

PHẦN 1	Bài giảng dành cho học sinh trung học phổ thông.....	2
1	Khai thác một số hệ thức vector	2

§1. KHAI THÁC MỘT SỐ HỆ THỨC VECTOR

Trong chương trình lớp 10, phần hình học có khái niệm mới là vector tương đối quan trọng, ở đây vector được định nghĩa theo ngôn ngữ hình học và các phép toán trên vector được xây dựng một cách có hệ thống đầy đủ, hợp lý. Vector là khái niệm mới, hiện đại, có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết các bài toán, trong bài viết nhỏ này ta cùng tìm hiểu về một vài hệ thức vector đẹp và ứng dụng trong giải toán hình học.

A Từ định lý Jacobi đến đường thẳng Newton

Định lý 1.1. Cho tam giác ABC , M là điểm nằm trong tam giác. AM cắt BC tại D . Đặt $S_a = S_{MBC}$, $S_b = S_{MAC}$, $S_c = S_{MAB}$, $S = S_{ABC}$. Khi đó ta có

$$S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Chứng minh. Gọi D là giao điểm của MA với BC , khi đó ta có

$$\frac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{DB}{BC} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$$

Thật vậy, ta có $DC \cdot \overrightarrow{MB} + DB \cdot \overrightarrow{MC} = DC \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}) + DB \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = BC \cdot \overrightarrow{MD} + DC \cdot \overrightarrow{DB} + DB \cdot \overrightarrow{DC} = BC \cdot \overrightarrow{MD}$.

Suy ra

$$\overrightarrow{MD} = \frac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{DB}{BC} \cdot \overrightarrow{MC} \quad (1)$$

Hơn nữa

$$\overrightarrow{MD} = -\frac{MD}{MA} \cdot \overrightarrow{MA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{DB}{BC} \cdot \overrightarrow{MC} + \frac{MD}{MA} \cdot \overrightarrow{MA} = \vec{0}$$

Mặt khác

$$\frac{DC}{BC} = \frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{S_b}{S_b + S_c}, \quad \frac{DB}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c}, \quad \frac{ND}{NA} = \frac{S_a}{S_b + S_c}$$

nên

$$S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Trên đây là định lý Jacobi, trong trường hợp M nằm ngoài tam giác thì đẳng thức trên có dấu trừ và cộng.

Khi M trùng với một số điểm đặc biệt của tam giác thì hệ thức trên sẽ cụ thể hơn, ví dụ nếu M trùng với trọng tâm G của tam giác thì $S_a = S_b = S_c$ nên ta có hệ thức $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, rất quen thuộc. Khi M trùng với tâm đường tròn nội tiếp ta có ví dụ sau:

Ví dụ 1.1. Cho tam giác ABC , gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng

$$a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

 **Lời giải:** Khi I là tâm đường tròn nội tiếp, theo định lý Jacobi ta có

$$S_{ABC} \cdot \overrightarrow{IA} + S_{BAC} \cdot \overrightarrow{IB} + S_{BCA} \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{2}ra \cdot \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}rb \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{1}{2}rc \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{2}r(a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$$

■

Định lý 1.2. Cho tam giác ABC . M là điểm nằm trong tam giác, khi đó x, y, z thỏa

$$\frac{x}{S_{MBC}} = \frac{y}{S_{MAC}} = \frac{z}{S_{MAB}}$$

(hay còn kí hiệu $S_{MBC} : S_{MAC} : S_{MAB} = x : y : z$) khi và chỉ khi

$$x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MB} + z \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Chứng minh.

