 3(x - y)(xy + 1)$

Bài 29. (Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2015)

Cho a, b thỏa $ab = 1, a + b \neq 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Bài 30. (Chuyên Khánh Hòa 2018)

Cho 3 số x, y, z khác 0 thỏa $x + y + z = \frac{1}{2}; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = 4$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$.

Tính $Q = (y^{2017} + z^{2017})(z^{2019} + x^{2019})(x^{2021} + y^{2021})$.

Bài 31. (Chuyên Nam Định 2016)

Cho a, b, c là các số thực thỏa $a + b + c = 6$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{47}{60}$.

Tính $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Bài 32. Cho ba số x, y, z thỏa $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 6$ và $xyz > 0$.

Tính giá trị biểu thức $P = x^{2017} + y^{2018} + z^{2019}$.

Bài 33. (HSG Nam Định 2015)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện : $x + y + z = 2; x^2 + y^2 + z^2 = 18; xyz = -1$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$

Bài 34. (Chuyên Thanh Hóa 2018)

Cho a, b là các số thực dương thỏa $a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0; b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$. Chứng minh $a + b = 2$.

Bài 35. (HSG Phú Thọ 2016)

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh $\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0$.

Bài 36. (Chuyên Hải Dương 2018)

Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$.

Chứng minh $\sqrt{x(4-y)(4-z)} + \sqrt{y(4-x)(4-z)} + \sqrt{z(4-x)(4-y)} - \sqrt{xyz} = 8$.

Bài 37. (HSG Q.1 TP. Hồ Chí Minh 2012)

Giả sử 4 số a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$

Chứng minh $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$.



Bài 38. (Chuyên Quảng Ngãi 2018)

Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa $a^2 + a = b^2; b^2 + b = c^2; c^2 + c = a^2$.

Chứng minh $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

Bài 39. Cho $a + b + c = 0$. Tính giá trị

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)$$

Bài 40. Cho $a + b + c = 0$. Tính $I = \frac{4bc - a^2}{bc + 2a^2} \cdot \frac{4ca - b^2}{ca + 2b^2} \cdot \frac{4ab - c^2}{ab + 2c^2}$



CHƯƠNG

5

BẤT ĐẲNG THỨC

Tạ Hoàng Thông

§1. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN



DÙNG BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$$



DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

B.1 Bất đẳng thức Cauchy

a. Bất đẳng thức Cauchy cho hai số

Với a, b là hai số không âm ta luôn có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

Các hình thức khác của bất đẳng thức Cauchy:

- $a^2 + b^2 \geq 2ab$
- $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$
- $ab \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$ với $a, b > 0$.

b. Bất đẳng thức Cauchy cho ba số

Với a, b, c là ba số không âm ta luôn có $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Các hình thức khác của bất đẳng thức Cauchy:

- $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ với $a, b, c \geq 0$
- $abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3$ với $a, b, c \geq 0$
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$ với $a, b, c > 0$.

B.2 Bất đẳng thức Bunhiacopxki (bất đẳng thức B.C.S)

a. Dạng bốn số

- Với bốn số thực a, b, c, d ta luôn có $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
- Các hình thức khác của bất đẳng thức B.C.S $\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d} \geq \frac{(a + b)^2}{c + d}$ với $c, d > 0$.

b. Dạng sáu số

- Với sáu số thực a, b, c, x, y, z ta luôn có

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

- Các hình thức khác của bất đẳng thức B.C.S $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ với $x, y, z > 0$.

Chú ý: Ngoài các bất đẳng thức cổ điển trên ta cũng thường dùng các bất đẳng thức sau:

- $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
- $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$
- $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$



CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC

Nguyên tắc cực hạn, nguyên lí Dirichlet, phương pháp hình học, phương pháp dồn biến, phương pháp tam thức bậc hai,...

Ví dụ 1. Cho $a, b > 0$ và $a + b = 2$. Chứng minh rằng $ab(a^2 + b^2) \leq 2$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$ab(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}2ab(a^2 + b^2) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(2ab + a^2 + b^2)^2}{4} = \frac{(a+b)^4}{8} = \frac{2^4}{8} = 2 \text{ (đpcm)}$$

□

Ví dụ 2. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng $A = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

Lời giải.

Cách 1: Bất đẳng thức tương đương: $\frac{a^2}{b} - 2a + b + \frac{b^2}{a} - 2b + a \geq \sqrt{2(a^2 + b^2)} - a - b$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(a-b)^2}{a} \geq \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b} \Leftrightarrow (a-b)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\frac{1}{a} + \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a}{b(\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b)} \right] \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2}{b} + b + 2b + \frac{b^2}{a} + a + 2a - 3(a+b) = \left(\frac{a^2 + b^2}{b} + 2b \right) + \left(\frac{a^2 + b^2}{a} + 2a \right) - 3(a+b) \\ &\geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} - 3\sqrt{2(a^2 + b^2)} = \sqrt{2(a^2 + b^2)} \end{aligned}$$

Suy ra đpcm.

Cách 3:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^3 + b^3}{ab} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{ab} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (a^2 + b^2 - ab) \geq \frac{4}{a+b} \cdot \left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} \right) \\ &\geq \frac{4}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2} = \sqrt{2(a^2 + b^2)} \end{aligned}$$

Suy ra đpcm.

Cách 4:

$$\text{Ta có } A^2 = \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{a^2} + 2ab$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^4}{b^2} + ab + ab \geq 3a^2 \\ \frac{b^4}{a^2} + ab + ab \geq 3b^2 \\ a^2 + b^2 \geq 2ab \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{a^2} + 4ab + a^2 + b^2 \geq 3(a^2 + b^2) + 2ab \Leftrightarrow A^2 \geq 2(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow A \geq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \text{ (đpcm)}$$

Cách 5:

$$\text{Ta có } A = \frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{ab^2} \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{ab(a + b)} \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{\frac{a^2 + b^2}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2)}} = \sqrt{2(a^2 + b^2)} \text{ (đpcm)} \quad \square$$

Ví dụ 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a, \frac{b^2}{c} + c \geq 2b, \frac{c^2}{a} + a \geq 2c$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta suy ra $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$ (đpcm). □

Ví dụ 4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b, \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c, \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta suy ra $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$ (đpcm). □

Ví dụ 5. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3$

Lời giải.

Đặt $x = \frac{ab}{c}, y = \frac{bc}{a}, z = \frac{ca}{b} \Rightarrow xy + yz + zx = a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Mà $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow x + y + z \geq 3$

Suy ra $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3$ (đpcm) □

Ví dụ 6. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng $a(1 + b) + b(1 + 4c) + c(1 + 9a) \geq 12\sqrt{abc}$ (1)

**Lời giải.**

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq a, \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b, \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta suy ra $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số ta có $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$

Suy ra $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (đpcm) □

Ví dụ 7. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq a, \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b, \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta suy ra $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số ta có $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$

Suy ra $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (đpcm). □

Ví dụ 8. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a + (b+c) \geq 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b+c}} \geq \frac{2\sqrt{a}}{a+b+c} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } \sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}, \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$$

$$\text{Cộng ba bất đẳng thức trên ta suy ra } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+c \\ b = c+a \\ c = a+b \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 0 \text{ (vô lí)}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2 \text{ (đpcm)} \quad \square$$

Ví dụ 9. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a+2b}{3}} + \sqrt{\frac{b+2c}{3}} + \sqrt{\frac{c+2a}{3}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có

$$\sqrt{(1^2+1^2+1^2)(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{c^2})} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a+2b}{3}} \geq \frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{3}$$



Do đó $\sqrt{\frac{b+2c}{3}} \geq \frac{\sqrt{b}+2\sqrt{c}}{3}, \sqrt{\frac{c+2a}{3}} \geq \frac{\sqrt{c}+2\sqrt{a}}{3}$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta suy ra đpcm. □

Ví dụ 10. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leq \frac{3}{2}$

Lời giải.

Ta có $ab+c = ab+c(a+b+c) = a(b+c) + c(b+c) = (a+c)(b+c)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} = \sqrt{\frac{a}{a+c} \cdot \frac{b}{b+c}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right)$

Chứng minh tương tự ta có $\sqrt{\frac{bc}{bc+a}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} \right), \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+b} \right)$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leq \frac{3}{2}$ (đpcm) □

Ví dụ 11. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}} + \frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} \leq 2$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 4(b^3+c^3) &= (b+c)(4b^2-4bc+4c^2) = (b+c)(3b^2+3c^2+b^2+c^2-4bc) \\ &\geq (b+c)(6bc+b^2+c^2-4bc) = (b+c)^3 \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{4(b^3+c^3)} \geq b+c \end{aligned}$$

Làm tương tự ta suy ra

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}} + \frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} \leq \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c} = 2$$

□

Ví dụ 12. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải.

Cách 1

Xét hiệu

$$\begin{aligned} \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2} &= a-b+b-c+c-a=0 \\ \Leftrightarrow 2VT &= \frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \end{aligned}$$



Ta chứng minh $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{a + b}{3}$
 $\Leftrightarrow 3(a^2 - ab + b^2) \geq a^2 + ab + b^2 \Leftrightarrow 2(a - b)^2 \geq 0$ (đúng)
 Do đó $2VT \geq \frac{2(a + b + c)}{3} \Leftrightarrow VT \geq \frac{a + b + c}{3}$ (đpcm)

Cách 2

Ta chứng minh $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3} \Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a - b)(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0$
 Do đó $VT \geq \frac{2a - b}{3} + \frac{2b - c}{3} + \frac{2c - a}{3} = \frac{a + b + c}{3}$ (đpcm)

$$VT = \frac{a^4}{a^3 + a^2b + ab^2} + \frac{b^4}{b^3 + b^2c + bc^2} + \frac{c^4}{c^3 + c^2a + ca^2}$$

Cách 3

$$\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3 + b^3 + c^2 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} \geq \frac{\frac{1}{3}(a + b + c)^2}{a + b + c} = \frac{a + b + c}{3}$$

□

Ví dụ 13. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + b}{b + c} + \frac{b^2 + c}{c + a} + \frac{c^2 + a}{a + b} \geq 2$ (1)

Lời giải.**Cách 1**

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a^2 + b(a + b + c)}{b + c} + \frac{b^2 + c(a + b + c)}{c + a} + \frac{c^2 + a(a + b + c)}{a + b} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a + b)}{b + c} + b + \frac{b(b + c)}{c + a} + c + \frac{c(a + c)}{a + b} + c \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a + b)}{b + c} + \frac{b(b + c)}{c + a} + \frac{c(a + c)}{a + b} \geq 1 \quad (2)$$

Đặt $x = b + c, y = c + a, z = a + b \Rightarrow a = \frac{y + z - x}{2}, b = \frac{x + z - y}{2}, c = \frac{x + y - z}{2}, x + y + z = 2$

(2) thành: $\frac{z(y + z - x)}{x} + \frac{x(x + z - y)}{y} + \frac{y(x + y - z)}{z} \geq 2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \right) + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right) - (x + y + z) \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \right) + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right) \geq 4$$

Áp dụng ví dụ 1 và ví dụ 2 ta có $VT(3) \geq 2(x + y + z) = 4$

Suy ra (1) đúng.

Cách 2 Ta có

$$\frac{a^2 + b}{b + c} = \frac{a^2 - 1}{b + c} + \frac{1 + b}{b + c} = \frac{-(1 - a)(1 + a)}{b + c} + \frac{a + b + c + b}{b + c} = \frac{-(b + c)(1 + a)}{b + c} + \frac{a + b}{b + c} + 1 = \frac{a + b}{b + c} - a$$

Tương tự $\frac{b^2 + c}{c + a} = \frac{b + c}{c + a} - b, \frac{c^2 + a}{a + b} = \frac{c + a}{a + b} - c$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a + b}{b + c} - a + \frac{b + c}{c + a} - b + \frac{c + a}{a + b} - c \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a + b}{b + c} + \frac{b + c}{c + a} + \frac{c + a}{a + b} \geq 3 \quad (4)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số ta suy ra (4) suy ra (1).

□

Ví dụ 14. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+d}\right)^2 + \left(\frac{d}{d+a}\right)^2 \geq 1$

Lời giải.

Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{d}{c}, t = \frac{a}{d} \Rightarrow xyzt = 1$

Bất đẳng thức thành $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \geq 1 \quad (*)$

Ta có $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{1+xy} = \frac{xy(x-y)^2 + (1-xy)^2}{(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)} \geq 0$

Suy ra $VT(*) \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+zt} = \frac{1}{1+xy} + \frac{xy}{1+xy} = 1$ (đpcm) □

Ví dụ 15. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = (x+1)^2 + \left(\frac{x^2}{x+1} + 2\right)^2$

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= (x+1)^2 + \left(\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right)^2 = (x+1)^2 + \left[\frac{(x+1)^2+1}{x+1}\right]^2 = (x+1)^2 + \left(\frac{1}{x+1} + x+1\right)^2 \\ &= 2(x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2} + 2 \geq 2\sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow x = -1 \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Vậy $A_{\min} = 2\sqrt{2} + 2$ khi $x = -1 \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. □

Ví dụ 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1}$ với $a, b > 1$

Lời giải.

Cách 1

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $A \geq 2\sqrt{\frac{a^2b^2}{(a-1)(b-1)}}$

Mà $a^2 + 4 \geq 4a \Leftrightarrow a^2 \geq 4(a-1) \Leftrightarrow \frac{a^2}{a-1} \geq 4$

Suy ra $A \geq 2\sqrt{4 \cdot 4} = 8$ dấu bằng xảy ra khi $a = b = 2$.

Vậy $A_{\min} = 8$ khi $a = b = 2$.

Cách 2

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{cases} \frac{a^2}{b-1} + 4(b-1) \geq 4a \\ \frac{b^2}{a-1} + 4(a-1) \geq 4b \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} + 4(a+b) - 8 \geq 4(a+b) \Rightarrow A \geq 8$$



Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 2$.

Vậy $A_{\min} = 8$ khi $a = b = 2$.

Cách 3

$$A \geq \frac{(a+b)^2}{a+b-2} = \frac{(a+b)^2 + 16 - 16}{a+b-2} \geq \frac{8(a+b) - 16}{a+b-2} = 8$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 2$.

Vậy $A_{\min} = 8$ khi $a = b = 2$. □

Ví dụ 17. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^4(1-x^2)$ với $-1 \leq x \leq 1$

Lời giải.

$$2A = x^2 \cdot x^2(2-2x^2) \leq \left(\frac{x^2 + x^2 + 2 - 2x^2}{3} \right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow A \leq \frac{4}{27}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 2 - 2x^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

Vậy $A_{\max} = \frac{4}{27}$ khi $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$. □

Ví dụ 18. Tìm giá trị lớn nhất của $A = \sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a}$ với $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c = \frac{3}{4}$.

Lời giải.

Đặt $x = \sqrt[3]{a+3b}, y = \sqrt[3]{b+3c}, z = \sqrt[3]{c+3a} \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 4(a+b+c) = 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{cases} x^3 + 1 + 1 \geq 3x \\ y^3 + 1 + 1 \geq 3y \\ z^3 + 1 + 1 \geq 3z \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 6 \geq 3(x+y+z) \Rightarrow x+y+z \leq 3 \Rightarrow A \leq 3$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1 \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{4}$

Vậy $A_{\max} = 3$ khi $a = b = c = \frac{1}{4}$. □

Ví dụ 19. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x + 18} = \frac{x^2 - 6x + 15}{x^2 - 6x + 11}$

Lời giải.

Ta có

$$VT = \sqrt{x^2 - 6x + 18} = \sqrt{(x-3)^2 + 9} \geq 3$$

$$VP = \frac{x^2 - 6x + 15}{x^2 - 6x + 11} = 1 + \frac{4}{(x-3)^2 + 2} \leq 1 + \frac{4}{2} = 3$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Thử lại ta thấy $x = 3$ là nghiệm phương trình. □

Ví dụ 20. Giải phương trình $(\sqrt{x+1}+1)^3 = \sqrt{x^3+2}$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$

Phương trình tương đương $\sqrt{x+1}+1 = \sqrt[6]{x^3+2}$

Ta có $\sqrt{x+1}+1 \geq \sqrt{x+1+1} = \sqrt{x+2}$

Ta chứng minh $\sqrt{x+2} \geq \sqrt[6]{x^3+2} \Leftrightarrow (x+2)^3 \geq x^3+2 \Leftrightarrow 6(x+1)^2 \geq 0$ (đúng)

$\Rightarrow \sqrt{x+1}+1 \geq \sqrt[6]{x^3+2}$

Dấu bằng xảy ra $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Thử lại ta thấy $x=-1$ là nghiệm của phương trình. □

Ví dụ 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10 \end{cases}$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có: $5\sqrt{x^2+9} = \sqrt{(4^2+3^2)(x^2+3^2)} \geq |4x+3.3| \geq 4x+9$

Tương tự: $5\sqrt{y^2+9} \geq 4y+9$

$$\Rightarrow 5\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\right) \geq 4(x+y)+18=4.8+18=50 \Rightarrow \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9} \geq 10$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{3}{3} = \frac{y}{4}, x+y=8, 4x+9 \geq 0, 4y+8 \geq 0 \Leftrightarrow x=y=4$

Thử lại ta thấy $x=y=4$ là nghiệm của hệ phương trình. □

Ví dụ 22. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0 \\ (1+z)(x+y)=xyz+2 \\ x>1, y>1, z>0 \end{cases}$

Lời giải.

Phương trình đầu tương đương $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9$

Đặt $a=x-1>0, b=y-1>0, c=z>0$

Hệ phương trình thành $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=9 \\ a+b+c=abc \\ a, b, c>0 \end{cases}$

$$\text{Mà } a+b+c \geq \frac{9}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{9abc}{ab+bc+ca} \geq \frac{9abc}{a^2+b^2+c^2} = \frac{9abc}{9} = abc$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \Rightarrow 3a^2=9 \Leftrightarrow a=\sqrt{3}=b=c$ (do $a>0$)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x=y=\sqrt{3}+1, z=\sqrt{3}$. □

Bài tập

Bài 1. Chứng minh rằng $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c} \geq 0$.

Bài 2. Cho $a+b \geq 1$. Chứng minh rằng $a^3+b^3 \geq \frac{1}{4}$.

Bài 3. Cho $ab=1$ và $a>b$. Chứng minh rằng $\frac{a^2+b^2}{a-b} \geq 2\sqrt{2}$.



Bài 4. Cho $a + b \geq 2$. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 \geq a^3 + b^3$.

Bài 5. Cho $ab > 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$.

Bài 6. Cho $a \geq b > 0$ và $c \geq \sqrt{ab}$. Chứng minh rằng $\frac{a+c}{\sqrt{a^2+c^2}} \geq \frac{b+c}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$ và $a = b + c$. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2}$.

Bài 8. Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng $\frac{(a-b)^2}{8a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}$.

Bài 9. Cho $0 \leq y \leq x \leq 1$. Chứng minh rằng $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}$.

Bài 10. Cho $0 < x \leq y \leq z$. Chứng minh rằng $y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{y}(x+z) \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)(x+z)$.

Bài 11. Cho $a^{2024} + b^{2024} = a^{2022} + b^{2022}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \leq 2$.

Bài 12. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng $(1+a)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 \geq 256$.

Bài 13. Chứng minh rằng:

- Nếu $a > b > 0$ thì $a + \frac{1}{(a-b)b} \geq 3$.
- Nếu $a > b > 1$ thì $a + \frac{1}{(a-b)(b+1)} \geq 2$.
- Nếu $a > b > 0$ thì $a + \frac{1}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3$.
- Nếu $a > b > c > 0$ thì $a + \frac{1}{\frac{c(a-b)(b-c)}{27}} \geq 4$.
- Nếu $a > 1$ thì $2a + \frac{5}{2(a-1)(a+1)^3} \geq \frac{5}{2}$.
- Nếu $a > b > c > 0$ thì $2a + \frac{1}{(a-b)(b^2-c^2)} > 4$.

