

Kiểm tra dự tuyển - Thời gian 150 phút**Bài 1. (2 điểm)**

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

b) Chứng minh rằng tồn tại các số thực dương a, b, c sao cho

$$\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} < 2$$

Lời giải:

a) Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó, với chú ý rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} &= 1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{ab + bc + ca} \\ &\geq 1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{ab + bc + ca + c^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + 2c^2}{ab + bc + ca + c^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + 2c^2}{(a+c)(b+c)} \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2 + b^2 + 2c^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$a^3 + b^3 + a^2b + b^2a + 2c^2a + 2c^2b + 8abc \geq 2(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc)$$

hay

$$a^3 + b^3 + 4abc \geq a^2b + b^2a + 2a^2c + 2b^2c. \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-2c) \geq 0$$

Do $c = \min\{a, b, c\}$ nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Kiểm tra trực tiếp, ta thấy bộ $(a, b, c) = (2, 1, 1)$ thỏa mãn đề bài. Điều này cho thấy rằng nếu nghịch đảo cả hai phân số trong vế trái của câu a) thì bài toán không còn đúng nữa.

Bài 2. (2 điểm) Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y) - y) + f(xy - x) + f(x + y) = 2xy$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh f là hàm số lẻ và là toàn ánh.

b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa đề bài.

Lời giải: Kí hiệu $P(x, y)$ là mệnh đề

$$f(xf(y) - y) + f(xy - x) + f(x + y) = 2xy.$$

a) Xét $P(0, y)$, ta được

$$f(-y) + f(y) = 0, \forall y.$$

Suy ra f là hàm lẻ. Xét $P(-1, y)$, ta có

$$f(-f(y) - y) + f(-y + 1) + f(-1 + y) = -2y.$$

Do f là hàm lẻ nên

$$f(-f(y) - y) = -2y,$$

hay tương đương

$$f(f(y) + y) = 2y.$$

Suy ra f là hàm *toàn ánh*.

b) Vì f toàn ánh nên tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(a) = -1.$$

Xét $P(x, a)$, ta thu được

$$f(-x - a) + f(ax - x) + f(x + a) = 2ax.$$

Do f là hàm lẻ nên suy ra

$$f(ax - x) = 2ax \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Nếu $a = 1$ thì từ $(*)$ suy ra

$$f(0) = 2x, \forall x \in \mathbb{R},$$

vô lý. Do đó $a \neq 1$.

Thay $x = \frac{t}{a-1}$ vào $(*)$, ta được

$$f(t) = \frac{2a}{a-1}t = ct, \quad \text{với } c = \frac{2a}{a-1}.$$

Thay $f(x) = cx$ vào phương trình ban đầu:

$$c(cxy - y) + c(xy - x) + c(x + y) = 2xy.$$

Rút gọn được

$$(c^2 + c - 2)xy = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$c \in \{1, -2\}.$$

Vậy các hàm số thỏa mãn là

$$\boxed{f(x) = x \quad \text{hoặc} \quad f(x) = -2x, \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Bài 3. (2 điểm) Một số nguyên dương n được gọi là đẹp nếu như nó có thể biểu diễn dưới dạng

$$n = \frac{(x^2 + y)(x + y^2)}{(x - y)^2}$$

với $x > y$ là các số nguyên dương.

- Chứng minh rằng tập các số đẹp chứa vô hạn số chẵn và vô hạn số lẻ.
- Tìm số nguyên dương bé nhất là số đẹp.

Lời giải:

- Thay $x = y + 1$, ta có

$$n = \frac{(x^2 + y)(x + y^2)}{(x - y)^2} = \frac{(x^2 + x + 1)(x + (x + 1)^2)}{(x - y)^2} = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1)$$

Rõ ràng $x^2 + x = x(x + 1)$ và $x^2 + 3x = x(x + 3)$ đều là các số chẵn nên biểu thức trên là số lẻ, tức là tồn tại vô số số đẹp lẻ. Lại thay $x = 2y + 1$, ta có

$$n = \frac{(x^2 + y)(x + y^2)}{(x - y)^2} = \frac{((2y + 1)^2 + y)(2y + 1 + y^2)}{(2y + 1 - y)^2} = 4y^2 + 5y + 1$$