• Đặt

$$\frac{x}{S_a} = \frac{y}{S_b} = \frac{z}{S_c} = \frac{1}{t} \Rightarrow S_a = tx, S_b = ty, S_c = tz$$

$$S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$tx \overrightarrow{MA} + ty \overrightarrow{MB} + tz \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$x \overrightarrow{MA} + y \overrightarrow{MB} + z \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

- Giả sử ta có

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \quad (1)$$

và

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \quad (2)$$

Nhân (1) với S_a và trừ cho (2) nhân x ta có

$$(yS_a - xS_b)\overrightarrow{MB} + (zS_a - xS_c)\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} yS_a = xS_b \\ zS_a = xS_c \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{S_b}{S_a}, \quad \frac{z}{x} = \frac{S_c}{S_a}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{S_a} = \frac{y}{S_b} = \frac{z}{S_c}$$

Nhận xét:

Mở rộng hơn, khi M là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng tam giác thì luôn tồn tại bộ ba $(x; y; z)$ thỏa

$$x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MB} + z \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} (*)$$

và nếu có một bộ ba khác $(x'; y'; z')$ thỏa $(*)$ thì $x : y : z = x' : y' : z'$ ta gọi $(x; y; z)$ là tọa độ tỉ cự của M trong mặt phẳng tam giác ABC .

Sau đây là một ví dụ áp dụng của định lý trên

Ví dụ 1.2. Cho tam giác ABC nhọn. Gọi I, H lần lượt là tâm nội tiếp và trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi

$$HA \cdot \overrightarrow{IA} + HB \cdot \overrightarrow{IB} + HC \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

 **Lời giải:** Do I là tâm đường tròn nội tiếp nên ta có:

$$a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

Theo giả thiết và kết quả bài trên ta có:

$$\frac{HA}{a} = \frac{HB}{b} = \frac{HC}{c}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{HA}{HB} = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

Áp dụng định lý sin thì

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Suy ra:

$$\sin A \cdot \sin B - \sin A \cdot \sin B = 0$$

$$\Rightarrow \sin(A - B) = 0$$

$$\Rightarrow A = B$$



Ví dụ 1.3. Cho tam giác ABC có đường tròn tâm I nội tiếp tam giác và tiếp xúc với các cạnh BC, AC và AB lần lượt tại D, E và F . Chứng minh rằng AD, BE và CF đồng quy tại điểm J và

$$(p - b)(p - c)\vec{IA} + (p - a)(p - c)\vec{IB} + (p - b)(p - a)\vec{IC} = \vec{0}$$

Lời giải: Ta chứng minh được $AE = AF = p - a, BD = BF = p - b, CD = CE = p - c$.

Theo định lý Ceva thì ta có AD, BE, CF đồng quy tại J .

Áp dụng định lý Jacobi ta có

$$x \cdot \vec{IA} + y \cdot \vec{IB} + z \cdot \vec{IC} = \vec{0}$$

với

$$x : y : z = S_{IBC} : S_{IAC} : S_{IAB}$$

Mà

$$\frac{S_{IBC}}{S_{IAC}} = \frac{FB}{FA} = \frac{p - b}{p - a}$$

suy ra

$$S_{IBC}(p - a) = S_{IAC}(p - b) = S_{IAB}(p - c)$$

Do đó

$$S_{IBC} : S_{IAC} : S_{IAB} = \frac{1}{p - a} : \frac{1}{p - b} : \frac{1}{p - c}$$

hay

$$\frac{1}{p - a}\vec{IA} + \frac{1}{p - b}\vec{IB} + \frac{1}{p - c}\vec{IC} = \vec{0}$$

$$(p - b)(p - c)\vec{IA} + (p - a)(p - c)\vec{IB} + (p - a)(p - b)\vec{IC} = \vec{0}$$



Ví dụ 1.4. Cho tam giác ABC , đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F . Chứng minh rằng

$$a \cdot \vec{ID} + b \cdot \vec{IE} + c \cdot \vec{IF} = \vec{0}$$

Lời giải: Áp dụng định lý Jacobi cho tam giác DEF ta có

$$S_{IEF} \cdot \vec{ID} + S_{IDF} \cdot \vec{IE} + S_{IDE} \cdot \vec{IF}$$

Ta cần chứng minh

$$S_{IFE} : S_{IDF} : S_{IDE} = a : b : c$$

Thật vậy $S_{IEF} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin IEF = \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin A = \frac{1}{2}r^2 \frac{a}{2R}$, suy ra $\frac{S_{IEF}}{a} = \frac{r^2}{4R}$.