Bài 14. Chứng minh rằng:

- Nếu $a, b > 0$ và $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{1-2ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 6$.
- Nếu $a, b > 0$ và $a + b = 1$ thì $\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 6$.
- Nếu $a, b > 0$ và $a + b = \frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{10}{\sqrt{a}} + \frac{10}{\sqrt{b}} \geq 48$.
- Nếu $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ thì $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 30$.

Bài 15. Chứng minh rằng:

- Nếu $0 \leq a, b \leq 1$ thì $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} + (1-a)(1-b) \leq 1$.
- $0 \leq a, b \leq 2$ thì $2 + (2-a)(2-b) \leq \frac{8}{a+b}$.
- Nếu $0 \leq a, b, c \leq 1$ thì $(1-a)(1-b)(1-c) + \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq 1$.
- Nếu $0 \leq a, b, c \leq 2$ thì $\frac{1}{8}(2-a)(2-b)(2-c) + \frac{a}{b+c+2} + \frac{b}{c+a+2} + \frac{c}{a+b+2} \leq 1$.

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:



- a) $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2$.
- b) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
- c) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{4c^2}{a} \geq a + 3b$.

Bài 17. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$.
- b) $\frac{2\sqrt{a}}{a^3+b^2} + \frac{2\sqrt{b}}{b^3+c^2} + \frac{2\sqrt{c}}{c^3+a^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.
- c) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{4c^2}{a+b} \geq 0$.

Bài 18. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geq \frac{a+b+c}{3}$.
- b) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} \geq \frac{64c-a-b}{9}$.
- c) $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.
- d) $\frac{a^3}{(a+b)(b+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{a+b+c}{4}$.

Bài 19. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{3}{2}$.
- b) $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.

Bài 20. Chứng minh rằng:

- a) Nếu $a, b \geq 1$ thì $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$.
- b) Nếu $a, b \geq 4$ thì $a\sqrt{b-4} + b\sqrt{a-4} \leq \frac{ab}{2}$.
- c) Nếu $a, b, c \geq 1$ thì $ab\sqrt{c-1} + bc\sqrt{a-1} + ca\sqrt{b-1} \leq \frac{3abc}{2}$.
- d) $-\frac{1}{2} \leq \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{1}{2}$.

Bài 21. Chứng minh rằng:

- a) Nếu $ab+bc+ca=4$ thì $a^4+b^4+c^4 \geq \frac{16}{3}$.
- b) Nếu $a, b, x, y, z > 0$ và $x+y+z=1$ thì

$$\left(a + \frac{b}{x}\right)^4 + \left(a + \frac{b}{y}\right)^4 + \left(a + \frac{b}{z}\right)^4 \geq 3(a+3b)^4.$$

Bài 22. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

- a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$.
- b) $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$.
- c) $a^m + b^m + c^m \geq a^n + b^n + c^n$ với $m \geq n, m, n \in \mathbb{N}$.

Bài 23. Cho $a, b, c > 0$ và $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

- a) $a^5 + b^5 + c^5 \geq 3$.
- b) $\frac{a}{2a^2+bc} + \frac{b}{2b^2+ca} + \frac{c}{2c^2+ab} \geq abc$.



Bài 24. Chứng minh rằng:

- a) Nếu $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ thì $\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- b) Nếu $a, b, c > 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 1$ thì $\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{1-c^2}} > 2$.

Bài 25. Tìm giá trị nhỏ nhất các biểu thức sau:

- a) $A = x + \frac{1}{4(x+2)}$ với $x > -2$.
- b) $B = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-2}$ với $x > 2$.
- c) $C = \frac{x^2}{x-1}$ với $x > 1$.
- d) $D = \frac{x^2 + 1}{x+2}$ với $x > -2$.

Bài 26. Tìm giá trị lớn nhất các biểu thức sau:

- a) $A = \frac{ab\sqrt{c-1} + bc\sqrt{a-2} + ca\sqrt{b-3}}{abc}$
- b) $B = \frac{(x+1)\sqrt{y} + (y+1)\sqrt{x}}{(x+1)(y+1)}$
- c) $C = \frac{(x+2)\sqrt{y} + (y+4)\sqrt{x+1}}{(x+2)(y+4)}$
- d) $D = \frac{(x+2)\sqrt{y-2} + y\sqrt{x-1}}{(x+2)y}$

Bài 27. Chứng minh rằng:

- a) Nếu $a, b > 0$ và $a + b = 1$ thì $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.
- b) $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c)$.
- c) $|ab + 1| + |ab - 1| + |a + b| + |a - b| \leq 2\sqrt{2(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$.
- d) Nếu $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ thì $\frac{a^3}{a + 3b + 5c} + \frac{b^3}{b + 3c + 5a} + \frac{c^3}{c + 3a + 5b} \geq \frac{1}{27}$.
- e) Nếu $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$ thì $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài 28. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.
- b) $\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1$
- c) $\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq 1$.
- d) $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$.

Bài 29. Cho $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq 2$.
- b) $\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2$.
- c) $\frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+d^2} + \frac{d+1}{1+a^2} \geq 4$.
- d) $\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+d^2} + \frac{1}{1+a^2} \geq 2$.

Bài 30. Chứng minh rằng:

- a) Nếu $a, b, c > 0$ và $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 2$ thì $abc \leq \frac{1}{8}$.
- b) Nếu $a, b, c, d > 0$ và $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \geq 3$ thì $abcd \leq \frac{1}{81}$.
- c) Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} = n-1$ thì $a_1 a_2 \dots a_n \leq \frac{1}{(n-1)^n}$.
- d) Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ thì

$$\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right) \left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{a_n^2} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n.$$

- e) Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $\frac{1}{2023+a_1} + \frac{1}{2023+a_2} + \dots + \frac{1}{2023+a_n} = \frac{1}{2023}$
thì $\frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}{n-1} \geq 2023$

Bài 31. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

- a) $\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{3}$
- b) $(abc+1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a+b+c+6.$
- c) $\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b}.$
- d) $\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 + \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$
- e) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{3}(a+b+c)\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}.$
- f) $\sqrt{a^2+ab+b^2} + \sqrt{b^2+bc+c^2} + \sqrt{c^2+ca+a^2} \geq \sqrt{3}(a+b+c).$
- g) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{a^2-ab+b^2} + \sqrt{b^2-bc+c^2} + \sqrt{c^2-ca+a^2}.$
- h) $\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$
- i) $\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{n-1}.$

Bài 32. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

- a) $3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3 + 2(a+b+c).$
- b) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3.$
- c) $\frac{a^2+b^2}{b+c} + \frac{b^2+c^2}{c+a} + \frac{c^2+a^2}{a+b} \geq 3.$
- d) $a+b+c \geq a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2.$

Bài 33. Cho $0 \leq a, b, c \leq 1$. Chứng minh rằng $2(a^3 + b^3 + c^3) \leq 3 + a^2 b + b^2 c + c^2 a.$

Bài 34. Cho $a, b, c > 0$ và $abc \geq ab + bc + ca$. Chứng minh rằng $abc \geq 3(a+b+c).$

Bài 35. Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = a \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{bc}\right) + b \left(\frac{b}{2} + \frac{1}{ca}\right) + c \left(\frac{c}{2} + \frac{1}{ab}\right).$$

Bài 36. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = \frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}} + \frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}} + \frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+2b\sqrt{b}}.$$

Bài 37. Cho $a, b, c > 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau $P = 3(ab + bc + ca) - abc$.

Bài 38. Cho $x, y \neq 0$ và $xy(x + y) = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Bài 39. Cho $x, y \geq 0$ và $x^3 + y^3 \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$.

Bài 40. Cho $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = xy + yz + 2zx$.

Bài 41. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|$.

Bài 42. Cho $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$.

Bài 43. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{82}.$$

Bài 44. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}.$$

Bài 45. Cho $a, b, c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Chứng minh rằng $\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$.

Bài 46. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab} + \frac{\sqrt{1+b^3+c^3}}{bc} + \frac{\sqrt{1+c^3+a^3}}{ca} \geq 3\sqrt{3}$
- b) $\frac{\frac{ab}{a^5+b^5+ab}}{2} + \frac{\frac{bc}{b^5+c^5+bc}}{2} + \frac{\frac{ca}{c^5+a^5+ca}}{2} \leq 1.$
- c) $\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1} + \frac{1}{(b+1)^2+c^2+1} + \frac{1}{(c+1)^2+a^2+1} \leq 1.$

Bài 47. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{a}{ab+3c} + \frac{b}{bc+3a} + \frac{c}{ca+3b} \geq \frac{3}{4}.$
- b) $\frac{a^2+bc}{b+ca} + \frac{b^2+ca}{c+ab} + \frac{c^2+ab}{a+bc} \geq 3.$
- c) $\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}} \geq 3.$
- d) $\frac{1}{6-ab} + \frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} \leq \frac{3}{5}.$

Bài 48. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$
- b) $\frac{a-1}{b} + \frac{b-1}{c} + \frac{c-1}{a} \geq 0.$
- c) $\frac{a-1}{b+c} + \frac{b-1}{c+a} + \frac{c-1}{a+b} \geq 0.$
- d) $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \geq \frac{3}{4}.$
- e) $\frac{1}{(1+a)^3} + \frac{1}{(1+b)^3} + \frac{1}{(1+c)^3} \geq \frac{3}{8}.$
- f) $\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$



Bài 49. Cho $a, b, c > 0$ và. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{13}{6}$.
- b) $\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geq a+b+c$.
- c) $\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.
- d) $\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2} + \frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2} + \frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2} \leq a+b+c$.
- e) $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1$.

Bài 50. Cho $a, b, c > 0$ và. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{ab}{a^2+bc+ca} + \frac{bc}{b^2+ca+ab} + \frac{ca}{c^2+ab+bc}$.
- b) $\left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^2 \geq \frac{1}{a^2+bc+ab} + \frac{1}{b^2+bc+ca} + \frac{1}{c^2+ca+ab}$.
- c) $\left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^2 \geq \frac{1}{2a^2+bc} + \frac{1}{2b^2+ca} + \frac{1}{2c^2+ab}$.
- d) $\frac{1}{a+b+c} \geq \frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}$.

Bài 51. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$.
- b) $\frac{1}{a+b^2+1} + \frac{1}{b+c^2+1} + \frac{1}{c+a^2+1} \leq 1$.
- c) $\frac{1}{a^5+b^2+c^2} + \frac{1}{b^5+c^2+a^2} + \frac{1}{c^5+a^2+b^2} \geq 0$.

Bài 52. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^3+b^2+c} + \frac{b}{b^3+c^2+a} + \frac{c}{c^3+a^2+b} \leq 1$$

Bài 53. Cho $a, b, c > 0$ và $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{1}{a^2+b^2+4} + \frac{1}{b^2+c^2+4} + \frac{1}{c^2+a^2+4} \leq \frac{1}{2}$.
- b) $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}$.
- c) $\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \leq 1$.

Bài 54. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

- a) $\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.
- b) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b + \frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c + \frac{1}{c}\right)^{10} \geq \frac{10^{10}}{3^9}$.
- c) $\frac{ab}{c(c+ab)} + \frac{bc}{a(a+bc)} + \frac{ca}{b(b+ca)} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Bài 55. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

- a) $\frac{1}{2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.
- b) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}}$.



- c) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$
- d) $\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$
- e) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}.$
- f) $\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+ca}{(c+a)^2} + \frac{c^2+ab}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2}.$
- g) $\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+2ca}{(c+a)^2} + \frac{c^2+2ab}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}.$
- h) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3}.$
- i) $\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$
- j) $(a^2-bc)\sqrt{b+c} + (b^2-ca)\sqrt{c+a} + (c^2-ab)\sqrt{a+b} \geq 0.$

Bài 56. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

- a) $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca).$
- b) $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca).$



CHƯƠNG

6

MỞ ĐẦU VỀ ĐA THỨC

Vương Trung Dũng

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC PHÉP TOÁN

Trong khuôn khổ bài giảng ta chỉ xét các đa thức với hệ số thực hoặc hệ số hữu tỉ.



A ĐỊNH NGHĨA

KHÁI NIỆM

Xét $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$. Tập các đa thức một biến có hệ số trong $\mathbb{K}$ được định nghĩa là

$$\mathbb{K}[x] = \left\{ a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \sum_{i=0}^n a_ix^i : a_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Mỗi phần tử thuộc $\mathbb{K}[x]$ được viết là $f(x)$ hoặc đơn giản chỉ là f . Phần tử $f = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ với quy ước $x^0 = 1$ được gọi là *một đa thức của biến x* .

- Nếu $a_n \neq 0$ thì n được gọi là *bậc của đa thức f* và kí hiệu là $n = \deg f$. Đặc biệt, nếu
 - $f = a$ là hằng số thì $\deg f = 0$;
 - $f = 0$ thì ta quy ước $\deg f = -\infty$ hoặc $\deg f = -1$, tùy theo việc ta sử dụng bậc vào lĩnh vực nào.
- a_n được gọi là *hệ tử cao nhất* (hoặc *hệ số cao bậc cao nhất*) còn a_0 được gọi là *hệ tử tự do* (hoặc *hệ số tự do*).
- Nếu $a_n = 1$ thì f được gọi là *đa thức monic*.



B MỘT SỐ PHÉP TOÁN

Cho $f = \sum_{i=0}^n a_ix^i, g = \sum_{i=0}^m b_ix^i \in \mathbb{K}[x]$. Khi đó ta định nghĩa:

- $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ a_i = b_i, \text{ với mọi } i = 0, 1, \dots, n; \end{cases}$
- $f + g = \sum_{i=0}^{m+n} (a_i + b_i)x^i$;
- $fg = \sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^i a_{i-j}b_j \right) x^i$.

Mệnh đề

Cho $f, g \in \mathbb{K}[x]$, giả sử $\deg f = m, \deg g = n$. Khi đó ta có:

- $\deg(f + g) \leq \max\{m, n\}$;
- $\deg fg = m + n$.



PHÉP CHIA ĐA THỨC

ĐỊNH LÝ

Cho hai đa thức $f, g \in \mathbb{K}[x]$ khi đó tồn tại duy nhất $q, r \in \mathbb{K}[x]$ sao cho

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

với $\deg r < \deg g$.

Chứng minh 1. Giả sử $f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0, g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo m .

Nếu $m < n$ thì ta có thể chọn $q(x) = 0, r(x) = f(x)$. Giả sử $m \geq n$ và định lý đã được chứng minh với các đa thức có bậc nhỏ hơn m . Ta sẽ chứng minh định lý đúng với các đa thức bậc m . Xét đa thức

$$h(x) = f(x) - \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}g(x).$$

Dễ thấy $\deg h \leq m-1$ nên theo giả thiết quy nạp tồn tại $q_1(x), r_1(x)$ sao cho $h(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$. Khi đó

$$f(x) = \left(\frac{a_m}{b_n}x^{m-n} + q_1(x)\right)g(x) + r_1(x).$$

Đặt $q(x) = \frac{a_m}{b_n}x^{m-n} + q_1(x), r(x) = r_1(x)$ ta được biểu diễn cần tìm.

Giả sử tồn tại $q_1(x), r_1(x), q_2(x), r_2(x)$ sao cho $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$. Khi đó

$$g(x)[q_1(x) - q_2(x)] = r_2(x) - r_1(x).$$

Theo sự tồn tại của $r_1(x), r_2(x)$ thì $\deg(r_1(x) - r_2(x)) < n$ và $q_1(x) \neq q_2(x)$ nên $\deg g(x)[q_1(x) - q_2(x)] \geq n$ (mâu thuẫn). Vậy sự tồn tại của $q(x)$ và $r(x)$ là duy nhất.

Trong định lý trên, ta gọi

- $q(x), r(x)$ lần lượt là thương và số dư trong phép chia của $f(x)$ cho $g(x)$.
- Nếu $r(x) = 0$ thì ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ và ký hiệu $f(x) : g(x)$ hay $g(x)$ chia hết $f(x)$ và kí hiệu $g(x) | f(x)$.

Ví dụ 1. Khi thực hiện phép chia của đa thức $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ cho đa thức $q(x) = x^2 - x - 3$ ta được thương là đa thức $q(x) = x + 2$ và đa thức dư là $r(x) = 5x + 5$ nên ta viết

$$x^3 + x^2 - 1 = (x + 2)(x^2 - x - 3) + 5x + 5.$$

KHÁI NIỆM

Cho $\varphi(x)$ là một đa thức khác 0. Ta nói các đa thức $f(x), g(x)$ *đồng dư theo môđun* đa thức $\varphi(x)$ nếu $\varphi(x) | f(x) - g(x)$. Khi đó ta kí hiệu

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{\varphi(x)}.$$

ĐỊNH LÝ

Cho $\varphi(x)$ là một đa thức khác 0. Khi đó:

- $f(x) \equiv f(x) \pmod{\varphi(x)}$, với mọi $f \in \mathbb{K}[x]$;
- Nếu $f(x) \equiv g(x) \pmod{\varphi(x)}$ thì $g(x) \equiv f(x) \pmod{\varphi(x)}$, với mọi $f, g \in \mathbb{K}[x]$;
- Nếu $f(x) \equiv g(x) \pmod{\varphi(x)}$ và $g(x) \equiv h(x) \pmod{\varphi(x)}$ thì $f(x) \equiv h(x) \pmod{\varphi(x)}$, với mọi $f, g, h \in \mathbb{K}[x]$;
- Nếu $f(x) \equiv g(x) \pmod{\varphi(x)}$ thì $f(x).h(x) \equiv g(x).h(x) \pmod{\varphi(x)}$, với mọi $f, g, h \in \mathbb{K}[x]$;
- Cho các đa thức $f_1(x), \dots, f_n(x), g_1(x), \dots, g_n(x)$ và $u_1(x), \dots, u_n(x)$. Nếu $f_i(x) \equiv g_i(x) \pmod{\varphi(x)}$, với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ thì

$$u_1(x)f_1(x) + \dots + u_n(x)f_n(x) \equiv u_1(x)g_1(x) + \dots + u_n(x)g_n(x) \pmod{\varphi(x)};$$

- Nếu $f_i(x) \equiv g_i(x) \pmod{\varphi(x)}$ với mọi $f_i, g_i \in \mathbb{K}[x]$ và với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ thì

$$f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x) \equiv g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x) \pmod{\varphi(x)};$$

- Nếu $f(x) + g(x) \equiv h(x) \pmod{\varphi(x)}$ thì $f(x) \equiv h(x) - g(x) \pmod{\varphi(x)}$;
- Nếu $f(x) \equiv g(x) \pmod{\varphi(x)}$ thì $f^n(x) \equiv g^n(x) \pmod{\varphi(x)}$, với mọi $f, g \in \mathbb{K}[x]$ và n là một số tự nhiên bất kì;
- Nếu $f(x) \equiv g(x) \pmod{\varphi(x)}$ thì

$$h(f(x)) \equiv h(g(x)) \pmod{\varphi(x)}$$

với mọi $f, g, h \in \mathbb{K}[x]$.

Ví dụ 2. Tìm đa thức dư khi chia đa thức $(1+x)^{2022}$ cho đa thức $1+x+x^2$.

Chứng minh 2. Ta có

$$1+x \equiv -x^2 \pmod{1+x+x^2}.$$

Suy ra

$$(1+x)^{2022} \equiv (-x^2)^{2022} \equiv (x^3)^{1348} \pmod{1+x+x^2}.$$

Lại có $x^3 \equiv 1 \pmod{1+x+x^2}$ nên $(x^3)^{1348} \equiv 1 \pmod{1+x+x^2}$. Từ đó suy ra $(1+x)^{2022}$ chia cho $1+x+x^2$ dư 1.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, n và k ta có đa thức $f(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3k+2}$ chia hết cho đa thức $\varphi(x) = x^2 + x + 1$.



