

ĐỀ BÀI

Bài 1. (2 điểm)

(a) Biết a, b là các số dương, $a \neq b$ và

$$\left(\frac{(a+2b)^2 - (b+2a)^2}{a+b} \right) : \left(\frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{a-b} - 3ab \right) = 3.$$

Tính $S = \frac{1+2ab}{a^2+b^2}$.

(b) Chứng minh rằng nếu $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$ thì

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

Bài 2. (2 điểm) Giải các phương trình sau:

(a) $\sqrt{x^2 - 3x + 4} + 1 - x - \sqrt{3 - x} = 0$

(b) $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}$

Bài 3. (2 điểm) Giải các hệ phương trình sau:

$$(a) \begin{cases} x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2 + 2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

Bài 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

(a) Chứng minh các tứ giác $AMON$ nội tiếp và 4 điểm E, F, M, N cùng thuộc một đường tròn.

(b) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt MN tại điểm P . Chứng minh $PA^2 = PM \cdot PN$.

(c) Từ P vẽ tiếp tuyến PK đến (O) , $K \neq A$. KD cắt (O) tại điểm thứ hai là L . Chứng minh $ALCB$ là hình thang cân và đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN và (O) tiếp xúc nhau.

Bài 5. (1 điểm) Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x^3 + y^4 \leq x^2 + y^3$. Chứng minh rằng:

(a) $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2$

(b) $x^2 + y^3 \leq x + y^2$

- HẾT -

Học sinh không được sử dụng tài liệu giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1.

(a) Ta biến đổi biểu thức về trái của đẳng thức đã cho:

$$\begin{aligned} VT &= \left(\frac{(a+2b)^2 - (b+2a)^2}{a+b} \right) : \left(\frac{a^3 - b^3}{a-b} - 3ab \right) \\ &= \frac{(a+2b-b-2a)(a+2b+b+2a)}{a+b} : ((a^2+ab+b^2) - 3ab) \\ &= \frac{(b-a)3(a+b)}{a+b} : (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= 3(b-a) : (a-b)^2 \\ &= \frac{-3(a-b)}{(a-b)^2} = \frac{-3}{a-b} \end{aligned}$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{-3}{a-b} = 3 \Leftrightarrow a-b = -1 \Rightarrow b = a+1$$

Thay $b = a+1$ vào biểu thức S :

$$S = \frac{1+2a(a+1)}{a^2+(a+1)^2} = \frac{2a^2+2a+1}{a^2+a^2+2a+1} = \frac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1} = 1$$

Vậy $S = 1$.

(b) Đặt $u = \sqrt[3]{x^2} > 0, v = \sqrt[3]{y^2} > 0$. Khi đó $x^2 = u^3, y^2 = v^3$. Ta có:

$$\sqrt[3]{x^4 y^2} = \sqrt[3]{(x^2)^2 y^2} = \sqrt[3]{u^6 v^3} = u^2 v$$

$$\sqrt[3]{x^2 y^4} = \sqrt[3]{x^2 (y^2)^2} = \sqrt[3]{u^3 v^6} = uv^2$$

Thay vào biểu thức đề bài:

$$\sqrt{u^3 + u^2 v} + \sqrt{v^3 + uv^2} = a$$

$$\sqrt{u^2(u+v)} + \sqrt{v^2(u+v)} = a$$

$$u\sqrt{u+v} + v\sqrt{u+v} = a \Leftrightarrow (u+v)\sqrt{u+v} = a$$

$$\frac{3}{(u+v)^2} = a \Rightarrow (u+v)^3 = a^2 \Rightarrow u+v = \sqrt[3]{a^2}$$

Vậy $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ (đpcm).

Bài 2.

(a)

$$\sqrt{x^2 - 3x + 4} = (x-1) + \sqrt{3-x}$$

$$x^2 - 3x + 4 = (x-1)^2 + (3-x) + 2(x-1)\sqrt{3-x}$$

$$x^2 - 3x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 - x + 2(x-1)\sqrt{3-x}$$

$$x^2 - 3x + 4 = x^2 - 3x + 4 + 2(x-1)\sqrt{3-x}$$

$$2(x-1)\sqrt{3-x} = 0$$

Tới đây ta có hai trường hợp:

- $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.
- $\sqrt{3 - x} = 0 \Rightarrow x = 3$.

Thử lại ta nhận cả 2 nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 3\}$.

(b) Đặt $t = \sqrt{x + 3} \geq 0$, ta có $t^2 = x + 3$.

Thay vào phương trình ban đầu, ta có:

$$2x^2 + t^2 = 3xt$$

$$2x^2 - 3xt + t^2 = 0$$

$$(2x - t)(x - t) = 0$$

Trường hợp 1: $t = x$. Ta có

$$\sqrt{x + 3} = x$$

$$x + 3 = x^2$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

Giải phương trình ta được $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ và $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$.