Tương tự ta cũng có $\frac{S_{IDF}}{b} = \frac{S_{IDE}}{c} = \frac{r^2}{4R}$, do đó ta có điều cần chứng minh. ■

Từ bài toán này ta có Định lý con nhím cho trường hợp tam giác như sau:

Định lý 1.3. (Định lý con nhím) Cho tam giác ABC . Các vector $\vec{a}$ vuông góc với BC và hướng ra ngoài tam giác và có độ dài bằng BC ; các vector $\vec{b}$, $\vec{c}$ được định nghĩa tương tự. Khi đó

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

Định lý con nhím còn đúng trong trường hợp đa giác, hoặc trường hợp đa diện.

Định lý 1.4. (Định lý con nhím) Cho đa giác lồi n đỉnh $A_1A_2...A_n$, các vectơ $\vec{e}_i$ có độ dài 1 vuông góc với cạnh A_iA_{i+1} ($A_{n+1} \equiv A_1$) và hướng ra ngoài. Khi đó ta có hệ thức

$$A_1A_2 \cdot \vec{e}_1 + A_2A_3 \cdot \vec{e}_2 + ... + A_nA_1 \cdot \vec{e}_n = \vec{0}$$

Định lý này các bạn có thể chứng minh bằng quy nạp.

Sau đây là một ví dụ ứng dụng Định lý con nhím trong trường hợp tứ giác.

Định lý 1.5. (Đường thẳng Newton) Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD . Khi đó M, I, N thẳng hàng.

Chứng minh. Gọi E, F, G, H lần lượt là tiếp điểm của (I) với các cạnh AB, BC, CD, DA .

Đặt $AE = AH = a, BE = BF = b, CF = CG = c, DG = DH = d$.

Ta có $AB \cdot \vec{IE} = b \cdot \vec{IA} + a \cdot \vec{IB}, BC \cdot \vec{IF} = b \cdot \vec{IC} + c \cdot \vec{IB}, CD \cdot \vec{IG} = c \cdot \vec{ID} + d \cdot \vec{IC}$ và $AD \cdot \vec{IH} = d \cdot \vec{IA} + a \cdot \vec{ID}$.

Theo định lý con nhím ta có

$$AB \cdot \vec{IE} + BC \cdot \vec{IF} + CD \cdot \vec{IG} + AD \cdot \vec{IH} = \vec{0}$$

suy ra

$$(a + c)(\vec{IB} + \vec{ID}) + (b + d)(\vec{IA} + \vec{IC}) = \vec{0}$$

Mà $\vec{IA} + \vec{IC} = 2\vec{IM}$ và $\vec{IB} + \vec{ID} = 2\vec{IN}$.

Do đó

$$(a + c)\vec{IN} + (b + d)\vec{IM} = \vec{0}$$

từ đó suy ra I, M, N thẳng hàng và $\frac{IM}{IN} = \frac{b + d}{a + c}$.

Tiếp theo là áp dụng Định lý Jacobi trong chứng minh định lý về điểm Lemoine.

Ví dụ 1.5. (Đường đối trung điểm điểm Lemoine) Đường thẳng đối xứng với đường trung tuyến qua đường phân giác xuất phát cùng đỉnh được gọi là đường đối trung của tam giác.

a) Trong một tam giác, 3 đường đối trung đồng qui tại một điểm L . Hơn nữa ta có hệ thức

$$a^2 \cdot \vec{LA} + b^2 \cdot \vec{LB} + c^2 \cdot \vec{LC} = \vec{0}$$

b) Trong một tam giác, điểm Lemoine là trọng tâm của của tam giác có các đỉnh là hình chiếu của điểm Lemoine trên các cạnh của tam giác đó.