Chứng minh 3. Ta cần phải chứng minh rằng $f(x) \equiv 0 \pmod{\varphi(x)}$. Từ đẳng thức $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ suy ra $x^3 \equiv 1 \pmod{\varphi(x)}$. Khi đó áp dụng tính chất đồng dư ta nhận được

$$\begin{aligned}x^{3m} &\equiv (x^3)^m \equiv 1^m \equiv 1 \pmod{\varphi(x)}, \\x^{3n+1} &\equiv (x^3)^n \cdot x \equiv 1^n \cdot x \equiv x \pmod{\varphi(x)}, \\x^{3k+2} &\equiv (x^3)^k \cdot x^2 \equiv 1^k \cdot x^2 \equiv x^2 \pmod{\varphi(x)}, \\x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3k+2} &\equiv 1 + x + x^2 = \varphi(x) \equiv 0 \pmod{\varphi(x)}.\end{aligned}$$

Suy ra $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3k+2}$ chia hết cho $1 + x + x^2$.

Ví dụ 4. Hãy tìm những số tự nhiên n sao cho đa thức $P(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ chia hết cho đa thức $\varphi(x) = x^2 + x + 1$.

Chứng minh 4. Dễ thấy $x+1 \equiv -x^2 \pmod{\varphi(x)}$ và $x^3 \equiv 1 \pmod{\varphi(x)}$. Khi đó

$$(x+1)^n - x^n - 1 \equiv (-1)^n x^{2n} - x^n - 1 \pmod{\varphi(x)}.$$

Lấy $n = 6k + \ell$, $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Ta có

$$(x+1)^n - x^n - 1 \equiv (-1)^e x^{2\ell} - x^\ell - 1 \pmod{\varphi(x)},$$

từ đây ta nhận được

- Với $\ell = 0$: $P(x) \equiv 1 - 1 - 1 \equiv -1 \pmod{\varphi(x)}$, nghĩa là $P(x) \not\equiv 0 \pmod{\varphi(x)}$;
- Với $\ell = 1$: $P(x) \equiv -x^2 - x - 1 \equiv 0 \pmod{\varphi(x)}$, nghĩa là $P(x) \equiv 0 \pmod{\varphi(x)}$;
- Với $\ell = 2$: $P(x) \equiv -x^2 + x - 1 \equiv 2x \pmod{\varphi(x)}$, nghĩa là $P(x) \not\equiv 0 \pmod{\varphi(x)}$;
- Với $\ell = 3$: $P(x) \equiv 1 - 1 - 1 \equiv -3 \pmod{\varphi(x)}$, nghĩa là $P(x) \not\equiv 0 \pmod{\varphi(x)}$;
- Với $\ell = 4$: $P(x) \equiv x^2 - x - 1 \equiv -2(x+1) \pmod{\varphi(x)}$, thì $P(x) \not\equiv 0 \pmod{\varphi(x)}$;
- Với $\ell = 5$: $P(x) \equiv -x^2 - x - 1 \equiv 0 \pmod{\varphi(x)}$, nghĩa là $P(x) \equiv 0 \pmod{\varphi(x)}$.

Suy ra đa thức $P(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ chia hết cho đa thức $\varphi(x) = x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi số n có dạng $n = 6k + 1$ hoặc dạng $n = 6k + 5$.



ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

KHÁI NIỆM

Cho $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ và ít nhất một trong hai đa thức này khác 0. Đa thức $d(x) \in \mathbb{K}[x]$ được gọi là *ước chung lớn nhất* của $f(x)$ và $g(x)$ nếu nó thỏa đồng thời:

- $d(x) | f(x)$ và $d(x) | g(x)$;
 - Nếu có $d_1(x) \in \mathbb{K}[x]$ sao cho $d_1(x) | f(x)$ và $d_1(x) | g(x)$ thì $d_1(x) | d(x)$.
- Ta kí hiệu $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$ hay đơn giản hơn $d(x) = (f(x), g(x))$.

Từ định nghĩa trên ta thấy nếu $d(x)$ là một ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$ thì $\alpha \cdot d(x)$ cũng là một ước chung lớn nhất của đa thức này, với mọi $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Như vậy các đa thức ước chung lớn nhất của hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ sai khác nhau một nhân tử khả nghịch của $\mathbb{K}$ do đó từ đây về sau để đơn giản nếu không nói gì thêm ta thì ta hiểu rằng $d(x)$ đang là một đa thức monic.



ĐỊNH LÝ

(Thuật toán Euclide) Giả sử $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$. Khi đó

- Nếu $r(x) = 0$ thì $(f(x), g(x)) = a^{-1}g(x)$, trong đó a là hệ số có bậc cao nhất của $g(x)$.
- Nếu $r(x) \neq 0$ thì $(f(x), g(x)) = (g(x), r(x))$.

Chứng minh 5. Nếu $r(x) = 0$ thì $f(x) = g(x).h(x)$ nên đa thức $a^{-1}g(x)$ thỏa yêu cầu đề bài. Nếu $r(x) \neq 0$ thì đặt $d(x) = (f(x), g(x))$, $d'(x) = (g(x), r(x))$. Ta có $d(x)|f(x) - g(x)q(x) = r(x)$ nên $d(x)$ là ước chung của $g(x)$ và $r(x)$ và do đó $d'(x)|d(x)$. Mặt khác $d'(x)|g(x)q(x) + r(x) = f(x)$ suy ra $d'(x)$ là ước chung của $f(x)$ và $g(x)$ từ đó suy ra $d(x)|d'(x)$. Cuối cùng vì $d(x), d'(x)$ đều là đa thức monic nên $d(x) = d'(x)$, điều phải chứng minh.

Hệ quả

Ước chung lớn nhất của hai đa thức luôn luôn tồn tại.

Chứng minh 6. Giả sử $f(x), g(x)$ là hai đa thức khác 0 và $\deg f \geq \deg g$. Chia $f(x)$ cho $g(x)$ ta được

$$f(x) = g(x).s_1(x) + r_1(x).$$

Nếu $r_1(x) = 0$ thì ta có $(f(x), g(x)) = g(x)$. Nếu $r_1(x) \neq 0$ thì $\deg g > \deg r_1$ nên ta lại có

$$g(x) = r_1(x).s_2(x) + r_2(x).$$

Nếu $r_2(x) = 0$ thì $(f(x), g(x)) = (g(x), r_1(x)) = r_1(x)$. Còn nếu lại có $r_2(x) \neq 0$ thì $\deg g > \deg r_1 > \deg r_2$ và

$$(f(x), g(x)) = (g(x), r_1(x)) = (r_1(x), r_2(x)).$$

Tiếp tục quá trình này ta được dãy đa thức

$$f(x), g(x), r_1(x), r_2(x) \dots$$

sao cho $\deg f \geq \deg g > \deg r_1 > \deg r_2 > \dots$ và

$$(f(x), g(x)) = (g(x), r_1(x)) = (r_1(x), r_2(x)) \dots$$

Để ý rằng bậc của đa thức mà một dãy số nguyên không âm, dãy số trên là một dãy giảm thực sự nên quá trình này không thể kéo dài vô hạn được, và vì vậy đến một lúc nào đó ta sẽ nhận được đa thức $r_k(x)$ sao cho $r_{k-1}(x):r_k(x)$. Đa thức này chính là ước chung lớn nhất cần tìm, vì theo định lý trên ta có

$$(f(x), g(x)) = (g(x), r_1(x)) = \dots = (r_{k-1}(x), r_k(x)) = r_k(x).$$

Chứng minh trên cũng cho ta cách tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức bằng cách thực hiện hữu hạn bước phép chia giữa thương và số dư. Sơ đồ thực hiện này được gọi là *thuật toán Euclide*.

ĐỊNH LÝ

Nếu $f(x), g(x)$ là hai đa thức khác 0 và $d(x) = (f(x), g(x))$. Khi đó tồn tại các đa thức

$u(x), v(x)$ sao cho

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x),$$

hơn nữa $\deg u < \deg g$ và $\deg v < \deg f$.

ĐỊNH LÝ

Giả sử $f(x), g(x) \neq 0$, gọi $d(x)$ là đa thức khác 0 và có bậc nhỏ nhất trong tập tất cả các đa thức khác 0 có dạng $s(x)f(x) + g(x)t(x)$. Khi đó $d(x) = (f(x), g(x))$.

Chứng minh 7. Theo thuật toán chia Euclide tồn tại $q(x), r(x)$ sao cho $f(x) = q(x)d(x) + r(x)$, $\deg r < \deg d$. Khi đó

$$r(x) = f(x) - q(x)d(x) = [1 - q(x)s(x)]f(x) + [-q(x)t(x)]g(x).$$

Do tính nhỏ nhất của $\deg d$ nên ta suy ra $r(x) = 0$ nên $d(x)|f(x)$, tương tự $d(x)|g(x)$.

Giả sử tồn tại $d'(x)|f(x), d'(x)|g(x)$ khi đó vì $d(x) = s(x)f(x) + g(x)t(x)$ nên $d'(x)|d(x)$, điều phải chứng minh.

KHÁI NIỆM

Hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu chúng chỉ có ước chung là hằng số $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Nhưng vì ước chung lớn nhất của hai đa thức chỉ sai khác nhau hằng số nên khi $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức nguyên tố cùng nhau ta có thể cho là ước chung lớn nhất của chúng bằng 1 và kí hiệu là $(f(x), g(x)) = 1$.

ĐỊNH LÝ

Hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại hai đa thức $u(x), v(x)$ sao cho

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

Chứng minh 8. Nếu $(f(x), g(x)) = 1$ thì tồn tại các đa thức $u(x), v(x)$ sao cho

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

Ngược lại, cho trước hai đa thức $f(x), g(x)$ và giả sử rằng có hai đa thức $u(x), v(x)$ sao cho $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ thì khi đó nếu $\varphi(x)$ là một ước chung bất kì của $f(x)$ và $g(x)$ sẽ dẫn đến $u(x)f(x) + v(x)g(x)$ chia hết cho $\varphi(x)$. Do đó $1:\varphi(x)$ nên $\varphi(x)$ phải là hằng số. Vậy $(f(x), g(x)) = 1$.

Hệ quả

- Nếu $(f(x), g_1(x)) = (f(x), g_2(x)) = 1$ thì $(f(x), g_1(x)g_2(x)) = 1$;
- Nếu $f(x).h(x):g(x)$ và $(h(x), g(x)) = 1$ thì $f(x):g(x)$;
- Nếu $f(x):g_1(x), f(x):g_2(x)$ và $(g_1(x), g_2(x)) = 1$ thì $f(x):g_1(x)g_2(x)$.

Chứng minh 9. a) Theo giả thiết tồn tại $u_1(x), u_2(x), v_1(x), v_2(x)$ sao cho

$$f(x)u_1(x) + g_1(x)v_1(x) = 1, f(x)u_2(x) + g_2(x)v_2(x) = 1.$$



Nhân vế theo vế hai đẳng thức trên và nhóm lại ta được

$$f(x)u(x) + g_1(x)g_2(x)v(x) = 1.$$

Từ đó suy ra $(f(x), g_1(x)g_2(x)) = 1$.

b) Vì $(h(x), g(x)) = 1$ nên tồn tại $u(x), v(x)$ sao cho

$$h(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$$

từ đó

$$f(x) = f(x)h(x)u(x) + f(x)g(x)v(x) : g(x)$$

vì $f(x)h(x) : g(x)$.

c) Vì $f(x) : g_1(x)$ nên $f(x) = g_1(x)g(x)$ và vì $f(x) : g_2(x)$ nên $g_1(x)g(x) : g_2(x)$ dẫn đến $g(x) : g_2(x)$ (do $(g_1(x), g_2(x)) = 1$). Từ đó suy ra

$$f(x) = g_1(x)g(x) : g_1(x)g_2(x).$$

Ví dụ 1. Với $m, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $(x^m - 1, x^n - 1) = x^{(m,n)} - 1$.

Chứng minh 10. Đặt $d = (m, n)$, dễ thấy $x^m - 1 : x^d - 1, x^n - 1 : x^d - 1$. Suy ra $x^d - 1$ là ước chung của $x^m - 1$ và $x^n - 1$.

Giả sử $D(x)$ là một ước chung khác của $x^m - 1$ và $x^n - 1$. Vì $d = (m, n)$ nên tồn tại các số nguyên dương u, v sao cho $d = mu - nv$, khi đó $D(x)$ là ước của $(x^{mu} - 1) - (x^{nv} - 1) = x^{nv}(x^d - 1)$. Vì $(x^m - 1, x^{nv}) = 1$ nên $(D(x), x^{nv}) = 1$, suy ra $D(x) | x^d - 1$. Vậy $x^d - 1 = (x^m - 1, x^n - 1)$.

KHÁI NIỆM

Cho $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ là hai đa thức khác 0. Đa thức $M(x) \in \mathbb{K}[x]$ được gọi là *bội chung nhỏ nhất* của hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nếu nó thỏa đồng thời:

(a) $M(x) : f(x)$ và $M(x) : g(x)$;

(b) Nếu tồn tại $M_1(x) \in \mathbb{K}[x]$ sao cho $M_1(x) : f(x)$ và $M_1(x) : g(x)$ thì $M_1(x) : M(x)$.

Khi đó ta kí hiệu $M(x) = [f(x), g(x)]$.

ĐỊNH LÝ

Với hai đa thức $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, ta có:

a) Nếu $f(x) : g(x)$ thì $[f(x), g(x)] = f(x)$;

b) Với mọi $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$[f(x), g(x)] = [\alpha f(x), g(x)] = [f(x), \alpha g(x)].$$

Chứng minh định lý trên hoàn toàn bằng định nghĩa của bội chung nhỏ nhất. Bây giờ ta có định lý sau cho ta một mối quan hệ giữa ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của hai đa thức.

ĐỊNH LÝ

Cho hai đa thức khác không $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$. Khi đó ta có

$$(f(x), g(x)) \cdot [f(x), g(x)] = f(x)g(x).$$

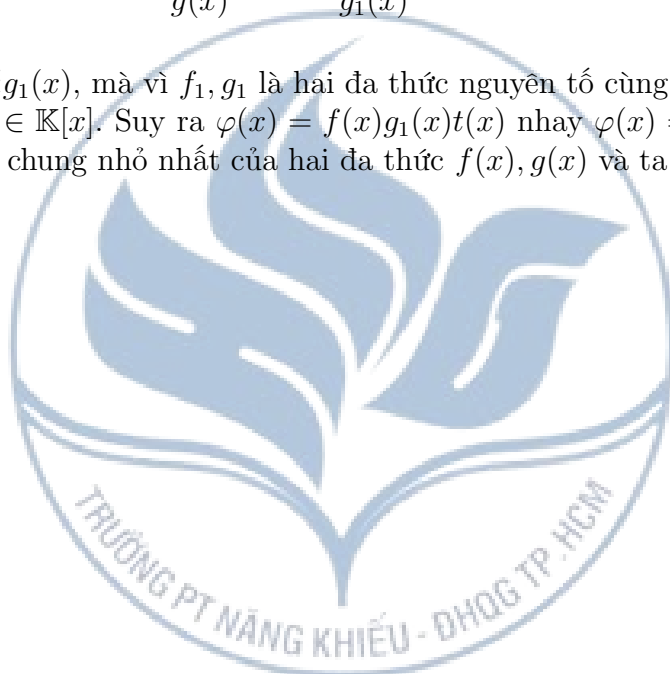
Chứng minh 11. Gọi $d(x) = (f(x), g(x))$, khi đó tồn tại $f_1(x), g_1(x) \in \mathbb{K}[x]$ sao cho $f(x) = d(x)f_1(x)$ và $g(x) = d(x)g_1(x)$, hơn nữa f_1, g_1 là hai đa thức nguyên tố cùng nhau.

Hiển nhiên $M(x) = \frac{1}{d(x)}f(x)g(x) \in \mathbb{K}[x]$ và từ $M(x) = f_1(x) \cdot g(x) = g_1(x)f(x)$ ta suy ra $M(x) : f(x)$

và $M(x) : g(x)$. Gọi $\varphi(x) \in \mathbb{K}[x]$ là một bội chung của hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$, khi đó tồn tại đa thức $h(x) \in \mathbb{K}[x]$ sao cho $\varphi(x) = f(x)h(x)$. Lại có $\varphi(x) : g(x)$ nên

$$\frac{f(x)h(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)h(x)}{g_1(x)} \in \mathbb{K}[x].$$

Nói cách khác $f_1(x)h(x) : g_1(x)$, mà vì f_1, g_1 là hai đa thức nguyên tố cùng nhau dẫn đến $h(x) : g_1(x)$, dẫn đến $h(x) = g_1t(x), t \in \mathbb{K}[x]$. Suy ra $\varphi(x) = f(x)g_1(x)t(x)$ hay $\varphi(x) = M(x)t(x)$, điều này cho thấy $M(x)$ trùng với bội chung nhỏ nhất của hai đa thức $f(x), g(x)$ và ta có điều phải chứng minh.



§2. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

KHÁI NIỆM

Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{K}[x]$, số $\alpha \in \mathbb{K}$ được gọi là *nghiệm* của đa thức f nếu và chỉ nếu $f(\alpha) = 0$.

ĐỊNH LÝ BÉZOUT

Cho $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ và $a \in \mathbb{K}$. Số dư khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x - a$ là $f(a)$.

Chứng minh 12. Theo thuật toán chia Euclide, tồn tại đa thức $g(x) \in \mathbb{K}[x]$ và số thực r sao cho

$$f(x) = (x - a)g(x) + r.$$

Trong đẳng thức trên thay $x = a$ vào hai vế ta được $f(a) = r$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả

Đa thức $f(x)$ có nghiệm $x = a$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $x - a$.

Hệ quả

Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các nghiệm của $f(x)$ thì $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) | f(x)$. Đặc biệt nếu $\deg f = n$ thì $f(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$, $c \in \mathbb{K}$.

Hệ quả

Một đa thức bậc n có nhiều nhất là n nghiệm. Đặc biệt nếu $\deg f \leq n$ có quá n nghiệm thì $f(x) = 0$.

Hệ quả

Nếu $\deg f < n$, $\deg g < n$ mà tồn tại n giá trị phân biệt của biến x sao cho $f(x) = g(x)$ thì $f(x) = g(x)$.

KHÁI NIỆM

Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ và số nguyên $k \geq 2$. Số $a \in \mathbb{K}$ được gọi là *nghiệm bội k* của đa thức f nếu và chỉ nếu tồn tại $g(x) \in \mathbb{K}[x]$ sao cho
$$\begin{cases} f(x) = (x - a)^k g(x) \\ g(a) \neq 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Chứng minh

$$a(b + c)^2 + b(c + a)^2 + c(a + b)^2 - 4abc = (b + c)(c + a)(a + b).$$

Chứng minh 13. Xét đa thức

$$P(x) = x(b+c)^2 + b(c+x)^2 + c(x+b)^2 - 4bcx - (b+c)(c+x)(x+b)$$

. Ta có $\deg P \leq 2$. Dễ thấy $P(x)$ có 3 nghiệm $0, -b, -c$. Từ đó suy ra $P(x) = 0$ với mọi x , và do đó $P(a) = 0$. Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Định m sao cho $F = x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ chia hết cho $x + y + z$.

Chứng minh 14. Xem F là một đa thức theo biến x . Theo giả thiết $F(x) : [x - (-y - z)]$ suy ra

$$F(-y - z) = 0 \Leftrightarrow (-y - z)^3 + y^3 + z^3 + m(-y - z)yz \Leftrightarrow -yz(y + z)(3 + m) = 0, \forall y, z.$$

Từ đó $m = -3$.

Ví dụ 3. Biết đa thức $P(x) = x^5 + x^2 + 1$ có 5 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Đặt $Q(x) = x^2 - 2$. Tính tích $Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5)$.

Chứng minh 15. Ta viết

$$x^5 + x^2 + 1 = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_5)$$

và

$$T = Q(r_1)Q(r_2) \dots Q(r_5) = (r_1^2 - 2)(r_2^2 - 2) \dots (r_5^2 - 2) = \prod_{j=1}^5 (\pm\sqrt{2} - r_j).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} T &= \prod_{i=1}^5 (\sqrt{2} - r_i) \prod_{j=1}^5 (-\sqrt{2} - r_j) \\ &= P(\sqrt{2})P(-\sqrt{2}) \\ &= [(\sqrt{2})^5 + (\sqrt{2})^2 + 1][(-\sqrt{2})^5 + (-\sqrt{2})^2 + 1] \\ &= -23. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. VMO 1990 Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x).$$

Chứng minh rằng $P(x)$ không có nghiệm thực.