Trường hợp 2: $t = 2x$. Ta có

$$\sqrt{x + 3} = 2x$$

$$x + 3 = 4x^2$$

$$4x^2 - x - 3 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -\frac{3}{4}$. Thử lại ta nhận các nghiệm $x = 1$, $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 1; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$.

Bài 3.

(a) Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$.

Xét phương trình đầu tiên:

$$x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$$

$$x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$$

$$(x - y) + \frac{y - x}{xy} = 0$$

$$(x - y) \left(1 - \frac{1}{xy} \right) = 0$$

Ta có hai trường hợp:

- $x - y = 0$, tức là $x = y$. Thay vào phương trình thứ hai $x + 2y = 3$, ta được $3x = 3$, suy ra $x = 1$. Từ đó $y = 1$.

- $1 - \frac{1}{xy} = 0$, tức là $y = \frac{1}{x}$. Thay vào phương trình thứ hai:

$$x + \frac{2}{x} = 3$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Giải phương trình bậc hai ta được $x = 1$ hoặc $x = 2$. Nếu $x = 1$ thì $y = 1$. Nếu $x = 2$ thì $y = \frac{1}{2}$.

Thử lại ta nhận cả 2 nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là $(1, 1)$ và $(2, \frac{1}{2})$.

(b) Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$. Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 3x^2y^2 = y^3 + 2y & (1) \\ 3y^2x^2 = x^3 + 2x & (2) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình:

$$3x^2y^2 - 3y^2x^2 = y^3 - x^3 + 2y - 2x$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y) = 0$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \text{ (Do } x^2 + xy + y^2 + 2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0)$$

Thay $y = x$ vào phương trình (1):

$$3x^4 = x^3 + 2x$$

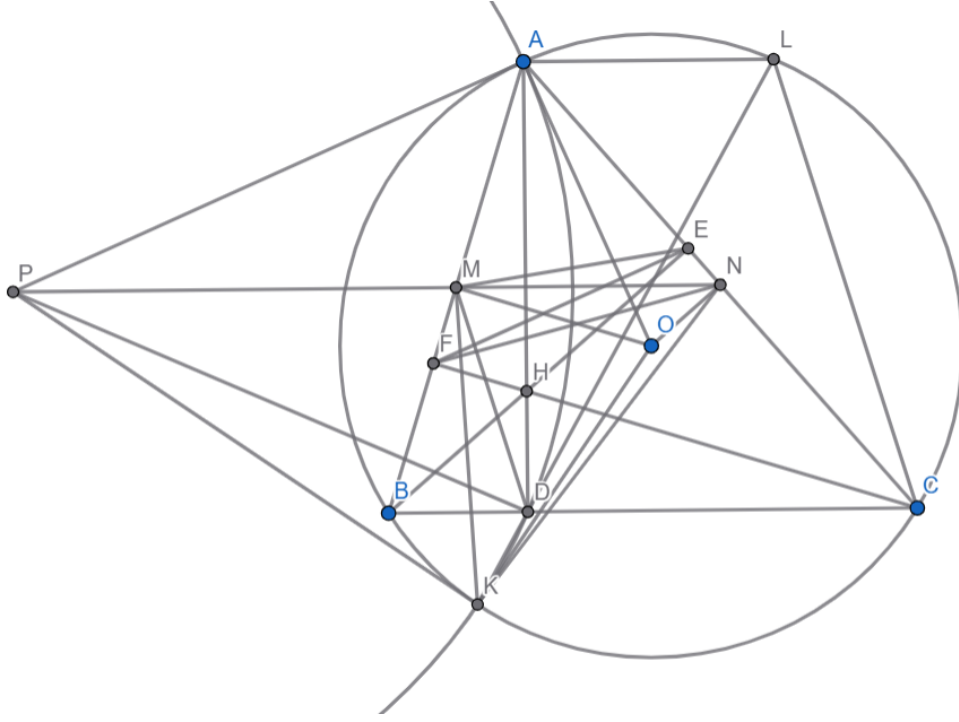
$$3x^4 - x^3 - 2x = 0$$

$$x(x - 1)(3x^2 + 2x + 2) = 0$$

Ta thấy $3x^2 + 2x + 2 = 2x^2 + (x + 1)^2 + 1 > 0$ với mọi x . Suy ra $x = 1$ (Do $x \neq 0$). Từ đó $y = 1$.

Thử lại ta nhận nghiệm $(1, 1)$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1, 1)$.

Bài 4.



- (a) Vì M, N là trung điểm AB, AC nên $OM \perp AB, ON \perp AC \Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{ONA} = 90^\circ$.
Do đó tứ giác $AMON$ nội tiếp đường tròn đường kính OA .