 **Lời giải:** a)

Ta có:

$$\frac{\sin \widehat{BAM}}{\sin \widehat{CAM}} = \frac{BM}{CM} = \frac{\sin \widehat{ABM}}{\sin \widehat{ACM}}$$

(1)

Lại có:

$$\frac{\sin \widehat{BAP}}{\sin \widehat{CAP}} = \frac{PB}{PC} = \frac{\sin \widehat{ABP}}{\sin \widehat{ACP}}$$

(2)

Vì $\widehat{ABP} + \widehat{ACP} = 180^\circ$ nên:

$$\frac{\sin \widehat{BAM}}{\sin \widehat{CAM}} = \frac{\sin \widehat{PAC}}{\sin \widehat{PAB}}$$

Do đó:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

b)

Xét tam giác ABC có các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{EC}{EA} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{FA}{FB} = \frac{b^2}{a^2}$$

Khi đó:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$$

$\Rightarrow AD, BE, CF$ đồng quy (theo định lý Ceva).

Gọi giao điểm là I . Ta có:

$$\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$$

Xét theo diện tích:

$$\frac{S_{\triangle LBA}}{S_{\triangle LAC}} = \frac{BF}{FA} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{S_{\triangle LBC}}{S_{\triangle LCA}} = \frac{a^2}{c^2}$$

Suy ra:

$$a^2 \cdot \vec{LA} + b^2 \cdot \vec{LB} + c^2 \cdot \vec{LC} = \vec{0}$$



B Từ tích vô hướng đến các đẳng thức độ dài

Tích vô hướng của hai vector được định nghĩa vô cùng đơn giản, là đại lượng được xác định bằng tích độ dài hai vector với cos góc tạo bởi hai vector đó. Tuy vậy ứng dụng của tích vô hướng nhiều, trong số đó có tính toán độ dài các đoạn thẳng, tính khoảng cách các điểm, thiết lập các đẳng thức hình học hay. Trong mục này ta chủ yếu quan tâm đến việc khai thác tích vô hướng kết hợp với định lý Jacobi để thiết lập đẳng thức hoặc bất đẳng thức hình học. Ta bắt đầu bằng ví dụ sau:

Ví dụ 1.6. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM và đường phân giác trong AD . Chứng minh rằng

a) $AM^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2$.

b) $AD = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$.

c) Với K là một điểm bất kì thuộc đoạn BC . thì

$$BC \cdot AK^2 = KC \cdot AB^2 + KB \cdot AC^2 - BC \cdot KB \cdot KC$$

 **Lời giải:**

a) Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Bình phương hai vế:

$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 \\ &= \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{4}(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Mà:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

Do đó:

$$AM^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{DB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Vì $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$ nên:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

Bình phương hai vế:

$$\begin{aligned} AD^2 &= \frac{1}{(b+c)^2} \left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(b+c)^2} \left(b^2 AB^2 + c^2 AC^2 + 2bc \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \end{aligned}$$

Mà:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = bc \cos A$$

Do đó:

$$\begin{aligned} AD^2 &= \frac{1}{(b+c)^2} (b^2 c^2 + c^2 b^2 + 2b^2 c^2 \cos A) \\ \Rightarrow AD^2 &= \frac{2b^2 c^2 (1 + \cos A)}{(b+c)^2} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$AD = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

c)

$$\overrightarrow{AK} = \frac{KC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{KB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Bình phương hai vế, ta có:

$$AK^2 = \frac{1}{BC^2} \left(KC^2 \cdot AB^2 + KB^2 \cdot AC^2 + 2KB \cdot KC \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right)$$