Chứng minh 16. Giả sử tồn tại x_0 sao cho $P(x_0) = 0 \Rightarrow P(2x_0^3 + x_0) = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_0^3 + x_0$ cũng là nghiệm. Lập luận tương tự ta được dãy (x_n) xác định bởi $x_n = 2x_{n-1}^3 + x_{n-1}, n \geq 1$ cũng là nghiệm của $P(x)$.

Nếu $x_0 < 0$ thì $x_0 > x_1 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots$ nên $P(x)$ có vô hạn nghiệm nên $P(x) = 0$.

Nếu $x_0 > 0$ thì $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$ nên $P(x)$ cũng có vô hạn nghiệm, vô lí.

Nếu $x_0 = 0$ ta gọi k là số bé nhất mà $x_k \neq 0 (n \geq k \geq 0)$ ta có

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_k x^k.$$

Thay vào giả thiết ta được

$$a_n^2 2^n x^{3n} + \dots + a_k^2 2^k x^{3k} = a_n(2x^3 + x)^n + \dots + a_k(2x^3 + x)^k.$$

Do $a_0 = 0, a_k \neq 0$ nên $k > 0 \Rightarrow 3k > k$. Đồng nhất hệ số của x^k ở hai vế ta được $a_k = 0$, vô lí.

Ví dụ 5. Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ trong đó các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ là phân biệt. Chứng minh rằng nếu tích

$$(a_i + b_1)(a_i + b_2) \dots (a_i + b_n)$$

bằng nhau với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ thì các tích

$$(a_1 + b_j)(a_2 + b_j) \dots (a_n + b_j)$$

cũng bằng nhau với mọi $j = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh 17. Đặt $P(x) = (x + b_1)(x + b_2) \dots (x + b_n)$ và $d = P(a_1) = P(a_2) = \dots P(a_n)$. Khi đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ là nghiệm của đa thức $P(x) - d$ có bậc n .

Ta viết

$$P(x) - d = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

So sánh hệ số bậc cao nhất ở hai vế ta suy ra $c = 1$. Vì $P(-b_j) = 0$ nên

$$\begin{aligned} -d &= (-b_j - a_1)(-b_j - a_2) \dots (-b_j - a_n) \\ &= (-1)^n (a_1 + b_j)(a_2 + b_j) \dots (a_n + b_j). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.



ĐỊNH LÝ VIÈTE

A.1 Định lý Viète thuận

ĐỊNH LÝ

Cho đa thức $f \in \mathbb{K}[x]$, giả sử rằng

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

có n nghiệm và $a_n \neq 0$. Gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các nghiệm của f (không nhất thiết phân biệt).

Khi đó ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \dots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Chứng minh 18. Định lý Viète có một ứng dụng rất lớn trong các bài toán về nghiệm của đa thức nhưng chứng minh của nó thì không hề khó. Thật vậy, vì $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các nghiệm của f nên ta có thể viết lại đa thức này dưới dạng

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Khai triển vế phải rồi nhóm về dạng chuẩn tắc, sau đó so sánh hệ số của các số mũ tương ứng ở hai vế ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 1. Cho các số thực a, b, c và phương trình $x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1^{16} + x_2^{16} + x_3^{16} + x_4^{16} = 4$. Tìm các nghiệm đó.

Chứng minh 19. Theo định lý Viète ta có $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4$.

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} 16 &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \\ &\leq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \\ &\leq 4\sqrt{4(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4)} \\ &\leq 4\sqrt{4\sqrt{4(x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 + x_4^8)}} \\ &\leq 4\sqrt{4\sqrt{4\sqrt{4(x_1^{16} + x_2^{16} + x_3^{16} + x_4^{16})}}} = 16. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$.

Ví dụ 2. Chứng minh đa thức $P(x) = x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + \dots + 2n^{n-1}x + 2n$ không thể có đủ n nghiệm thực.

Chứng minh 20. Giả sử $P(x)$ có đủ n nghiệm thực $x_1, x_2, \dots, x_n$. Theo định lý Viet

$$\sum_i x_i = -2n, \sum_{i < j} x_i x_j = 2n^2.$$

Khi đó

$$\sum_{i < j} x_i x_j = \frac{1}{2} \left(\sum_i x_i \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_i x_i^2 \leq \frac{n-1}{2n} \left(\sum_i x_i \right)^2 = 2n(n-1) < 2n^2,$$

vô lí. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. VMO 1991 Giả sử đa thức $P(x) = x^{10} - 10x^9 + 39x^8 + a_7x^7 + \dots + a_1x + a_0$ với các hệ số thực $a_7, \dots, a_0$ sao cho đa thức $P(x)$ có 10 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng các nghiệm này thuộc đoạn $[-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}]$.

Chứng minh 21. Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ là các nghiệm của $P(x)$. Theo định lý Viète ta có

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 10 \text{ và } \sum_{1 \leq i < j \leq 10} x_i x_j = 39.$$

Do đó

$$\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 10} x_i x_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 100 - 2 \cdot 39 = 22.$$

Hơn nữa

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{10} x_i + 10 = 12 \Rightarrow (x_i - 1)^2 \leq 12 < (3.5)^2,$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, 10$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4. Canada 1996 Gọi α, β, γ là ba nghiệm của phương trình $x^3 - x - 1 = 0$. Tính

$$T = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

Chứng minh 22. Ta có

$$T = 2\left(\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1}\right) - 3.$$

Vì $P(x) = x^3 - x - 1$ có các nghiệm α, β, γ nên đa thức $P(x-1) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ có các nghiệm $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$. Sử dụng định lý Viète ta được

$$2\left(\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1}\right) - 3 = 2.2 - 3 = 1.$$

Ví dụ 5. Cho số tự nhiên $k > 0$ và hai số thực a, b sao cho $x^k + ax + 1$ chia hết cho $x^2 + bx + 1$ và phương trình $x^2 + bx + 1 = 0$ có hai nghiệm. Chứng minh $a(a-b) = 0$.

Chứng minh 23. Theo giả thiết tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $x^k + ax + 1 = P(x)(x^2 + bx + 1)$ (1). Gọi r_1, r_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + bx + 1 = 0$. Khi đó

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 + bx + 1.$$

Theo định lý Viète $\begin{cases} r_1 + r_2 = -b \\ r_1 r_2 = 1. \end{cases}$ Thay vào (1) ta được

$$0 = \sum_{i=1}^2 \left(r_i^k + ar_i + 1 \right) = r_1^k + r_2^k + a(r_1 + r_2) + 2,$$

suy ra

$$r_1^k + r_2^k = -a(r_1 + r_2) - 2 = ab - 2$$

và do đó

$$r_1^k + r_2^k = -a(r_1 + r_2) - 2 = ab - 2.$$

Sử dụng (1) một lần nữa ta được

$$a^2 r_1 r_2 = (r_1^k + 1)(r_2^k + 1) = (r_1 r_2)^k + r_1^k + r_2^k + 1.$$

Suy ra $a^2 \cdot 1 = 1^k + (ab - 2) + 1 = ab \Leftrightarrow a(a-b) = 0$.

Ví dụ 6. (China Southeastern Mathematical Olympiad 2013) Cho $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho phương trình $x^3 - ax^2 + bx - a = 0$ có ba nghiệm thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức

$$P = \frac{2a^3 - 3ab + 3a}{b + 1}.$$

Chứng minh 24. Gọi x_1, x_2, x_3 là các nghiệm thực của phương trình $x^3 - ax^2 + bx - a = 0$. Theo định lý Viète, ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 = a, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, x_1x_2x_3 = a.$$

Vì $(x_1 + x_2 + x_3)^2 \geq 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ nên $a^2 \geq 3b$. Và vì $a = x_1 + x_2 + x_3 \geq 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} = \sqrt[3]{a}$ nên $a \geq 3\sqrt{3}$. Do đó

$$\begin{aligned} \frac{2a^3 - 3ab + 3a}{a + 1} &= \frac{a(a^2 - 3b) + a^3 + 3a}{b + 1} \\ &\geq \frac{a^3 + 3a}{b + 1} \\ &\geq \frac{a^3 + 3a}{\frac{a^2}{3} + 1} \\ &= 3a \geq 9\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 3\sqrt{3}, b = 9$. Khi đó các nghiệm bằng nhau và bằng $\sqrt{3}$. Vậy $P_{\min} = 9\sqrt{3}$.

A.2 Định lý Viète đảo

Ta ký hiệu $\sigma_1 = \sum_{i=1}^n x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \dots, \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$ và gọi σ_k là các đa thức đối xứng bậc k của các số $x_1, x_2, \dots, x_n$.

ĐỊNH LÝ

Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Gọi σ_k là các đa thức đối xứng bậc k của n số đã cho. Khi đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là nghiệm của phương trình

$$X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \sigma_1 X + (-1)^n \sigma_n = 0.$$

§3. BÀI TẬP RÈN LUYỆN



ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN

Bài 1. Đặt $P(x) = x^{9999} + x^{8888} + \dots + x^{1111} + 1, Q(x) = x^9 + x^8 + \dots + x + 1$. Chứng minh rằng $P(x):Q(x)$.

Bài 2. Cho hai đa thức $f(x) = 2x^2 + x - 2$ và $g(x) = 2x^2 + 2x - 1$. Chứng minh rằng

$$f(f(x)) - x:g(x).$$

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi giá trị của n đa thức $(x + 1)^{2n+1} + x^{n+2}$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi n đa thức $x^{2n} - x^n + 1$ không chia hết cho $x^2 + x + 1$.

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị n nguyên dương sao cho

- Đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$;
- Đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 - x + 1$;
- Đa thức $x^{2n} - x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 - x + 1$.

Bài 6. Cho $n, k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $x^n - 1:x^k - 1 \Leftrightarrow n$ là bội của k .

Bài 7. Cho hai đa thức $P(x) \neq Q(x)$ thỏa $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Chứng minh rằng

$$P(P(x)) - Q(Q(x)):P(x) - Q(x).$$

Bài 8. Với $m, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$(x^n + a^n, x^m + a^m) = \begin{cases} x^d + a^d, & \text{nếu } \frac{m}{d} \text{ và } \frac{n}{d} \text{ lẻ} \\ 1, & \text{trong các trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

trong đó $d = (m, n)$.

Bài 9. Chứng minh rằng với mọi đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ mà $P(x) \neq x$ và một số nguyên dương n tùy ý ta có đa thức $Q_n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x) \dots))}_{n-1 \text{ lần}} - x$ chia hết cho đa thức $Q_1(x) = P(x) - x$.

Bài 10. Tìm tất cả các đa thức $P \in \mathbb{R}[x]$ có bậc không quá 5 đồng thời $P(x) + 1$ chia hết cho $(x - 1)^3$ và $P(x) - 1$ chia hết cho $(x + 1)^3$.

Bài 11. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) sao cho đa thức $1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$ chia hết cho đa thức $1 + x + x^2 + \dots + x^m$.

Bài 12. Cho $P(x), Q(x)$ là hai đa thức hệ số nguyên thỏa mãn điều kiện

$$P(x^3) + xQ(x^3):x^2 + x + 1.$$

Gọi $d = (P(2019), Q(2019))$. Chứng minh rằng $d:2018$.



NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

Bài 1. Cho các số thực a, b trong đó $a \neq 0$. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của phương trình

$$ax^4 + bx^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

không đồng thời là nghiệm thực.

Bài 2. Cho $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, trong đó $a_k = \pm 1$. Biết $P(x)$ có n nghiệm, chứng minh rằng $n \leq 3$.

Bài 3. Giả sử đa thức $P(x) = ax^n - ax^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_{n-2}x^2 - n^2bx + b$ có đúng n nghiệm dương. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm này bằng nhau.

Bài 4. Biết tích của hai trong bốn nghiệm của phương trình $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 2016 = 0$ là -32 . Tìm k .

Bài 5. Cho $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn các phương trình $P(x) = 1, P(x) = 2, P(x) = 3$ có ít nhất một nghiệm nguyên lần lượt là x_1, x_2, x_3 .

- Chứng minh x_1, x_2, x_3 là nghiệm nguyên duy nhất của các phương trình trên.
- Chứng minh rằng phương trình $P(x) = 5$ có tối đa một nghiệm nguyên.

Bài 6. Canada 2001 Cho $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ là tam thức bậc hai thỏa mãn đồng thời:

- Cả hai nghiệm đều nguyên dương;
- Tổng các hệ số là một số nguyên tố;
- Tồn tại số nguyên k sao cho $P(k) = 55$.

Chứng minh rằng $P(x)$ có một nghiệm bằng 2 và hãy tìm nghiệm còn lại.

Bài 7. Giả sử x_1, x_2 là hai trong bốn nghiệm của đa thức $P(x) = x^4 + x^3 - 1$. Chứng minh rằng x_1x_2 là nghiệm của đa thức $Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

Bài 8. (Hungary 2001) Cho đa thức $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Tìm đa thức $Q(x)$ có nghiệm là lũy thừa bậc 5 của các nghiệm của đa thức $P(x)$.

Bài 9. Gọi k là số thực sao cho tích các nghiệm thực của phương trình

$$x^4 + 2x^3 + (2 + 2k)x^2 + (1 + 2k)x + 2k = 0$$

bằng -2013 . Tính tổng bình phương tất cả các nghiệm thực này.

Bài 10. Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên có dạng

$$P_n(x) = n!x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + (-1)^n(n+1)n,$$

sao cho đa thức trên có n nghiệm thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $k \leq x_k \leq k+1$, với mọi $k = 1, 2, \dots, n$.

Bài 11. Tìm tất cả các cặp số thực a, b sao cho các đa thức

$$P(x) = x^4 + 2ax^2 + 4bx + a^2 \text{ và } Q(x) = x^3 + ax + b$$

có chung hai nghiệm thực phân biệt.

Bài 12. Với mỗi số nguyên dương k chứng minh rằng đa thức

$$P_k(x) = (x^4 - 1)(x^3 - x^2 + x - 1)^k + (x + 1)x^{4k-1}$$

chia hết cho đa thức $x^5 + 1$.

Bài 13. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho đa thức

$$P_n(x) = x^{2n} + (x+1)^{2n} + 1$$

chia hết cho đa thức $T(x) = x^2 + x + 1$.

Bài 14. Giả sử đa thức $P(x), Q(x), R(x), S(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn đẳng thức

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x).$$

Chứng minh rằng $P(x) \vdots x-1$.

Bài 15. Tìm tất cả các giá trị của a để nghiệm x_1, x_2, x_3 của đa thức $x^3 - 6x^2 + ax + a$ thỏa mãn

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$

Bài 16. Nordic 2015 Cho số nguyên $n > 1$ và đa thức $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ có n

ng nghiệm thực (tính cả nghiệm bội). Đặt $Q(x) = \prod_{j=1}^{2015} P(x+j)$, biết rằng $P(2015) = 2015$. Chứng minh

rằng Q có ít nhất 1970 nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \dots, r_{1970}$ sao cho $|r_j| < 2015$ với mọi $j = 1, 2, \dots, 1970$.

Bài 17. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho đa thức

$$P_n(x) = x^{2n} + (x+1)^{2n} + 1$$

chia hết cho đa thức $T(x) = x^2 + x + 1$.

Bài 18. Với mỗi số nguyên dương k chứng minh rằng đa thức

$$P_k(x) = (x^4 - 1)(x^3 - x^2 + x - 1)^k + (x+1)x^{4k-1}$$

chia hết cho đa thức $x^5 + 1$.

Bài 19. Tìm tất cả các cặp số thực a, b sao cho các đa thức

$$P(x) = x^4 + 2ax^2 + 4bx + a^2 \text{ và } Q(x) = x^3 + ax + b$$

có chung hai nghiệm thực phân biệt.

Bài 20. Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên có dạng

$$P_n(x) = n!x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + (-1)^n(n+1)n,$$

sao cho đa thức trên có n nghiệm thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $k \leq x_k \leq k+1$, với mọi $k = 1, 2, \dots, n$.

Bài 21. Gọi k là số thực sao cho tích các nghiệm thực của phương trình

$$x^4 + 2x^3 + (2+2k)x^2 + (1+2k)x + 2k = 0$$

bằng -2013 . Tính tổng bình phương tất cả các nghiệm thực này.

Bài 22. Cho đa thức $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 6$ có các nghiệm là α, β, γ . Tính

$$T = \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma-2}\right)^2.$$

Bài 23. Gọi $r_1, r_2, \dots, r_7$ là các nghiệm phân biệt của đa thức $P(x) = x^7 - 7$. Đặt $K = \prod_{1 \leq i < j \leq 7} (r_i + r_j)$.

Tính K^2 .





PHẦN



PHỤ LỤC 1

CHƯƠNG

7

GIỚI THIỆU CÁC BÀI TOÁN ĐỀ NGHỊ TRONG KÌ THI JBMO

Các bạn Nguyễn Thủy Tiên - Võ Hoàng Thành - Nguyễn Thái Hưng dịch và giới thiệu.

§1. ĐẠI SỐ

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{\sqrt[4]{y} + \sqrt[4]{z}}} + \frac{y}{\sqrt{\sqrt[4]{z} + \sqrt[4]{x}}} + \frac{z}{\sqrt{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}} \geq \frac{\sqrt[4]{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^7}}{\sqrt{2\sqrt{27}}}.$$

Lời giải.

Đặt $x = a^2, y = b^2, z = c^2$, với a, b, c là các số thực dương. BĐT đã cho tương đương với:

$$\frac{a^2}{\sqrt{\sqrt{b} + \sqrt{c}}} + \frac{b^2}{\sqrt{\sqrt{c} + \sqrt{a}}} + \frac{c^2}{\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} \geq \frac{\sqrt[4]{(a + b + c)^7}}{\sqrt{2\sqrt{27}}}.$$

Áp dụng BDT Cauchy-Schwarz cho vế trái của BDT trên, ta có:

$$\frac{a^2}{\sqrt{\sqrt{b} + \sqrt{c}}} + \frac{b^2}{\sqrt{\sqrt{c} + \sqrt{a}}} + \frac{c^2}{\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{\sqrt{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \sqrt{\sqrt{c} + \sqrt{a}} + \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}$$

Áp dụng BDT Cauchy-Schwarz cho 3 số dương α, β, γ , ta có:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} \leq \sqrt{3(\alpha + \beta + \gamma)}. \quad (1)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \sqrt{\sqrt{c} + \sqrt{a}} + \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &\leq \sqrt{6(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} \\ &\leq \sqrt{6\sqrt{3(a + b + c)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1), (2), ta suy ra:

$$\frac{a^2}{\sqrt{\sqrt{b} + \sqrt{c}}} + \frac{b^2}{\sqrt{\sqrt{c} + \sqrt{a}}} + \frac{c^2}{\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{\sqrt{6\sqrt{3(a + b + c)}}} = \frac{\sqrt[4]{(a + b + c)^7}}{\sqrt{2\sqrt{27}}}$$

Vậy ta có đpcm.

Cách khác: Với a_{ij} là các số dương, ta có BDT Holder:

$$\begin{aligned} & (a_{11} + a_{12} + a_{13})(a_{21} + a_{22} + a_{23})(a_{31} + a_{32} + a_{33})(a_{41} + a_{42} + a_{43}) \\ & \geq (\sqrt[4]{a_{11}a_{21}a_{31}a_{41}} + \sqrt[4]{a_{12}a_{22}a_{32}a_{42}} + \sqrt[4]{a_{13}a_{23}a_{33}a_{43}})^4. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & (1 + 1 + 1)((\sqrt{b} + \sqrt{c}) + (\sqrt{c} + \sqrt{a}) + (\sqrt{a} + \sqrt{b})) \left(\frac{a^2}{\sqrt{\sqrt{b} + \sqrt{c}}} + \frac{b^2}{\sqrt{\sqrt{c} + \sqrt{a}}} + \frac{c^2}{\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} \right)^2 \\ & \geq (a + b + c)^4. \quad (3) \end{aligned}$$

Áp dụng BDT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + (\sqrt{c} + \sqrt{a}) + (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \leq 2\sqrt{3(a + b + c)}. \quad (4)$$

Kết hợp 2 BDT (3), (4), dễ dàng suy ra đpcm. □

Bài 2. Cho m, n là các số nguyên dương bất kỳ sao cho $m^3 + n^3 > (m + n)^2$, ta có:

$$m^3 + n^3 \geq (m + n)^2 + k$$

với k là một số nguyên dương. Tìm max của k .