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp ($\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$). $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$.

Mà $MN \parallel BC$ (do MN là đường trung bình của tam giác ABC) $\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ACB}$.

Do đó $\widehat{AFE} = \widehat{ANM}$, hay tứ giác $MNEF$ nội tiếp.

- (b) Ta có $\widehat{PAB} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB).

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ANM}$ (do $MN \parallel BC$).

Nên $\widehat{PAM} = \widehat{ANP}$.

Xét $\triangle PAM$ và $\triangle PNA$:

$\widehat{APM}$ là góc chung.

$\widehat{PAM} = \widehat{PNA}$ (cmt).

Do đó $\triangle PAM \sim \triangle PNA$ (g-g).

$$\Rightarrow \frac{PA}{PM} = \frac{PN}{PA} \Rightarrow PA^2 = PM \cdot PN.$$

- (c) Vì PA, PK là hai tiếp tuyến cắt tại P nên $PA = PK$.

$$\text{Từ câu (b): } PK^2 = PM \cdot PN \Rightarrow \frac{PK}{PM} = \frac{PN}{PK}.$$

$$\Rightarrow \triangle PKM \sim \triangle PKN \Rightarrow \widehat{PKM} = \widehat{KNM}.$$

Nên PK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle KMN$ tại K .

Xét 2 đường tròn (O) và (KMN) có tiếp tuyến chung PK (K là điểm chung).

Do đó (O) và (KMN) tiếp xúc nhau tại K .

$\triangle ADB$ vuông tại D có DM là đường trung tuyến nên $MD = MA$.
 $\triangle ADC$ vuông tại D có DN là đường trung tuyến nên $ND = NA$.
Do đó MN là đường trung trực của AD .
Mà $P \in MN$ nên $PD = PA$. Do đó ta có $PD = PA = PK$.
Hay P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK .

Xét (P) , ta có: $\widehat{ADL} = 180^\circ - \widehat{ADK} = 180^\circ - \frac{360^\circ - \widehat{APK}}{2}$ (do $\widehat{ADK}$ là góc nội tiếp chắn cung lớn AK , $\widehat{APK}$ là góc ở tâm chắn cung AK).

Nên ta có $\widehat{ADL} = \frac{\widehat{APK}}{2}$.

Bên cạnh đó, ta có $\widehat{ALK} = \frac{\widehat{AOK}}{2}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm chắn cung AK của (O)).

Xét tứ giác $AOKB$ có $\widehat{AOK} + \widehat{ABK} = 180^\circ \Rightarrow AOKB$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{APK} + \widehat{AOK} = 180^\circ$.

Suy ra $\widehat{ADL} + \widehat{ALK} = \frac{1}{2}(\widehat{APK} + \widehat{AOK}) = 90^\circ$.

Do đó $AL \perp AD$.

Mà $AD \perp BC$ (do AD là đường cao)

Nên $AL \parallel BC$.

Suy ra $ALCB$ là hình thang.

Ta có $\widehat{ALC} + \widehat{LCB} = 180^\circ$ (do $AL \parallel BC$).

Mà $\widehat{ALC} + \widehat{ABC}$ (ABCL nội tiếp (O)).

Nên $\widehat{LCB} = \widehat{ABC}$.

Do đó $ALCB$ là hình thang cân (đpcm).

Câu 5. Cho $x, y > 0$ và

$$x^3 + y^4 \leq x^2 + y^3.$$

Suy ra

$$x^3 - x^2 \leq y^3 - y^4. \quad (1)$$

(a) Chứng minh $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2$.

Điều phải chứng minh tương đương với

$$x^3 - x^2 \leq y^2 - y^3.$$

Ta có

$$y^2 - y^3 - (y^3 - y^4) = y^2(1 - y)^2 \geq 0 \Rightarrow y^3 - y^4 \leq y^2 - y^3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$x^3 - x^2 \leq y^3 - y^4 \leq y^2 - y^3, \quad (3)$$

tức là

$$x^3 - x^2 \leq y^2 - y^3,$$

Vậy

$$x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2.$$

(b) Chứng minh $x^2 + y^3 \leq x + y^2$.

Điều phải chứng minh tương đương với

$$x^2 - x \leq y^2 - y^3.$$

Ta có

$$x^3 - x^2 - (x^2 - x) = x(1 - x)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x \leq x^3 - x^2. \quad (2)$$

Kết hợp với (3), ta có

$$x^2 - x \leq x^3 - x^2 \leq y^3 - y^4 \leq y^2 - y^3,$$

suy ra

$$x^2 - x \leq y^2 - y^3,$$

tức là

$$x^2 + y^3 \leq x + y^2.$$

□