Nhân hai vế với BC^2 , được:

$$BC^2 \cdot AK^2 = KC^2 \cdot AB^2 + KB^2 \cdot AC^2 + 2KB \cdot KC \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Ta biết rằng:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

Thay vào biểu thức trên, ta được:

$$BC^2 \cdot AK^2 = KC^2 \cdot AB^2 + KB^2 \cdot AC^2 + KB \cdot KC (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Thu gọn:

$$BC \cdot AK^2 = KC \cdot AB^2 + KB \cdot AC^2 - KB \cdot KC \cdot BC^2$$



Định lí 1.6. (Định lý Jacobi - Lagrange) Cho tam giác ABC , các số thực α, β, γ có tổng khác 0. Điểm I thỏa $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khi đó với mọi điểm M ta có:

$$\alpha \cdot MA^2 + \beta \cdot MB^2 + \gamma \cdot MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MI^2 + \alpha \cdot IA^2 + \beta \cdot IB^2 + \gamma \cdot IC^2$$

và

$$\alpha \cdot IA^2 + \beta \cdot IB^2 + \gamma \cdot IC^2 = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha\beta AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \alpha\gamma AC^2)$$

Chứng minh. Ta có

$$\alpha \cdot \overrightarrow{MA}^2 + \beta \cdot \overrightarrow{MB}^2 + \gamma \cdot \overrightarrow{MC}^2 = \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + \gamma(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)MI^2 + (\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC})^2$$

Vì $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, nên ta có: $(\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC})^2 = 0$

Khai triển:

$$\alpha^2 IA^2 + \beta^2 IB^2 + \gamma^2 IC^2 + 2\alpha\beta \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + 2\beta\gamma \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + 2\gamma\alpha \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \frac{IA^2 + IB^2 - AB^2}{2}, \quad \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = \frac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2}, \quad \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = \frac{IC^2 + IA^2 - AC^2}{2}$$

Thế vào, ta được:

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2) = \alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2$$

Do đó

$$\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2 = \frac{\alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Từ định lý trên ta có đẳng thức sau, được gọi là định lý Jacobi–Lagrange:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MI^2 + \frac{\alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Nhận xét:

Khi ta thay đổi điểm I bằng các điểm đặc biệt trong tam giác ta có đẳng thức khác nhau. Ví dụ nếu I trùng với trọng tâm G của tam giác ABC thì $\alpha = \beta = \gamma = 1$, với mọi điểm M ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

khi đó đại lượng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi M trùng G .

Đặc biệt, khi cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác thì

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

. Ta tính được $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$, dẫn tới $R^2 \geq \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Bằng cách cho các điểm khác, ta sẽ nhận được nhiều hệ thức tương tự. Các bạn xem thêm vài ví dụ sau.

Ví dụ 1.7. Cho tam giác ABC có I là tâm nội tiếp và O là tâm ngoại tiếp. Chứng minh rằng

a) $a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 = abc$.

b) $IO^2 = R^2 - 2Rr$ (Hệ thức Euler). Từ đó suy ra $R \geq 2r$.

 **Lời giải:**

a) Áp dụng Định lý Jacobi-Lagrange cho trường hợp I là tâm nội tiếp. Ta có

$$a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 = \frac{1}{a+b+c}(abc^2 + bca^2 + acb^2) = abc$$

b) Khi M trùng với O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC . Ta có

$$a \cdot OA^2 + b \cdot OB^2 + c \cdot OC^2 = (a+b+c)OI^2 + abc$$

$$\text{Suy ra } IO^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c} = R^2 - 2Rr.$$

$$\text{Từ đó suy ra } R^2 - 2Rr \geq 0, \text{ dẫn tới } R \geq 2r.$$

■

Ví dụ 1.8. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H . M là trung điểm cạnh BC . Đường tròn tâm M bán kính MH cắt BC tại A_1, A_2 ; các điểm B_1, B_2 và C_1, C_2 được xác định tương tự. Chứng minh rằng 6 điểm A_i, B_i, C_i với $i = 1, 2$ cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính đường tròn đó theo a, b, c, R .