Lời giải.

Với $m = 3, n = 2$ ta thấy BDT $m^3 + n^3 > (m + n)^2$ thỏa mãn, do đó:

$$3^3 + 2^3 \geq (3 + 2)^2 + k \Rightarrow k \leq 10$$

Ta sẽ chứng minh $k = 10$ là giá trị lớn nhất của k . Như vậy, ta cần chứng minh BDT:

$$m^3 + n^3 \geq (m + n)^2 + 10$$

BDT trên tương đương

$$(m + n)(m^2 + n^2 - mn - m - n) \geq 10.$$

- Nếu $m + n = 2$ hoặc $m + n = 3$ thì các cặp $(m, n) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ và các cặp này không thỏa mãn điều kiện $m^3 + n^3 > (m + n)^2$.
- Nếu $m + n = 4$ thì $(m, n) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$. Cặp số $(m, n) = (2, 2)$ không thỏa mãn điều kiện $m^3 + n^3 > (m + n)^2$. Và các cặp $(m, n) = (1, 3), (3, 1)$ thỏa điều kiện $m^3 + n^3 \geq (m + n)^2 + 10$.
- Nếu $m + n \geq 5$, ta cần chứng minh BDT

$$m^2 + n^2 - mn - m - n \geq 2$$

hay

$$(m - n)^2 + (m - 1)^2 + (n - 1)^2 \geq 6.$$

Nếu m hoặc n lớn hơn hoặc bằng 4 thì $(m - 1)^2 \geq 9$ hoặc $(n - 1)^2 \geq 9$ suy ra bài toán đã được chứng minh. Nếu $m \leq 3$ và $n \leq 3$, với điều kiện $m + n \geq 5$ ta có các cặp số $(m, n) = (2, 3), (3, 2), (3, 13)$. các cặp số đều này thỏa điều kiện $m^2 + n^2 - mn - m - n \geq 2$.

Vậy max của k là 10.

Cách khác: Đặt $A = m^3 + n^3 - (m + n)^2$. Ta nhận thấy max của k tương đương với min của A .

$$A = (m + n)(m^2 + n^2 - mn - m - n)$$

$A > 0$ nên $(m + n)(m^2 + n^2 - mn - m - n) > 0$. Nếu $m = n$ thì m, n phải lớn hơn 2. Khi đó

$$A = 2m(m^2 - 2m) \geq 6(3^2 - 6) = 18$$

Nếu $m \neq n$. Không mất tính tổng quát, giả sử $m > n$. Nếu $n = 1$, khi đó $A = (m + 1)m(m - 2) > 0$, do đó $m > 2$ và

$$A \geq (3 + 1) \cdot 3 \cdot (3 - 2) = 12$$

Nếu $n \geq 2$, kết hợp $m \geq n + 1$. Ta có:

$$A = (m + n)(m(m - n - 1) + n^2 - n) \geq (2n + 1)(n^2 - n) \geq 5(2^2 - 2) = 10.$$

Với $m = 3, n = 2$ thì dấu " = " xảy ra. Do đó max của k là 10. □

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab(b+1)(c+1)} + \frac{1}{bc(c+1)(a+1)} + \frac{1}{ca(a+1)(b+1)} \geq \frac{3}{(1+abc)^2}.$$

Lời giải.

BDT đã cho tương đương

$$\frac{c(a+1) + a(b+1) + b(c+1)}{abc(a+1)(b+1)(c+1)} \geq \frac{3}{(1+abc)^2}$$

hay

$$(1+abc)^2(ab+bc+ca+a+b+c) \geq 3abc(ab+bc+ca+a+b+c+abc+1).$$

Đặt $m = a + b + c, n = ab + bc + ca, x^3 = abc$, BDT trên được viết lại

$$(m+n)(1+x^3)^2 \geq 3x^3(x^3+m+n+1),$$

tương đương

$$(m+n)(x^6-x^3+1) \geq 3x^3(x^3+1).$$

Áp dụng BDT AM-GM ta có $m \geq 3x$ và $n \geq 3x^2$, suy ra $m+n \geq 3x(x+1)$. Như vậy ta cần chứng minh BDT

$$\begin{aligned} x(x+1)(x^6-x^3+1) &\geq x^3(x+1)(x^2-x+1) \\ \Leftrightarrow (x^6-x^3+1) &\geq x^2(x^2-x+1) \\ \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2-1)^2 &\geq 0. \quad (\text{BDT đúng}) \end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm.

Cách khác: Đặt $abc = k^3, a = k\frac{x}{y}, b = k\frac{y}{z}, c = k\frac{z}{x}$, với $k, x, y, z > 0$. BDT đã cho được viết lại

$$\frac{z^2}{(ky+z)(kz+x)} + \frac{x^2}{(kz+x)(kx+y)} + \frac{y^2}{(kx+y)(ky+z)} \geq \frac{3k^2}{(1+k^3)^2}.$$

Áp dụng BDT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\sum_{x,y,z} \frac{z^2}{(ky+z)(kz+x)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{(ky+z)(kz+x) + (kz+x)(kx+y) + (kx+y)(ky+z)}$$

Ta cần chứng minh BDT

$$\frac{(x+y+z)^2}{(ky+z)(kz+x) + (kz+x)(kx+y) + (kx+y)(ky+z)} \geq \frac{3k^2}{(1+k^3)^2}$$

hay

$$\left((1+k^3)^2 - 3k^3 \right) (x^2 + y^2 + z^2) \geq \left(3k^2 (k^2 + k + 1) - 2(1+k^3)^2 \right) (xy + yz + zx)$$

Do $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ và $(1+k^3)^2 - 3k^3 > 0$ nên để chứng minh BDT trên, ta chỉ cần chứng minh

$$(1+k^3)^2 - 3k^3 \geq 3k^2 (k^2 + k + 1) - 2(1+k^3)^2$$

hay

$$(k-1)^2 (k^2 + 1) (k+1)^2 \geq 0 \quad (\text{BDT đúng})$$

Hoàn tất chứng minh. □

Bài 4. Cho $k > 1, n > 2018$ là các số nguyên dương, n lẻ và các số hữu tỉ khác $0 : x_1, x_2, \dots, x_n$ không bằng nhau tất cả thỏa mãn điều kiện sau:

$$x_1 + \frac{k}{x_2} = x_2 + \frac{k}{x_3} = x_3 + \frac{k}{x_4} = \dots = x_{n-1} + \frac{k}{x_n} = x_n + \frac{k}{x_1}.$$

- Viết lại tích $x_1 x_2 \dots x_n$ dưới dạng hàm số của k và n .
- Tìm min của k sao cho tồn tại $n, x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn các điều kiện đã cho.

Lời giải.

- Giả sử tồn tại i sao cho $x_i = x_{i+1}$ (nếu $i = n$ thì $x_{n+1} = x_1$). Khi đó, tất cả các số x_i đều bằng nhau, mâu thuẫn giả thiết. Do đó $x_1 \neq x_2$

$$x_1 - x_2 = k \frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3}.$$

Tương tự, ta có

$$x_1 - x_2 = k \frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3} = k^2 \frac{x_3 - x_4}{(x_2 x_3)(x_3 x_4)} = \dots = k^n \frac{x_1 - x_2}{(x_2 x_3)(x_3 x_4) \dots (x_1 x_2)}.$$

Vì $x_1 \neq x_2$ nên

$$x_1 x_2 \dots x_n = \pm \sqrt{k^n} = \pm k^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{k}.$$

Khi nhận được một trong hai giá trị này, dương hoặc âm, thì giá trị còn lại cũng sẽ nhận được bằng cách thay đổi dấu của tất cả x_i vì n là số lẻ.

- Từ kết quả trên, vì n là số lẻ và x_i là các số hữu tỉ nên $\sqrt{k}$ phải là số hữu tỉ. Ta kết luận rằng k là một số chính phương nên $k \geq 4$.

Với $k = 4$, ta có thể chọn $n = 2019$ và $x_{3j} = 4, x_{3j-1} = 1, x_{3j-2} = -2$ với $j = 1, 2, \dots, 673$.

Vậy min của k là 4.

Nhận xét: Có nhiều cách để xây dựng ví dụ khi $k = 4$ và $n = 2019$. Vì $3 \mid 2019$ nên ý tưởng là tìm ba số x_1, x_2, x_3 thỏa mãn các phương trình đã cho, không phải tất cả chúng đều bằng nhau và lặp lại giá trị của chúng dưới các số x_i còn lại. Vì vậy, ta cần tìm x_1, x_2, x_3 sao cho

$$x_1 + \frac{4}{x_2} = x_2 + \frac{4}{x_3} = x_3 + \frac{4}{x_1}.$$

Theo câu a, $x_1 x_2 x_3 = \pm 8$. Giả sử không mất tính tổng quát rằng $x_1 x_2 x_3 = -8$. Sau đó, giải hệ trên ta thấy rằng nếu $x_1 \neq 2$, thì

$$x_2 = -\frac{4}{x_1 - 2} \text{ và } x_3 = 2 - \frac{4}{x_1},$$

dẫn đến vô số giải pháp. Ví dụ trong giải pháp chính thức có được bằng cách chọn $x_1 = -2$. □

Bài 5. Cho a, b, c, d và x, y, z, t là các số thực sao cho

$$0 \leq a, b, c, d \leq 1, \quad x, y, z, t \geq 1 \text{ và } a + b + c + d + x + y + z + t = 8.$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 28.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải.

Ta nhận thấy rằng nếu $u \leq v$ thì bằng cách thay (u, v) bởi $(u - \varepsilon, v + \varepsilon)$, với $\varepsilon > 0$, tổng bình phương 2 số sẽ tăng lên. Thật vậy,

$$(u - \varepsilon)^2 + (v + \varepsilon)^2 - u^2 - v^2 = 2\varepsilon(v - u) + 2\varepsilon^2 > 0$$

Đặt

$$E(a, b, c, d, x, y, z, t) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$ và $x \leq y \leq z \leq t$, ta có:

$$\begin{aligned} E(a, b, c, d, x, y, z, t) &\leq E(0, 0, 0, 0, a + x, b + y, c + z, d + t) \\ &\leq E(0, 0, 0, 0, 1, b + y, c + z, a + d + x + t - 1) \\ &\leq E(0, 0, 0, 0, 1, 1, c + z, a + b + d + x + y + t - 2) \\ &\leq E(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 5) = 28 \end{aligned}$$

Vậy max của E là 28 khi $(a, b, c, d, x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 5)$ và các hoán vị của a, b, c, d và của x, y, z, t .

Cách khác: Vì $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ nên ta có $a^2 \leq a, b^2 \leq b, c^2 \leq c, d^2 \leq d$. Suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq a + b + c + d. \quad (1)$$

Mặt khác, vì $y + z + t \geq 3$ nên $x \leq 5$. Do đó

$$(x - 1)(x - 5) \leq 0 \iff x^2 \leq 6x - 5.$$

Tương tự, ta có $y^2 \leq 6y - 5, z^2 \leq 6z - 5, t^2 \leq 6t - 5$. Suy ra

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 6(x + y + z + t) - 20. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2 &\leq a + b + c + d + 6(x + y + z + t) - 20 \\ &\leq 6(a + b + c + d + x + y + z + t) - 20 = 28 \end{aligned}$$

Vậy max của E là 28 khi $(a, b, c, d, x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 5)$ và các hoán vị của a, b, c, d và của x, y, z, t . □

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^3 + 5}} + \frac{b}{\sqrt{b^3 + 5}} + \frac{c}{\sqrt{c^3 + 5}} \leq \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Lời giải.

Áp dụng BDT AM-GM, ta có

$$a^3 + a^3 + 1 \geq 3a^2 \Rightarrow 2(a^3 + 5) \geq 3(a^2 + 3)$$

Sử dụng điều kiện $ab + bc + ca = 3$ ta có

$$2(a^3 + 5) \geq 3(a^2 + ab + bc + ca) = 3(c + a)(a + b),$$

do đó

$$\frac{a}{\sqrt{a^3 + 5}} \leq \sqrt{\frac{2a^2}{3(c + a)(a + b)}}. \quad (1)$$

Áp dụng BDT AM-GM, ta có

$$\sqrt{\frac{2a^2}{3(c + a)(a + b)}} \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b} \right). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{a}{\sqrt{a^3 + 5}} \leq \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b} \right).$$

Chứng minh tương tự với các hoán vị vòng tròn của a, b, c . Cộng tất cả lại, ta được

$$\sum_{a,b,c} \frac{a}{\sqrt{a^3 + 5}} \leq \sum_{a,b,c} \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b} \right) = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot 3 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Hoàn tất chứng minh. □

Bài 7. Cho A là tập hợp các số nguyên dương có các tính chất sau:

- (i) Nếu n là một phần tử của A thì $n \leq 2018$.
 - (ii) Nếu S là tập con của A với $|S| = 3$ thì có hai phần tử n, m của S sao cho $|n - m| \geq \sqrt{n} + \sqrt{m}$.
- Số phần tử tối đa mà A có thể có là bao nhiêu?

Lời giải.

Giả sử $n > m$, ta có:

$$\begin{aligned} |n - m| \geq \sqrt{n} + \sqrt{m} &\Leftrightarrow (\sqrt{n} - \sqrt{m})(\sqrt{n} + \sqrt{m}) \geq \sqrt{n} + \sqrt{m} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \sqrt{m} + 1. \end{aligned}$$

Đặt $A_k = \{k^2, k^2 + 1, \dots, (k + 1)^2 - 1\}$. Ta nhận thấy 2 phần tử a, b (giả sử $a > b$) bất kỳ của A_k đều có tính chất:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{(k + 1)^2 - 1} - \sqrt{k^2} < (k + 1) - k = 1$$

Do đó, với $k = \overline{1, 44}$ thì $|A \cap A_k| \leq 2$ vì nếu $|A \cap A_k| \geq 3$ thì tồn tại tập con S của A với $|S| = 3$ và S không có 2 phần tử n, m nào thỏa tính chất $|n - m| \geq \sqrt{n} + \sqrt{m}$. Và với $k \geq 45$ thì $|A \cap A_k| = 0$ vì các phần tử của A nhỏ hơn 2019.

Suy ra $|A| \leq 2 \cdot 44 = 88$.

Giả sử $A = \{m^2 : 1 \leq m \leq 44\} \cup \{m^2 + m : 1 \leq m \leq 44\}$. Ta nhận thấy $|A| = 88$ và A thỏa tính chất (i) của giả thiết. Ta cần chứng minh A cũng thỏa mãn tính chất (ii).

Gọi $r < s < t$ là 3 phần tử bất kỳ của A . Có 2 trường hợp:

TH1: $r = m^2$. Khi đó $t \geq (m + 1)^2$ và $\sqrt{t} - \sqrt{r} \geq 1$, thỏa tính chất (ii).

TH2: $r = m^2 + m$. Khi đó $t \geq (m + 1)^2 + (m + 1)$ và

$$\begin{aligned}\sqrt{t} \geq \sqrt{r} + 1 &\Leftrightarrow \sqrt{(m + 1)^2 + (m + 1)} \geq \sqrt{m^2 + m} + 1 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \geq m^2 + m + 1 + 2\sqrt{m^2 + m} \\ &\Leftrightarrow 2m + 1 \geq 2\sqrt{m^2 + m} \\ &\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 \geq 4m^2 + 4m. \quad (\text{BDT đúng})\end{aligned}$$

Thỏa mãn tính chất (ii).

Vậy A có tối đa 88 phần tử. □

§2. TỔ HỢP

Bài 1. Một tập hợp S được gọi là "đặc biệt" nếu nó có hai tính chất sau:

- (i) S có đúng bốn phần tử
 - (ii) Với mọi phần tử x của S , tồn tại ít nhất một trong các số $x - 1$ hoặc $x + 1$ thuộc tập S .
- Có tất cả bao nhiêu tập con "đặc biệt" của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$.

Lời giải.

Gọi a và b lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của một tập "đặc biệt" S tương ứng. Vì $a - 1 \notin S$ nên $a + 1 \in S$. Tương tự, do $b + 1 \notin S$ nên $b - 1 \in S$. Vì vậy, mọi tập hợp "đặc biệt" đều có dạng sau $\{a, a + 1, b - 1, b\}$ với $b - a \geq 3$. Số các tập con "đặc biệt" mà $b - a = 3$ là $n - 3$. Số các tập con "đặc biệt" mà $b - a = 4$ là $n - 4$. Tương tự,...v.v. Theo đó, số các tập con "đặc biệt" của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ là:

$$(n - 3) + (n - 4) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{(n - 3)(n - 2)}{2}.$$

□

Bài 2. Một tập hợp T gồm n các số có ba chữ số có năm tính chất sau:

- a) Không có số nào chứa chữ số 0.
- b) Tổng các chữ số của mỗi số là 9.
- c) Các chữ số hàng đơn vị của hai số bất kỳ đều khác nhau.
- d) Các chữ số hàng chục của hai số bất kỳ đều khác nhau.
- e) Các chữ số hàng trăm của hai số bất kỳ đều khác nhau.

Tìm giá trị lớn nhất có thể có của n .

Lời giải.

Gọi S là tập hợp các số có ba chữ số có tổng các chữ số bằng 9 và không có chữ số nào bằng 0. Phần tử của S có dạng $\overline{abc}$ với $a + b + c = 9$ và $0 < a, b, c \leq 9$. Theo bài toán chia kẹo Euler thì số các số $\overline{abc}$ thỏa mãn là $C_{9-1}^{3-1} = 28$. Do đó $|S| = 28$.

Theo các điều kiện c,d,e. Ta nhận thấy nếu số $\overline{abc} \in T$ thì các số khác $\overline{abc}$ mà có dạng $\overline{**c}$ hoặc $\overline{*b*}$ hoặc $\overline{a**}$ sẽ không thuộc T . Mà có $a + b - 2$ số có dạng $\overline{**c}$ khác $\overline{abc}$, có $a + c - 2$ số có dạng $\overline{*b*}$ khác $\overline{abc}$, có $b + c - 2$ số có dạng $\overline{a**}$ khác $\overline{abc}$. Do đó, có

$$(a + b - 2) + (b + c - 2) + (c + a - 2) = 2(a + b + c) - 6 = 2 \cdot 9 - 6 = 12$$

số khác nhau không thể thuộc T nếu $\overline{abc} \in T$. Như vậy, T có n phần tử thì sẽ không thể chứa $12n$ phần tử khác. Và $12n$ phần tử này, mỗi phần tử đã bị lặp lại 3 lần và chúng đều thuộc tập hợp S . Suy ra

$$n + \frac{12n}{3} \leq 28 \iff n \leq \frac{28}{5}$$

Vì n là số nguyên nên $n \leq 5$. Với $n = 5$, ta có ví dụ

$$T = \{135, 252, 324, 441, 513\}$$

Vậy max của n là 5. □

Bài 3. Cho bảng 8×8 có các ô vuông nhỏ màu trắng. Alice và Bob chơi một trò chơi. Đầu tiên Alice tô n ô vuông của bảng bằng màu đỏ. Sau đó, Bob chọn 4 hàng và 4 cột từ bảng và sơn tất cả các ô trong đó bằng màu đen. Alice sẽ thắng nếu còn lại ít nhất một ô màu đỏ. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho Alice có thể thắng trò chơi bất kể Bob chơi như thế nào. Và mỗi bạn chỉ có duy nhất 1 lượt chơi.