 **Lời giải:** Ta có

$$\overrightarrow{OA_1}^2 = \overrightarrow{OM}^2 + \overrightarrow{MA_1}^2 = OB^2 - BM^2 + HA^2$$

$$= R^2 - \frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{2}(HB^2 + HC^2) - \frac{1}{4}a^2$$

$$= R^2 - \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}(HB^2 + HC^2) - R^2$$

$$= \frac{1}{2}(HA^2 + HB^2 + HC^2) - R^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow OA_1^2 &= \frac{1}{2}(HA^2 + HB^2 + HC^2) - R^2 \\ &= \frac{1}{2}(12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) - R^2\end{aligned}$$

$$OA_1^2 = 5R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Chứng minh tương tự cũng có cho OB_1^2, OC_1^2 , do đó O cách đều 6 điểm A_i, B_i, C_i .
■

Ví dụ 1.9. Cho tam giác ABC có G, H, I lần lượt là trọng tâm, trực tâm và tâm nội tiếp. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}\text{a) } IH^2 &= 4R^2 - \frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a + b + c} \\ \text{b) } IG^2 &= \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{3(a + b + c)}.\end{aligned}$$

🔑 **Lời giải:**

Áp dụng định lý Jacobi-Lagrange khi I là tâm nội tiếp tam giác.

a) Khi M là trực tâm H của tam giác, ta có

$$a \cdot HA^2 + b \cdot HB^2 + c \cdot HC^2 = (a + b + c)HI^2 + abc$$

$$\text{Suy ra } HI^2 = \frac{1}{a + b + c}(a \cdot HA^2 + b \cdot HB^2 + c \cdot HC^2) - \frac{abc}{a + b + c}. \quad (1)$$

Mặt khác $HA^2 = 4OM^2 = 4R^2 - a^2$, tương tự thì $HB^2 = 4R^2 - b^2, HC^2 = 4R^2 - c^2$.

$$\text{Khi đó } a \cdot HA^2 + b \cdot HB^2 + c \cdot HC^2 = 4R^2(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } IH^2 = 4R^2 - \frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a + b + c}.$$

b) Khi M trùng với trọng tâm G của tam giác, ta có

$$a \cdot GA^2 + b \cdot GB^2 + c \cdot GC^2 = (a + b + c)GI^2 + abc$$

Suy ra

$$GI^2 = \frac{1}{a + b + c}(a \cdot GA^2 + b \cdot GB^2 + c \cdot GC^2) - \frac{abc}{a + b + c}$$

$$\text{Ta có } a \cdot GA^2 = \frac{4a}{9}\left(\frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2\right) = \frac{2}{9}(ab^2 + ac^2) - \frac{1}{9}a^3.$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } b \cdot GB^2 = \frac{2}{9}(ba^2 + bc^2) - \frac{1}{9}b^3, c \cdot GC^2 = \frac{2}{9}(ca^2 + cb^2) - \frac{1}{9}c^3.$$

$$\text{Từ đó ta có: } IG^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{3(a + b + c)}.$$

■

Ví dụ 1.10. Cho tam giác ABC . Gọi O, I, G, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, trọng tâm và trực tâm của tam giác. Chứng minh rằng

$$OI \geq OG \geq \frac{1}{2}IH$$

 **Lời giải:**

- Theo ví dụ trên thì ta có $OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$ và $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$, khi đó $OI \geq OG$ tương đương

$$\frac{abc}{a+b+c} \leq \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$$

Đúng theo AM-GM.