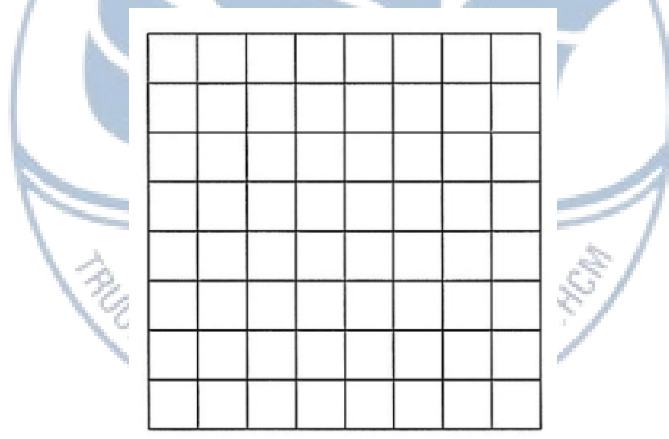
Lời giải.

Ta sẽ chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của n là $n = 13$.

Nếu $n \leq 12$, Bob sẽ thắng bằng cách tô đen 4 hàng có số ô màu đỏ cao nhất. Thật vậy, nếu sau khi Bob tô còn lại ít nhất 5 ô màu đỏ, thì một trong các hàng không bị bôi đen chứa ít nhất 2 ô màu đỏ. Do đó, mỗi hàng được bôi đen phải chứa tối thiểu 2 ô màu đỏ, suy ra số các ô màu đỏ đã được Bob bôi đen phải lớn hơn hoặc bằng 8. Như vậy có nhiều nhất là 4 ô đỏ chưa bị bôi đen, mâu thuẫn. Do đó, sau khi Bob đã tô đen 4 hàng có số ô đỏ cao nhất thì còn lại tối đa là 4 ô màu đỏ. Và Bob có thể dễ dàng bôi đen chúng bằng cách tô đen 4 cột chứa chúng trong đó.

Với $n = 13$. Alice sẽ thắng trò chơi nếu cô bé tô màu các ô sau (mỗi ô được tham chiếu theo cặp (hàng, cột))

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)$$



Giả sử Bob có thể sơn tất cả các ô màu đỏ thành màu đen. Khi đó các ô $(6, 6), (7, 7), (8, 8)$ được sơn màu đen bởi ba dòng khác nhau (hàng hoặc cột) không chứa các ô màu đỏ khác, vì vậy 10 ô màu đỏ còn lại phải được tô đen bởi 5 dòng còn lại. Vì không có dòng nào chứa nhiều hơn 2 ô màu đỏ nên mỗi ô màu đỏ phải được chứa đúng trong 1 dòng trong 5 dòng này (1). Giả sử rằng $(1, 1)$ được sơn màu đen bởi một hàng, tức là hàng 1 được sơn màu đen. Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho hàng k không được sơn màu đen, trong đó $2 \leq k \leq 5$. Khi đó, ô $(k, k - 1)$ sẽ được tô màu đen bởi cột $k - 1$. Tuy nhiên, trong cột này có một ô màu đỏ khác $(k, k - 1)$ là $(j, k - 1)$ với $j < k$. Mà ô $(j, k - 1)$ đã được tô đen bởi hàng j trước đó, điều này mâu thuẫn với (1). Lập luận tương tự nếu $(1, 1)$ được sơn màu đen bởi một cột.

Vậy min của n là 13.

Nhận xét: Đây là cách lý luận khác để kết luận rằng nếu Alice tô màu như trên thì cô ấy sẽ thắng. Gọi A là hình vuông 5×5 được xác định bởi các góc $(1, 1)$ và $(5, 5)$.

Trường hợp 1: Nếu Bob chọn 3 hàng để sơn đen các ô $(6, 6), (7, 7)$ và $(8, 8)$ thì anh ta phải sử dụng 1 hàng và 4 cột để sơn đen cho 10 ô vuông đỏ còn lại trong A . Sau đó, bất kể 4 cột nào Bob chọn, 1 cột còn lại trong A chứa hai ô vuông đỏ và không thể tô đen cả 2 khi chỉ sơn đen 1 hàng. Lập luận tương tự nếu Bob chọn 3 cột.

Trường hợp 2: Nếu Bob chọn 2 hàng và 1 cột để sơn đen các ô $(6, 6)$, $(7, 7)$ và $(8, 8)$, thì anh ta phải sử dụng 3 cột và 2 hàng để sơn đen 10 ô vuông đỏ còn lại trong A . Sau đó, bất kể Bob chọn 3 cột nào, 2 cột còn lại trong A chứa 4 ô vuông đỏ ở ít nhất 3 hàng khác nhau và không thể nào sơn đen tất cả chúng nếu chỉ tô đen 2 hàng. Lập luận tương tự nếu Bob chọn 1 hàng và 2 cột. $\square$

§3. HÌNH HỌC

Bài 1. Gọi H là trực tâm của tam giác nhọn ABC với $BC > AC$ nội tiếp đường tròn Γ . Đường tròn tâm C bán kính CB cắt Γ tại D thuộc cung AB không chứa C . Đường tròn tâm C bán kính CA cắt CD tại K . Đường thẳng song song với BD qua K , cắt AB tại L . Gọi M là trung điểm của AB và N là chân đường cao từ H tới CL , chứng minh rằng MN chia đôi CH .

Lời giải.

Gọi P là trung điểm của CH và O là tâm của Γ . Vì

$$\alpha = \angle BAC = \angle BDC = \angle DKL$$

nên $ACKL$ nội tiếp. Từ $CB = CD$, ta có $\angle BCD = 180^\circ - 2\alpha$, do đó

$$\angle ACK = \gamma + 2\alpha - 180^\circ,$$

với $\gamma = \angle ACB$. Từ $CK = CA$ ta có

$$\angle ALC = \angle AKC = 180^\circ - \alpha - \frac{\gamma}{2}$$

và do đó

$$\angle ACL = 180^\circ - \alpha - \angle ALC = \frac{\gamma}{2},$$

nghĩa là CL là phân giác của $\angle ACB$, dẫn đến $\angle ACL = \angle BCL$. Hơn nữa, $CH \perp AB$ và $\triangle BOC$ cân tại O có $\angle BOC = 2\alpha$, ta được $\angle ACH = \angle BCO = 90^\circ - \alpha$.

Khi đó $\angle NCH = \angle OCL$, do đó $\angle NPH = 2\angle NCH = \angle OCH$. (1)

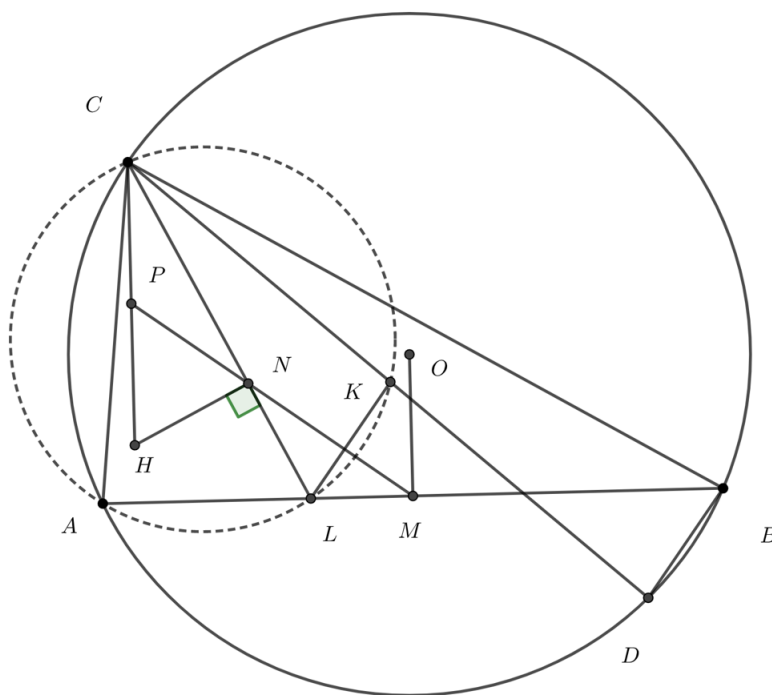
Mặt khác, dễ thấy $2CP = CH = 2OM$ và $CP \parallel OM$, do đó $CPMO$ là hình bình hành và

$$\angle MPH = \angle OCH. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\angle MPH = \angle NPH,$$

nghĩa là M, N, P thẳng hàng. Hoàn tất chứng minh.



□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AD . Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, AC lần lượt cắt AC, AB tại Z, E . Đường thẳng qua C song song với EZ cắt đường thẳng AB tại N . Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng EZ và I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' lên AB, AC . Gọi T là giao điểm của các đường thẳng IK và DE . Chứng minh rằng $\angle NA'T = \angle ADT$.

Lời giải.

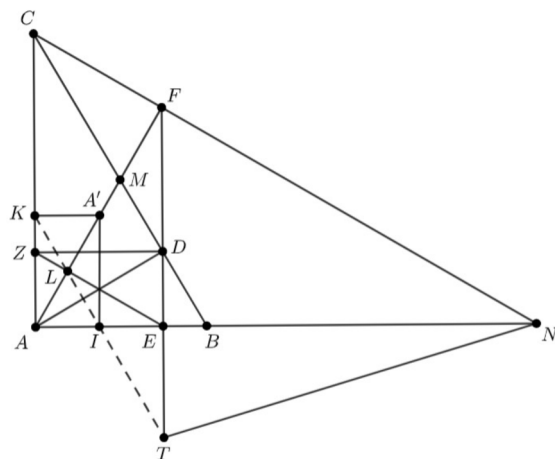
Gọi L, M, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng AA' và các đường thẳng EZ, BC, CN . IK là đường chéo của hình chữ nhật $KA'IA$ nên đi qua trung điểm L của AA' . $\triangle ZAL \sim \triangle ALE \Rightarrow \angle ZAL = \angle AEZ$. $\triangle ABC \sim \triangle DAB \Rightarrow \angle ACB = \angle BAD$. Ta cũng có $\angle AEZ = \angle BAD$ nên

$$\angle ZAL = \angle CAM = \angle ACB = \angle ACM.$$

Vì $AF \perp CN$ nên $\triangle AFC = \triangle CDA$, bởi đó nên các đường cao lần lượt từ đỉnh F, D của các tam giác AFC, CDA bằng nhau, hay $FD \parallel AC$. Và $DE \parallel AC$ nên E, F, D thẳng hàng.

Trong tam giác LFT , $A'I \parallel FT$ và $\angle LA'I = \angle LIA'$, nên $\angle LFT = \angle LTF$. Vì vậy F, A', I, T đồng viên. Mà $\angle A'IN = \angle A'FN = 90^\circ$ nên tứ giác $IA'FN$ nội tiếp. Vậy nên F, A', I, T, N đồng viên. Ta có

$$\angle NA'T = \angle TFN = \angle ACF = \angle FEZ = \angle ADT.$$

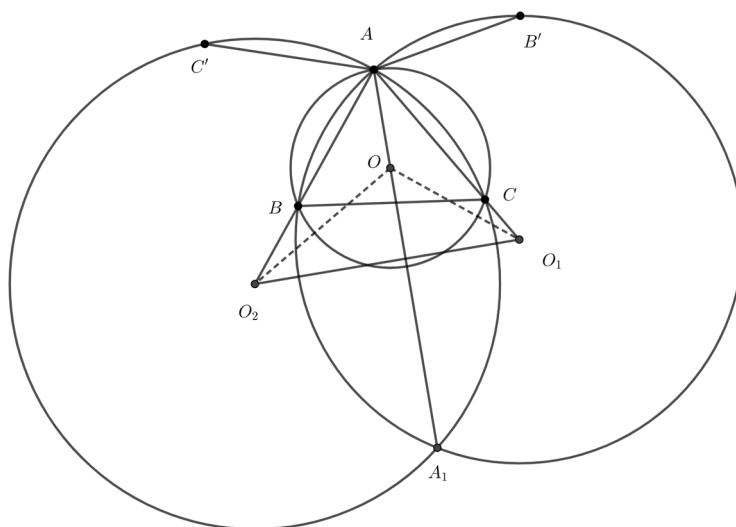


□

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC , A', B', C' lần lượt đối xứng với A, B, C qua BC, CA, AB . Giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABB' và ACC' cắt nhau tại A_1 . Các điểm B_1 và C_1 định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Lời giải.

Cách 1: Gọi O_1, O_2 và O lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABB', ACC' và ABC . Vì AB là đường trung trực của CC' nên O_2 thuộc AB ; hơn nữa, AC là dây cung chung của (O_2) và (O) nên $OO_2 \perp AC$. Tương tự, O_1 thuộc AC và $OO_1 \perp AB$. Do đó O là trực tâm của $\triangle AO_1O_2$. Suy ra $AO \perp O_1O_2$. Mặt khác, AA_1 là dây cung chung của 2 đường tròn, dẫn đến $AA_1 \perp O_1O_2$. Vì thế AA_1 đi qua O . Tương tự, BB_1, CC_1 cũng đi qua O . Hoàn tất chứng minh.



Cách 2: Ta có $\angle BAB' = \angle CAC' = 2\angle BAC$. Từ hai đường tròn (ABB') và (ACC') ta có

$$\angle AA_1B = 90^\circ - \angle BAC = \angle AA_1C'.$$

Dẫn đến

$$\angle A_1AC = \angle A_1C'C = \angle BC'C = 90^\circ - \angle ABC. \quad (1)$$

Mặt khác, gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì

$$\angle OAC = 90^\circ - \angle ABC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra A_1, A, O thẳng hàng. Tương tự, BB_1 và CC_1 cũng đi qua O , hoàn tất chứng minh.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh là a, b, c nội tiếp đường tròn bán kính R . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC . Đặt P_1, P_2, P_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABI, BCI, CAI . Chứng minh rằng

$$\frac{R^4}{P_1^2} + \frac{R^4}{P_2^2} + \frac{R^4}{P_3^2} \geq 16.$$

Lời giải.

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC . Ta có

$$P_1 = \frac{rc}{2}, \quad P_2 = \frac{ra}{2}, \quad P_3 = \frac{rb}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2} + \frac{1}{P_3^2} = \frac{4}{r^2} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Phương tích trọng tâm cho ta $OH^2 = 9OG^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$. Suy ra

$$9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-HM, ta được

$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{1}{R^2}.$$

Cuối cùng, sử dụng bất đẳng thức $R \geq 2r$, ta có

$$\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2} + \frac{1}{P_3^2} \geq \frac{4}{r^2 R^2} \geq \frac{16}{R^4}.$$

Nhận xét: Ta có thể tránh sử dụng phương tích trọng như sau:

Từ lời giải trên ta có

$$\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2} + \frac{1}{P_3^2} = \frac{4}{r^2} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Đặt $a + b + c = \tau$, $E = (ABC)$ và sử dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, ta được

$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{2\tau}{abc} = \frac{\tau}{2RE} = \frac{1}{2Rr}.$$

Cuối cùng, sử dụng bất đẳng thức $R \geq 2r$, ta có

$$\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2} + \frac{1}{P_3^2} \geq \frac{2}{r^3 R} \geq \frac{16}{R^4}.$$

□

Bài 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ thỏa $AB = b > 2a = BC$, E là trung điểm của AD . Trên đường thẳng song song với AB qua E , lấy điểm G sao cho

$$S_{GCE} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^3}{b} + ab \right).$$

Điểm H là chân đường cao từ E đến GD và I là điểm thuộc đoạn AC sao cho tam giác ACE và AEI đồng dạng. Các đường thẳng BH và IE cắt nhau tại K và các đường CA và EH cắt nhau tại J . Chứng minh rằng $KJ \perp AB$.

Lời giải.

Gọi L là chân đường cao từ G đến EC và Q là giao điểm của EG và BC . Khi đó

$$S_{GCE} = \frac{1}{2} EC \cdot GL = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \cdot GL.$$

Do đó $GL = \frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dễ thấy $\triangle QCE \sim \triangle LGE$, ta được $\frac{a}{b} = \frac{GL}{EL}$, suy ra $EL = \sqrt{a^2 + b^2}$ hay $L \equiv C$.

Gọi ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC , ta có

$$\angle EBG = \angle ECG = \angle EHG = 90^\circ,$$

do đó H và G thuộc ω .

Do $\triangle ACE \sim \triangle AEI$, ta có

$$\angle AIE = \angle AEC = 90^\circ + \angle GEC = 90^\circ + \angle GHC = \angle EHC,$$

do đó $IEHC$ nội tiếp hay I thuộc ω .

Từ $EB = EC$ ta có $\angle EIC = \angle EHB$ nên $\angle JIE = \angle EHK$. Khi đó $JIHK$ nội tiếp, suy ra

$$\angle JKH = \angle HIC = \angle HBC.$$

Dẫn đến $KJ \parallel BC \Rightarrow KJ \perp AB$. Hoàn tất chứng minh.



Cho XY là dây cung khác đường kính của đường tròn Ω có tâm là O . Trên đoạn thẳng XY lấy hai điểm P, Q phân biệt sao cho Q nằm giữa P và X . Đường thẳng l qua P vuông góc với đường kính qua Q cắt đường tròn Ω tại M (MP bé hơn bán kính). Chứng minh rằng

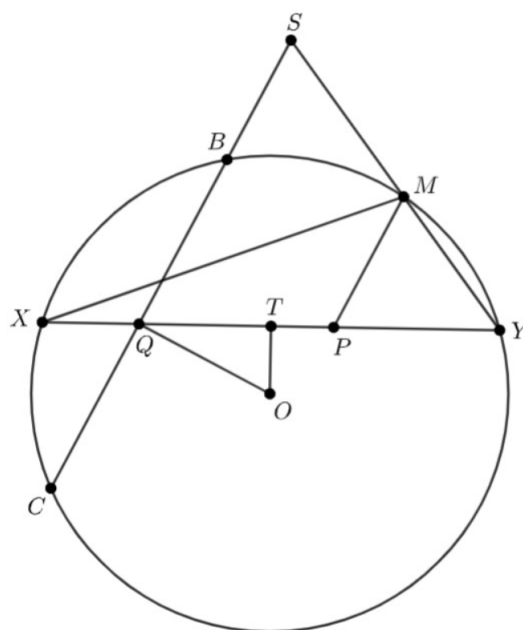
$$MP \cdot XY \geq 2 \cdot QX \cdot PY.$$

Bài 6. Lời giải.

Đầu tiên ta cho P, Q trùng nhau và chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp này. Đường thẳng vuông góc với OQ tại Q cắt Ω tại B, C . Khi đó $QB = QC$. Ta chứng minh

$$BQ \cdot XY \geq 2QX \cdot QY. \quad (7.1)$$

Ta có $QX \cdot QY = QB \cdot QC = QB^2$ nên ta chỉ cần chứng minh $XY \geq 2BQ$, hay $XY \geq BC$ là được. Gọi T là trung điểm của XY , xét trong tam giác vuông OTQ thì $OT \leq OQ$, cho nên kéo theo $XY \geq BC$. Vậy (1) đúng.



Trở lại vấn đề ban đầu, ta cần chứng minh

$$MP \cdot XY \geq 2QX \cdot PY \Leftrightarrow \frac{XY}{2QX} \geq \frac{PY}{PM}.$$

Từ (1) ta có

$$\frac{XY}{2QX} \geq \frac{QY}{QB},$$

cho nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{QY}{QB} \geq \frac{PY}{PM}.$$

Nếu CB cắt YM tại S thì từ $MP \parallel QS$ ta có

$$\frac{QY}{QB} \geq \frac{QY}{QS} = \frac{PY}{PM}.$$

Hoàn tất chứng minh.

Nhận xét: Dưới đây là một lời giải đề xuất sử dụng hình học giải tích.