- Xét

$$4OG^2 - IH^2 = \frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a+b+c} - \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{9}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a+b+c} - \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{9} \geq 0$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$5(a^3 + b^3 + c^3) + 9abc \geq 4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a)$$

Điều này đúng vì theo BĐT Schur

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

và

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

■

Để kết thúc bài viết, chúng ta cùng đi chứng minh lại Định lý Feuerbach, một định lý được xem là đẹp nhất của hình học phẳng sơ cấp, và lần này ta sử dụng các kỹ thuật tính toán độ dài như đã làm ở các ví dụ trên.

Định lý 1.7. Chứng minh rằng trong một tam giác thì đường tròn nội tiếp và đường tròn Euler tiếp xúc nhau.

Chứng minh. Nhắc lại, đường tròn Euler là đường tròn qua trung điểm các cạnh và chân các đường cao, đường tròn Euler có bán kính bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp và tâm là trung điểm đoạn thẳng nối trực tâm với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Xét tam giác ABC , gọi H, O, I lần lượt là trực tâm, tâm ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC , N là tâm đường tròn Euler và N là trung điểm OH . Để chứng minh (I)

và (N) tiếp xúc, ta cần chứng minh $IN = \frac{1}{2}R - r$, trong đó R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC .

Ta đi tính độ dài đoạn IN , như cách đã làm như các bài toán trên.

$$\begin{aligned} & \text{Ta có } a \cdot NA^2 + b \cdot NB^2 + c \cdot NC^2 \\ &= (a + b + c)NI^2 + \frac{1}{a + b + c}(abAB^2 + acAC^2 + bcBC^2) \\ &= (a + b + c)IN^2 + abc. \end{aligned}$$

Vì N là trung điểm OH nên ta có

$$AN^2 = \frac{1}{2}AH^2 + \frac{1}{2}OA^2 - \frac{1}{4}OH^2 \quad (1)$$

$$\text{Mà } AH = 2OM \text{ nên } AH^2 = 4OM^2 = 4(OC^2 - MC^2) = 4R^2 - a^2 \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

suy ra

$$OH^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$= 3R^2 + (OA^2 + OB^2 - AB^2) + (OA^2 + OC^2 - AC^2) + (OB^2 + OC^2 - BC^2)$$

$$= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$NA^2 = \frac{1}{2}(4R^2 - a^2) + \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}(9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) = \frac{1}{4}(R^2 - a^2 + b^2 + c^2)$$

Tương tự cho NB^2, NC^2 , từ đó ta có:

$$\begin{aligned} & a \cdot NA^2 + b \cdot NB^2 + c \cdot NC^2 \\ &= \frac{1}{4}((a + b + c)R^2 + a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) - a^3 - b^3 - c^3) \end{aligned}$$

Khi đó:

$$IN^2 = \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{4(a + b + c)}(a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) - a^3 - b^3 - c^3) - \frac{abc}{a + b + c}$$

Mà:

$$\begin{aligned} & a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) - a^3 - b^3 - c^3 \\ &= (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) + 2abc = \frac{16s^2}{a + b + c} + 8Rs \end{aligned}$$

$$= \frac{p^2 r^2}{2p} + 8Rrp = \frac{16pr^2}{2} + 8Rrp$$

Suy ra

$$\frac{1}{4(a+b+c)} (a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2) - a^3 - b^3 - c^3) = r^2 + Rr$$

Kết hợp các kết quả trên ta có

$$IN^2 = \frac{1}{4}R^2 + r^2 - Rr = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

Suy ra $IN = \frac{R}{2} - r$, do đó (I) và (N) tiếp xúc trong.

Nhận xét:

Lời giải trên đã kết hợp nhiều bước tính toán phức tạp đã được thể hiện ở các ví dụ trên. Tuy phức tạp nhưng nhìn chung lời giải rất tự nhiên, các bước đi rõ ràng, việc tính toán chỉ là việc kiểm tra lại tính đúng đắn mà thôi.

Tới đây xin kết thúc bài viết, hi vọng các em có thêm một bài học thú vị, tự mình có thể khám phá thêm nhiều đẳng thức và bất đẳng thức mới.