Ta sẽ chứng minh $(QM - QP) \cdot XY \geq 2 \cdot QX \cdot PY$. Gọi A là giao điểm của l và đường thẳng OQ . Chọn hệ trục tọa độ Decartes có gốc tọa độ là O sao cho $Q(a, 0)$, $A(c, 0)$, $P(c, h)$ và đặt $QX = x$, $PQ = t$, $PY = y$, $OP = d$, $QM = z$.

Đặt $\lambda_Q = r^2 - a^2$ và $\lambda_P = r^2 - d^2$. Ta sẽ chứng minh

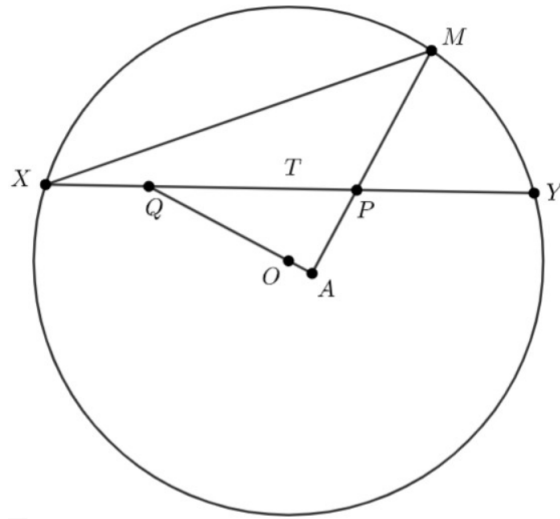
$$(z - t)(t + x + y) \geq 2xy \quad (7.2)$$

Lần lượt cộng và nhân vế theo vế hai hệ thức $x(t + y) = \lambda_Q$ và $y(t + x) = \lambda_P$, ta được

$$t(x + y) + 2xy = \lambda_P + \lambda_Q \quad (7.3)$$

và

$$xy(t + x)(t + y) = \lambda_P \lambda_Q \quad (7.4)$$



Từ hai phương trình trên dễ dàng thu được

$$(xy)^2 - xy(t^2 + \lambda_P + \lambda_Q) + \lambda_P \lambda_Q = 0 \quad (7.5)$$

Nên $w_1 = xy$ là một nghiệm của tam thức bậc hai

$$p(w) = w^2 - w(t^2 + \lambda_P + \lambda_Q) + \lambda_P \lambda_Q$$

Mà $w_1 = xy < x(t + y) = \lambda_Q$ và

$$\begin{aligned} p(\lambda_Q) &= (r^2 - a^2)^2 - (r^2 - a^2)(t^2 + \lambda_P + \lambda_Q) + \lambda_P \lambda_Q \\ &= (r^2 - a^2)^2 - (r^2 - a^2)(t^2 + r^2 - d^2 + r^2 - a^2) + (r^2 - d^2)(r^2 - a^2) \\ &= (r^2 - a^2)^2 - (r^2 - a^2)t^2 - (r^2 - d^2)(r^2 - a^2) - (r^2 - a^2)^2 + (r^2 - d^2)(r^2 - a^2) \\ &= -t^2(r^2 - a^2) = -t^2 \lambda_Q < 0 \end{aligned}$$

Suy ra $\lambda_Q \in (w_1, w_2)$ với w_1, w_2 là hai nghiệm của $p(w)$, $w_1 < w_2$.

Sử dụng (3) và (4), bất đẳng thức (2) viết lại

$$(xy)^2 \leq \left(\frac{z-t}{z+t} \right) \lambda_P \lambda_Q \quad (7.6)$$

Bất đẳng thức (6) được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$p\left(\sqrt{\frac{z-t}{z+t} \lambda_P \lambda_Q}\right) \leq 0, \quad (7.7)$$

vì từ trên suy ra $\sqrt{\frac{z-t}{z+t} \lambda_P \lambda_Q} \in [w_1, w_2]$. Biến đổi đại số, bất đẳng thức (7) tương đương

$$4z^2 \lambda_P \lambda_Q \leq (z^2 - t^2)(t^2 + \lambda_P + \lambda_Q)^2 \quad (7.8)$$

Vì $z^2 - t^2 = r^2 - d^2 = \lambda_P$ nên (8) tương đương

$$4z^2 \lambda_Q \leq (t^2 + \lambda_P + \lambda_Q)^2 \quad (7.9)$$

Mà $t^2 = (a - c)^2 + h^2 = a^2 + d^2 - 2ac$, $z^2 = t^2 + r^2 - d^2 = a^2 - 2ac + r^2$ và ta biến đổi được $t^2 + \lambda_P + \lambda_Q = 2(r^2 - ac)$. Do đó (9) tương đương

$$(a^2 - 2ac + r^2)(r^2 - a^2) \leq (r^2 - ac)^2$$

Bất đẳng thức cuối đúng do tương đương với $a^2(a - c)^2 \geq 0$. Hoàn tất chứng minh. $\square$

§4. SỐ HỌC

Bài 1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình:

$$x^5 - y^5 = 16xy$$

Lời giải.

Nếu một trong 2 số x, y bằng 0 thì số còn lại cũng phải bằng 0 và $(x, y) = (0, 0)$ là một nghiệm. Nếu $xy \neq 0$, đặt $d = \gcd(x, y)$ và ta có $x = da, y = db$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $(a, b) = 1$. Phương trình đã cho được biến đổi thành

$$d^3a^5 - d^3b^5 = 16ab \quad (1)$$

Theo phương trình trên, ta kết luận $a \mid d^3b^5$ do đó $a \mid d^3$ vì $(a, b) = 1$. Tương tự $b \mid d^3$ suy ra $ab \mid d^3$, vì vậy ta có thể viết $d^3 = abr$ với $r \in \mathbb{Z}$. Khi đó, phương trình (1) trở thành

$$abra^5 - abrb^5 = 16ab$$

$$\Leftrightarrow r(a^5 - b^5) = 16$$

Do đó $a^5 - b^5$ phải là ước 16. Điều này nghĩa là

$$a^5 - b^5 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16.$$

Nếu $|a^5 - b^5| = 1$ thì $a = \pm 1$ và $b = 0$ hoặc $a = 0$ và $b = \pm 1$ suy ra $xy = 0$, mâu thuẫn.

Nếu $|a^5 - b^5| = 2$, thì $a = 1$ và $b = -1$ hoặc $a = -1$ và $b = 1$. Trường hợp này ta dễ dàng tính được $(x, y) = (-2, 2)$.

Nếu $|a^5 - b^5| > 2$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a > b$. Đặt $a = x + 1$. Với $x \neq -1, 0$ ta có:

$$\begin{aligned} |a^5 - b^5| &= |(x+1)^5 - b^5| \\ &\geq |(x+1)^5 - x^5| \\ &= |5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1| \geq 31 \end{aligned}$$

Với $x = -1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow xy = 0$, mâu thuẫn.

Với $x = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 1 - b^5 = \pm 4, \pm 8, \pm 16 \Rightarrow b^5 = -3, -7, -15, 5, 9, 17 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$

Suy ra trường hợp này không xảy ra.

Vậy phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn là $(0; 0)$ và $(-2; 2)$. □

Bài 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) thỏa mãn phương trình:

$$125 \cdot 2^n - 3^m = 271$$

Lời giải.

Xét phương trình theo mod5, ta nhận được

$$3^m \equiv -1 \pmod{5},$$

điều này chỉ xảy ra khi $m = 4k + 2$ với $k \in \mathbb{Z}$. Tiếp tục xét phương trình theo mod7, ta có

$$125 \cdot 2^n - 3^m \equiv 5 \pmod{5} \Rightarrow -2^n - 3^{4k+2} \equiv 5 \pmod{5} \Rightarrow 2^n + 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{7}$$

Vì $2^s \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ tương ứng với $s \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$. Do đó chỉ xảy ra 1 trường hợp là $2^n \equiv 2^{2k+1} \equiv 1 \pmod{7}$, suy ra $3 \mid n$ và $3 \mid 2k + 1$. Vì vậy ta có thể viết $n = 3x$ và $m = 3y$. Phương trình đã cho có dạng

$$5^3 \cdot 2^{3x} - 3^{3y} = 271, \quad (2)$$

hoặc

$$(5 \cdot 2^x - 3^y) (25 \cdot 2^{2x} + 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 3^{2y}) = 271$$

Do đó $25 \cdot 2^{2x} + 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 3^{2y} \leq 271$ suy ra $25 \cdot 2^{2x} \leq 271$ hoặc $x < 2$. Ta kết luận $x = 1$ và thay vào (2) ta nhận được $y = 2$. Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $(m, n) = (6, 3)$.

Cách khác: Xét phương trình theo mod5, ta nhận được

$$3^m \equiv -1 \pmod{5},$$

điều này chỉ xảy ra khi $m = 4k + 2$ với $k \in \mathbb{Z}$. Với $n \geq 4$, xét phương trình theo mod16, ta nhận được

$$\begin{aligned} -3^{4k+2} &\equiv -1 \pmod{16} \\ \Rightarrow 9 \cdot 81^k &\equiv 1 \pmod{16}, \end{aligned}$$

điều này là không thể vì $81 \equiv 1 \pmod{16}$. Do đó, $n \leq 3$. Ta có thể dễ dàng kiểm tra rằng với $n = 1$ và $n = 2$ không thể cho ra m thỏa mãn và với $n = 3$ thì $m = 6$. Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $(m, n) = (6, 3)$. $\square$

Bài 3. Tìm tất cả các số có 4 chữ số $\overline{abcd} = 10^3a + 10^2b + 10c + d$, với $a \neq 0$ sao cho

$$\overline{abcd} = a^{a+b+c+d} - a^{-a+b-c+d} + a.$$

Lời giải.

Rõ ràng $a \neq 1$ và $-a + b - c + d \geq 0$. Suy ra $b + d \geq c + a \geq a$. Ta có

$$\begin{aligned} 10000 > \overline{abcd} &= a^{a+b+c+d} - a^{-a+b-c+d} + a \\ &> a^{a+b+c+d} - a^{a+b+c+d-2} \\ &= a^{a+b+c+d-2} (a^2 - 1) \\ &\geq a^{2a-2} (a^2 - 1). \end{aligned}$$

Với $a \geq 4$, ta có

$$a^{2a-2} (a^2 - 1) = 4^6 \cdot 15 > 4^5 \cdot 10 = 10240 > 10000,$$

mâu thuẫn. Do đó $a = 2$ hoặc $a = 3$

TH1: $a = 3$.

Nếu $a + b + c + d \leq 7$ thì

$$\overline{abcd} = a^{a+b+c+d} - (a^{-a+b-c+d} - a) \leq a^{a+b+c+d} - (1 - a) \leq 3^7 - (1 - 9) < 3000,$$

mâu thuẫn.

Nếu $a + b + c + d \geq 8$ thì

$$3^{a+b+c+d} - 3^{-a+b-c+d} + 3 > 3^{a+b+c+d-2} \cdot 8 \geq 729 \cdot 8 > 4000,$$

mâu thuẫn. Vậy trường hợp này không thể xảy ra.

TH2: $a = 2$. Vì $2^{10} = 1024 < 2000$ nên $a + b + c + d \geq 11$. Nếu $a + b + c + d \geq 12$ thì

$$\overline{abcd} > 2^{a+b+c+d-2} \cdot 3 = 1024 \cdot 3 > 3000,$$

mâu thuẫn. Do đó, $a + b + c + d = 11$. Suy ra $\overline{abcd} < 2^{11} + 2 = 2050$ nên $b = 0$.

$$2050 - 2^{d-c-2} \geq 2000 \iff 2^{d-c-2} \leq 50,$$

do đó $d - c - 2 \leq 5$. Vì $d + c = 9$ nên $d - c - 2$ lẻ, suy ra $d - c - 2 \in \{1, 3, 5\}$. Suy ra

$$\overline{abcd} = 2050 - 2^{d-c-2} \in \{2048, 2042, 2018\}$$

Số duy nhất thỏa mãn $a + b + c + d = 11$ là 2018.

Vậy 2018 là nghiệm duy nhất. □

Bài 4. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho

$$\frac{4^n + 2^n + 1}{n^2 + n + 1}$$

là một số nguyên.

Lời giải.

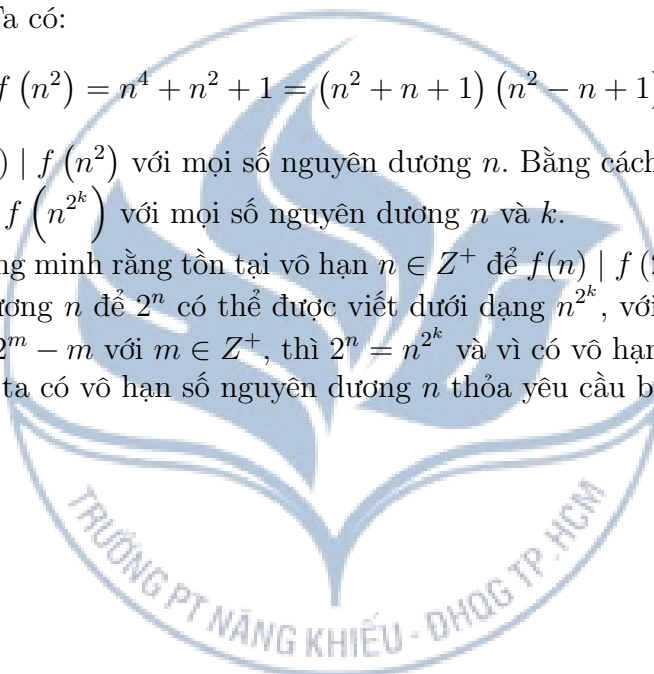
Đặt $f(n) = n^2 + n + 1$. Ta có:

$$f(n^2) = n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1).$$

Điều này có nghĩa là $f(n) \mid f(n^2)$ với mọi số nguyên dương n . Bằng cách quy nạp trên k , ta có thể dễ dàng thấy rằng $f(n) \mid f(n^{2^k})$ với mọi số nguyên dương n và k .

Theo giả thiết ta cần chứng minh rằng tồn tại vô hạn $n \in \mathbb{Z}^+$ để $f(n) \mid f(2^n)$. Từ thảo luận trên, nếu tồn tại một số nguyên dương n để 2^n có thể được viết dưới dạng n^{2^k} , với $k \in \mathbb{Z}^+$, thì $f(n) \mid f(2^n)$. Ta chọn $n = 2^{2^m}$ và $k = 2^m - m$ với $m \in \mathbb{Z}^+$, thì $2^n = n^{2^k}$ và vì có vô hạn số nguyên dương có dạng $n = 2^{2^m}$ với $m \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có vô hạn số nguyên dương n thỏa yêu cầu bài.

Hoàn tất chứng minh. □



CHƯƠNG



GIỚI THIỆU ĐỀ THI VÀ ĐÁP ÁN ĐỀ TUYỂN SINH VÀO PTNK

§1. ĐỀ THI NĂM 2021

Bài 1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{y-1} = 2 \\ x + y = m \end{cases}$

- Giải hệ với $m = 7$
- Tìm m sao cho hệ có nghiệm (x, y)

Bài 2. Cho $M = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, $N = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}$, $K = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

- Chứng minh nếu $MK = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$ thì $N = 0$
- Cho $M = K = 4$, $N = 1$. Tính tích abc .

Bài 3. Cho dãy n số thực $x_1; x_2; \dots; x_n$ ($n \geq 5$) thỏa: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

- Chứng minh nếu $x_n \geq \frac{1}{3}$ thì $x_1 + x_2 \leq x_n$
- Chứng minh nếu $x_n \leq \frac{2}{3}$ thì tìm được số nguyên dương $k < n$ sao cho

$$\frac{1}{3} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq \frac{2}{3}$$

Bài 4. (a) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $(2n+1)^3 + 1$ chia hết cho 2^{2021}

- Tìm tất cả số tự nhiên n và số nguyên tố p sao cho $\frac{2n+2}{p}$ và $\frac{4n^2+2n+1}{p}$ là các số nguyên. Chứng minh với n và p tìm được, các số nguyên trên không thể đồng thời là số chính phương.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A . Các điểm E, F lần lượt thay đổi trên các cạnh AB, AC sao cho $EF \parallel BC$. Gọi D là giao điểm của BF và CE , H là hình chiếu của D lên EF . Đường tròn (I) đường kính EF cắt BF, CE tại M, N . (M khác F , N khác E)

- Chứng minh AD và đường tròn ngoại tiếp $\triangle HMN$ cùng đi qua tâm I của đường tròn tâm I .
- Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên BC và P, Q tương ứng là giao điểm của EM, FN với BC . Chứng minh tứ giác $AEPL, AFQK$ nội tiếp và $\frac{BP \cdot BL}{CQ \cdot CK}$ không đổi khi E, F thay đổi.
- Chứng minh nếu EL và FK cắt nhau trên đường tròn (I) thì EM và FN cắt nhau trên đường thẳng BC .

Bài 6. Cho N tập hợp ($N \geq 6$), mỗi tập hợp gồm 5 chữ cái khác nhau được lấy từ 26 chữ cái $a, b, c, \dots, x, y, z$.

- Biết rằng trong N tập hợp đã cho, hai tập hợp bất kỳ có chung đúng 1 chữ cái, và không có chữ cái nào có mặt trong tất cả N tập hợp này. Chứng minh không có chữ cái nào có mặt trong 6 tập hợp từ N tập đã cho.

- (b) Biết rằng trong N tập hợp đã cho, hai tập hợp bất kỳ có chung đúng 2 chữ cái, và không có hai chữ cái nào cùng xuất hiện trong N tập hợp này.
Hỏi trong số N tập hợp đã cho, có nhiều nhất bao nhiêu tập hợp có chung đúng 2 chữ cái?

§2. ĐỀ THI NĂM 2022

- Bài 1.** Cho hai phương trình: $x^2 - 2ax + 3a = 0$ (1) và $x^2 - 4x + a = 0$ (2)
 (a) Chứng minh ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.
 (b) Giả sử hai phương trình đều có hai nghiệm phân biệt. T_1, T_2 là tổng bình phương các nghiệm của (1) và (2). Chứng minh $T_1 + 5T_2 > 68$

- Bài 2.** Cho các số dương $a \geq b \geq c$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{4 + (b + c)^2} \leq 2a + b + c \leq \sqrt{4 + 4a^2}$$

- Bài 3.** Cho phương trình: $2^x + 5^y = k^2$ ($x; y; k \in \mathbb{N}^*$)
 (a) Chứng minh phương trình trên vô nghiệm khi y là số chẵn.
 (b) Tìm k để phương trình có nghiệm.
- Bài 4.** Cho tam giác ABC có trực tâm H , D đối xứng với H qua A . I là trung điểm của CD , đường tròn (I) đường kính CD cắt AB tại E, F (E thuộc tia AB)
 (a) Chứng minh $\angle ECD = \angle FCH$ và $AE = AF$.
 (b) Chứng minh H là trực tâm của $\triangle CEF$.
 (c) BH cắt AC tại K . Chứng minh $EFKH$ nội tiếp và EF là tiếp tuyến chung của (CKE) và (CKF) .
 (d) Chứng minh tiếp tuyến tại C của (I) và tiếp tuyến tại K của (KEF) cắt nhau trên đường thẳng AB .
- Bài 5.** Cho dãy số nguyên $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{21} \geq a_{22}$ thỏa mãn:
 i) $|a_i| \leq 11$ và $a_i \neq 0 \forall i = 1; 2; \dots; 22$
 ii) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{22} = 1$
 (a) Chứng minh: $a_1; a_2 > 0$
 (b) Chứng minh có thể chọn $k \geq 1$ số từ $a_2; a_3; \dots; a_{22}$ để tổng S của chúng thỏa $-10 \leq a_1 + S \leq 0$.
 (c) Chứng minh từ dãy đã cho có thể chọn $n \geq 1$ số có tổng bằng 0.



PHẦN



PHỤ LỤC 2

CHƯƠNG



QUÁ TRÌNH PHÁT TRIỂN KHỐI CHUYÊN TOÁN PTNK

§1. SỰ HÌNH THÀNH KHỐI CHUYÊN TOÁN PTNK



LỊCH SỬ THÀNH LẬP TRƯỜNG

Hoàn cảnh ra đời

Sau khoảng thời gian tìm hiểu công tác đào tạo học sinh năng khiếu Toán - Tin tại những trường đại học phía Bắc, cụ thể là các mô hình các khối Chuyên Toán-Tin Đại học Khoa học tự nhiên Hà Nội và Khối Chuyên Toán Đại học Sư phạm Hà Nội, khoa Toán Trường Đại học Tổng Hợp đã lập tờ trình xin được mở khối chuyên nhằm phát hiện và bồi dưỡng học sinh năng khiếu về Toán học, Tin học và tạo nguồn đào tạo tốt cho khoa. Ngày 14/07/1993, Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo Trần Chí Đáo ký quyết định thành lập "Hệ phổ thông trung học chuyên Toán – Tin, Trường Đại học Tổng hợp TP. Hồ Chí Minh".



Hơn 2 năm hoạt động, đơn vị đã gặt hái được nhiều thành tích tốt đẹp trong các kỳ thi năm 1995, 1996; mô hình giảng dạy học sinh năng khiếu ngay trong lòng trường Đại học đã chứng tỏ được tính ưu việt của mình. Do đó, Ban đào tạo ĐHQG TP. Hồ Chí Minh đã lập dự án thành lập trường PTTH chuyên thuộc Đại học. Và ngày 4/7/1996 Bộ trưởng Trần Hồng Quân đã ký quyết định số 2693/GD-ĐT thành lập trường Phổ Thông Năng Khiếu.

Lịch sử thành lập

Ngày 8/8/1996, GS. Trần Chí Đáo, Giám Đốc Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHQG - TP. Hồ Chí Minh) ký quyết định số 92/ĐHQG – TCCB về việc bổ nhiệm Ban Giám hiệu Trường Phổ Thông Năng Khiếu bao gồm:

- GS.TS Nguyễn Văn Đến, Hiệu Trưởng trường ĐH KHTN, kiêm Hiệu Trưởng trường Phổ Thông Năng Khiếu.
- PGS.TS Hoàng Văn Kiêm, Trưởng khoa Công nghệ thông tin, Trường ĐH KHTN, kiêm Phó Hiệu trưởng Trường Phổ Thông Năng Khiếu.

- GVC. Đặng Thị Hường, Trưởng khoa Ngữ Văn Anh Trường Đại học Khoa Học Xã hội và Nhân văn (ĐH KHXHNV), kiêm Phó Hiệu trưởng Trường Phổ Thông Năng Khiếu.

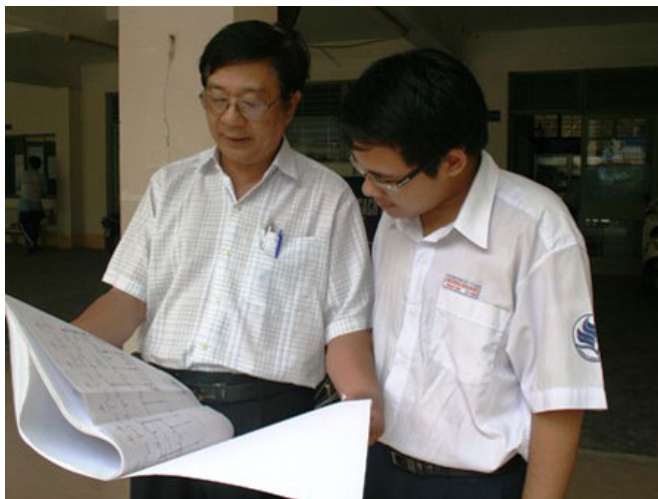
Ngày 8/8/1996, Phó giám đốc ĐHQG, GS. Nguyễn Văn Hanh ký quyết định số 90/ĐHQG – TCC, quyết định trường Phổ thông Năng khiếu có cơ sở chính đặt tại trường Đại học Khoa học tự nhiên (số 227 Nguyễn Văn Cừ, Q5, TP. Hồ Chí Minh) cho đến khi có đủ điều kiện hình thành một cơ sở độc lập.

Ngày 6/12/1996, Phó giám đốc ĐHQG TP. HCM, GS. Nguyễn Văn Hanh ký quyết định số 206/ĐHQG/KHTC về việc giao cơ sở 135B (nay là 153 Nguyễn Chí Thanh, Phường 9, Quận 5, TP.HCM) do trường ĐHKHTN tạm thời quản lý cho trường Phổ Thông Năng Khiếu kể từ ngày 1/1/1997. Đây cũng là cơ sở của trường Phổ Thông Năng Khiếu cho đến nay. Hiện nay, trường cũng đã bắt đầu mở một cơ sở nữa tại Linh Trung, Thủ Đức, và tăng chỉ tiêu tuyển sinh để có thể chọn lọc thêm nhiều nhân tài. Hiện tại, thầy Trần Nam Dũng đang là phó hiệu trưởng nhà trường.

Tổ Toán là tổ chuyên môn có lịch sử lâu đời nhất trong các tổ chuyên môn của Trường Phổ Thông Năng Khiếu. Điều này cũng dễ hiểu vì Trường Phổ Thông Năng Khiếu được hình thành dựa trên cơ sở các lớp chuyên Toán – Tin của trường DHTH TP. Hồ Chí Minh, nay là ĐHKHTN TP. Hồ Chí Minh.

Những thành viên đầu tiên của tổ Toán là cô Trần Thị Lệ, các thầy Hoàng Lê Minh, Lê Bá Khánh Trình, Bùi Xuân Hải, Thái Minh Đường, Nguyễn Hội Nghĩa, Lê Văn Hợp, Trần Ngọc Hội. Thời gian đầu, nhiệm vụ của tổ Toán là dạy phần Toán cơ bản cho các lớp chuyên Toán và chuyên Tin học, cũng như xây dựng chương trình để dạy cho đội tuyển Toán. Về mặt khối lượng công việc cụ thể thì không nhiều vì đầu tiên chỉ có 1 lớp chuyên Toán – Tin, sau đó là 3 lớp rồi 5 lớp, tuy nhiên, vì chưa có kinh nghiệm về chương trình dạy chuyên (lúc này Bộ chưa ban hành nội dung chương trình cho các lớp chuyên) nên các thành viên của tổ đã phải vừa làm, vừa mày mò học hỏi kinh nghiệm, dần dần lên được chương trình khung cho cấp độ đội tuyển. Thầy Nguyễn Thanh Hùng là trụ cột của đội tuyển chuyên Tin của PTNK từ những ngày đầu thành lập cho đến giờ.

Từ năm học 1996-1997, nhiệm vụ của tổ Toán trở nặng nề hơn vì khối chuyên Toán nay đã trở thành trường Phổ thông Năng Khiếu với các lớp Toán – Tin – Lý – Hoá – Sinh – Anh – Văn. Để đảm bảo cho hai mặt trận – đào tạo mũi nhọn thi HSG và đào tạo Toán phổ thông cho tất cả các lớp, lực lượng của tổ Toán đã được bổ sung thêm rất nhiều các thầy cô giỏi từ các trường PTTH và ĐHKHTN: cô Lợi, các thầy Danh, thầy Việt Đông, thầy Nam Dũng, thầy Thanh Dũng, thầy Thùy, ... và sau này là các sinh viên trẻ mới ra trường như Tuấn, Đức, Khanh (Tuấn và Đức là cựu học sinh PTNK).



Thầy Thái Minh Đường (đứng bên trái), nguyên Phó Hiệu trưởng PTNK

Và các thành viên tổ Toán có thể tự hào là đã hoàn thành tốt hai nhiệm vụ. Cùng với các tổ chuyên môn khác, tổ Toán đã góp phần không nhỏ trong việc đào tạo kiến thức phổ thông cho tất cả các khối lớp, giúp tỷ lệ đậu tốt nghiệp và đậu đại học của học sinh PTNK luôn ở mức cao.



Thầy Nguyễn Thanh Hùng (chủ nhiệm đội tuyển Tin) và thầy Nguyễn Tăng Vũ trong ngày lễ kỷ niệm 20/11 năm 2020

Niềm tự hào của các thành viên tổ Toán không chỉ nằm ở những thành tích bề nổi, những tỷ lệ đậu tốt nghiệp, đậu đại học hay số các huy chương quốc gia, quốc tế. Bằng những bài giảng đầy tâm huyết, họ đã truyền cho các thế hệ học sinh tình yêu môn toán, những kiến thức cơ bản và nền tảng của toán học phổ thông và cả toán hiện đại. Qua phong cách dạy rất khác nhau của các thầy cô, các học sinh đã học được lối học tập chủ động, biết tự tìm tòi và đào sâu vấn đề. Chính điều này đã giúp cho các học sinh PTNK tiếp tục thành công ở các bậc học cao hơn. Một điều rất quan trọng mà các thầy muốn gửi đến các em học sinh là: động cơ học tập không chỉ là đạt giải quốc gia, quốc tế mà quan trọng hơn cả là một kiến thức nền tảng tốt, một phong cách làm việc khoa học dành cho những phát triển về sau. Sự trung thực trong thi cử, sự chia sẻ, hỗ trợ lẫn nhau trong học tập, vì thế luôn là kim chỉ nam của các thầy cô và các em học sinh.

Bên cạnh đó, trong quá khứ các thầy cô tổ Toán cũng đã tổ chức nhiều đợt tập huấn đội tuyển ở Học Môn, Vũng Tàu để cùng sinh hoạt, giao lưu. Đây cũng là một trong những ấn tượng rất sâu đậm của các cựu học sinh với trường, là những điều cần được phát huy để nâng cao tình thầy trò trong trường lớp. Sau nhiều năm giảng dạy, tổ Toán cũng đã có nhiều thay đổi trong danh sách thành viên. Dưới đây là một số thầy cô đã và đang công tác tại tổ Toán:





Thầy Lê Bá Khánh Trình, người thầy có phong cách giảng bài gây ấn tượng với những thế hệ học sinh Năng khiếu



Thầy Trần Nam Dũng, người thầy quen thuộc của các học sinh chuyên Toán



Thầy Nguyễn Trọng Tuấn với những bài giảng sâu sắc



Từ trái: cô Nguyễn Thị Duyên, cô Nguyễn Thị Tuân, thầy Nguyễn Thanh Dũng, thầy Tạ Hoàng Thông, thầy Nguyễn Trọng Tuấn, thầy Nguyễn Tăng Vũ, thầy Vương Trung Dũng, thầy Võ Tiến Trình, thầy Nguyễn Ngọc Duy

§2. QUÁ TRÌNH PHÁT TRIỂN – THÀNH TÍCH CỦA TỔ

Đội tuyển khối chuyên tham gia thi HSG Quốc gia lần đầu tiên vào năm 1995 và kết quả là con số 0. Không nản chí, thầy trò lại tiếp tục miệt mài dùi mài kinh sử, các thầy đều đem hết tâm huyết ra truyền lại cho thế hệ học sinh và đàn em.

Sau một năm rèn luyện vất vả, kết quả đầu tiên cũng đã đến! Trong kỳ thi HSG Quốc gia năm học 1995-1996, học sinh Lê Long Triều đã đạt giải nhì môn Toán, làm nức lòng các thầy cô và bạn bè. Năm đó, Triều được tham dự kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam thi Toán quốc tế. Tuy chưa lọt vào được đội tuyển nhưng Triều và Lê Quang Năm (mới học lớp 10) cũng đã học hỏi được thêm rất nhiều qua hai tuần tập huấn tại Hà Nội. Quan hệ giữa tổ Toán với các thầy ở Hà Nội cũng được thiết lập và mở rộng.

Trong lĩnh vực đào tạo mũi nhọn, những thành tích bắt đầu đến một cách từ từ nhưng chắc chắn: sau Lê Long Triều đạt giải nhì Toán quốc gia vào năm 1996 là Lê Quang Năm đoạt HCV Olympic châu Á – Thái Bình Dương APMO vào năm 1997 và tiếp theo là những thành tích ấn tượng vào những năm 1998, 2000, 2002, 2005. Đặc biệt là hai chiếc HCB Toán Quốc tế của Nguyễn Đăng Khoa (2003) và Trần Chiêu Minh (2005).

Đặc biệt hơn, từ năm 2012 đến nay, trường Phổ Thông Năng Khiếu luôn có đại diện trong đội tuyển Việt Nam thi Toán Quốc tế. Việc cạnh tranh một trong sáu suất dự IMO rõ ràng là rất khó, và việc trường Phổ Thông Năng Khiếu liên tục có học sinh trong đội tuyển dự thi IMO là một điều rất vinh dự cho trường, cho thành phố Hồ Chí Minh, hay rộng hơn là cho toàn miền Nam.



Đội tuyển HSG Quốc gia 2019 chụp ảnh cùng GS.TSKH. Hà Huy Khoái



Buổi lễ xuất quân thi HSG Quốc gia 2020

Thành tích của PTNK qua các kì thi học sinh giỏi Toán quốc gia là vô cùng đáng nể. Có nhiều năm, cả đội tuyển PTNK gồm 10 bạn đều có giải quốc gia. Bảng sau đây thống kê thành tích thi quốc gia của trường trong giai đoạn gần đây (từ 2008 đến 2022). Nhiều học sinh hai năm liền đều tham gia kỳ thi chọn đội tuyển quốc gia thi IMO.

Năm	Giải nhất	Giải nhì	Giải ba	Giải KK	Tổng
2008	0	0	0	1	1
2009	0	0	1	2	3
2010	0	0	2	2	4
2011	0	1	1	2	4
2012	1	2	3	0	6
2013	1	2	1	1	5
2014	0	2	4	1	7
2015	0	2	3	2	7
2016	0	2	6	2	10
2017	0	2	4	3	9
2018	1	4	2	3	10
2019	0	4	0	2	6
2020	1	3	1	3	8
2021	1	4	3	2	10
2022	2	1	2	2	7

Trong đó hai học sinh đạt giải nhất, cũng là thủ khoa của kỳ thi năm đó là: Trần Hoàng Bảo Linh (35/42 điểm) - VMO 2012 và Phạm Tuấn Huy (33/42 điểm) - VMO 2013. Năm 2022, Phạm Hoàng Sơn đạt giải nhất trong hai năm liên tiếp 2021, 2022 trong đó em đạt thủ khoa năm 2022 với số điểm rất cao là 39/40.

Trong những năm gần đây có thêm một số bạn lớp 10 được vào đội tuyển và thi đạt giải cao, điển hình có bạn Trương Công Huy Hoàng đạt giải nhì năm 2021 khi em còn là học sinh lớp 10.

Bắt đầu từ chiếc HCB Toán Quốc tế đầu tiên năm 2003, đến bây giờ các học sinh ưu tú của trường Phổ Thông Năng Khiếu đã giành được tổng cộng là 14 chiếc huy chương trong kỳ thi Toán Quốc tế (gồm 4 HCV, 8 HCB và 2 HCD). Sau đây là danh sách chi tiết các giải IMO của trường PTNK.

Năm	Thí sinh	Giải thưởng	Điểm số
2003	Nguyễn Đăng Khoa	2	26/ 42
2005	Trần Chiêu Minh	2	31/42
2008	Đặng Trần Tiến Vinh	3	21/ 42
2009	Phạm Hy Hiếu	2	29/ 42
2012	Trần Hoàng Bảo Linh	3	20/ 42
2013	Phạm Tuấn Huy	1	33/ 42
2013	Cần Trần Thành Trung	1	31/ 42
2014	Phạm Tuấn Huy	1	32/ 42
2014	Hồ Quốc Đăng Hưng	2	22/ 42
2015	Nguyễn Huy Hoàng	2	23/ 42
2016	Phạm Nguyễn Mạnh	2	26/ 42
2019	Nguyễn Nguyễn	1	34/42
2020	Nguyễn Mạc Nam Trung	2	28/42
2022	Phạm Hoàng Sơn	2	30/42

Dưới đây là một số hình ảnh các thí sinh trong giai đoạn 2008-2021.



Đặng Trần Tiến Vinh, IMO 2008 và Phạm Hy Hiếu, IMO 2009



Trần Hoàng Bảo Linh, HCD IMO 2013



Phạm Tuấn Huy và Cán Trần Thành Trung - những chàng trai vàng PTNK



Hồ Quốc Đăng Hưng, HCB IMO 2014



Nguyễn Huy Hoàng - HCB IMO 2015

Phạm Nguyễn Mạnh - HCB IMO 2016

Gần đây, Nguyễn Nguyễn (khóa 16-19) đã xuất sắc giành được HCV tại kỳ thi IMO tại TP. Bath, Anh vào năm 2019 với số điểm cao nhất của đoàn Việt Nam.



Nguyễn Nguyễn - HCV IMO 2019



Nguyễn Mạc Nam Trung (đứng giữa) - HCB IMO 2020



Mặc dù không phải là ưu tiên trọng điểm trong dạy và học, thành tích của khối Toán trường Phổ Thông Năng Khiếu tại kỳ thi Olympic 30/4 truyền thống toàn miền Nam vẫn luôn rất ấn tượng.

Đặc biệt, vừa qua, tại kỳ thi Olympic 30/4 năm 2021 tại Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong, em Trương Công Huy Hoàng, lớp 10 Toán và em Phạm Hoàng Sơn, lớp 11 Toán đã xuất sắc giành được điểm thủ khoa của hai môn Toán 10 và Toán 11.



Em Trương Công Huy Hoàng và em Phạm Hoàng Sơn tại Olympic 30-4 năm 2021

Trong kỳ thi chọn HSG lớp 12 THPT, lớp chuyên Toán của trường gần như phải tham gia hết, và các thí sinh này luôn đạt được những vị trí đầu của kỳ thi. Ngoài các hoạt động học tập chuyên sâu, học sinh khối Toán trường Phổ Thông Năng Khiếu cũng có rất nhiều thành tích khác trong các trò chơi trí tuệ, trong các hoạt động văn nghệ, thể thao,... Tiêu biểu nhất có lẽ chính là Thân Ngọc Tĩnh (Toán 0912, thi vào mùa 9) và Nguyễn Huy Hoàng (Toán 1215, thi vào mùa 15) khi đã xuất sắc vô địch cuộc thi học thuật thường niên của Phổ Thông Năng Khiếu (Thách Thức Entropy), sau đó đem cầu truyền hình đường lên đỉnh Olympia về cho trường. Trước đó còn có các thí sinh Bùi Tứ Quý, Đào Nguyễn Thanh Hưng (mùa 13), Nguyễn Hoàng Bách (mùa 14).

Dù chưa thể vô địch Đường lên đỉnh Olympia, những thành tích mà Ngọc Tĩnh và Huy Hoàng đem lại đã góp phần làm đẹp thêm hình ảnh của không chỉ tổ Toán, mà còn là hình ảnh chung của ngôi trường Năng Khiếu.



Các gương mặt Olympia của PTNK (theo thứ tự thời gian)

§2. LỜI KẾT

Đã 26 năm trôi qua kể từ khi PTNK ra đời, và cũng từng ấy thời gian, khối Toán gồm thầy và trò đã đồng lực chung sức phấn đấu, đưa PTNK trở thành một trong những trường chuyên lớn mạnh nhất quốc gia. Giờ đây, cơ sở 2 của trường cũng đã được thành lập, nhiệm vụ của các giáo viên tổ Toán cũng ngày càng trở nên vất vả hơn nhiều.

Với định hướng mục tiêu phát hiện, bồi dưỡng năng khiếu học sinh Việt Nam trở thành những chủ nhân tương lai của đất nước, chắc chắn trong tương lai tới, sẽ còn thêm thật nhiều học sinh của PTNK đem về vinh quang cho bản thân, cho gia đình, nhà trường và cho đất nước.

Bài viết này có tham khảo và bổ sung từ Chuyên đề Toán học số 10 PTNK, năm 2016. Ban biên soạn bổ sung thêm nội dung này vào quyển sách nhằm giúp độc giả có cái nhìn rõ nét hơn về thành tích cũng như những sự cố gắng không ngừng của thầy trò chuyên Toán từ những ngày đầu thành lập cho đến ngày hôm nay.