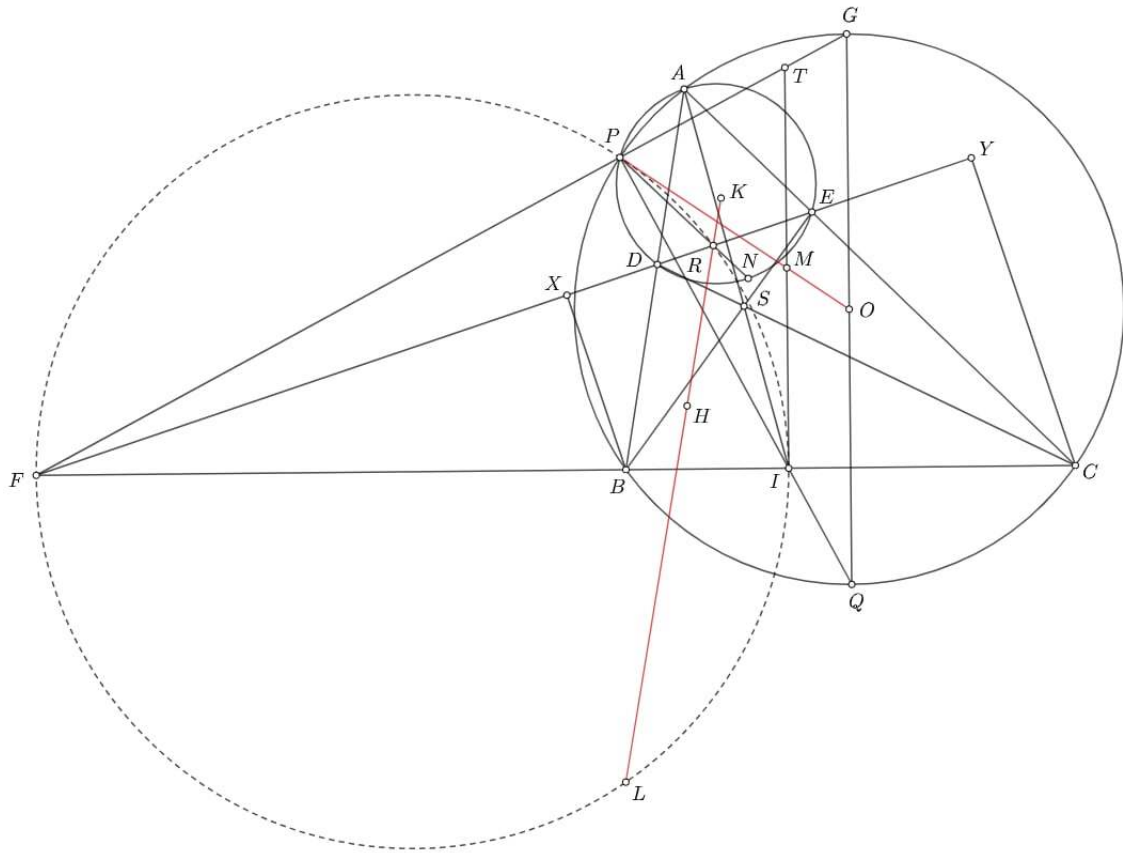
Chọn y lẻ thì có ngay $4y^2 + 5y + 1$ chẵn, tức là tồn tại vô số số đẹp chẵn.

- Ta sẽ chứng minh rằng số đẹp bé nhất là 10, ứng với cặp $(x, y) = (3, 1)$. Tiếp theo ta giả sử n đẹp, khi đó vì $x - y \mid (x^2 + y) - (x + y^2)$ và $x - y \mid (x^2 + y)(x + y^2)$ nên mỗi số $x^2 + y, x + y^2$ đều chia hết cho $x - y$. Từ đó đặt $(x^2 + y) = u(x - y)$, $(x + y^2) = v(x - y)$. Suy ra $u > v$ là các số nguyên và hơn nữa $v \geq 2$. Ta có $n = \frac{x^2 + y}{x - y} \cdot \frac{x + y^2}{x - y} = uv$ và $x + y - 1 = u - v$. Do đó $u - v \geq 2y \geq 2$. Suy ra $v \geq 2, u \geq 4 \Rightarrow n \geq 8$. Ta xét các trường hợp: Nếu $n = 8$ thì $u = 4, v = 2$. Tuy nhiên khi đó $x + y - 1 = 2$ hay $x + y = 3$, ta thu được $x = 2, y = 1$, thay vào thấy không thỏa mãn. Nếu $n = 9$, thì từ $uv = 9$ và $1 < v < u$ sẽ không có nghiệm. Do đó $n \geq 10$. Vậy số n đẹp bé nhất là 10.

Bài 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Các điểm D, E thay đổi trên các cạnh AB, AC sao cho $AD = AE$. DE cắt BC tại F . Gọi P là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và ADE , P khác A .

- Chứng minh các tứ giác $PFBD, PFCE$ nội tiếp.
- Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và ADE , L là điểm đối xứng của P qua BC . Chứng minh H, K, L thẳng hàng.
- Gọi S là giao điểm của BE và CD , AS cắt BC tại I . Lấy điểm T thuộc FP sao cho $TI \perp BC$. Gọi M là trung điểm IT . Chứng minh rằng PM luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải:



Giả sử các điểm như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.

- a) Ta có $\widehat{PBF} = \widehat{PAC} = \widehat{PAE} = \widehat{PDF}$ nên tứ giác $PFBD$ nội tiếp. Tương tự, biến đổi góc ta được tứ giác $PFCE$ nội tiếp.
- b) Gọi N là trung điểm cung DE không chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE , R là giao điểm của PN và DE . Khi đó PR là phân giác của $\widehat{DPE}$.
Ta có $\widehat{PBD} = \widehat{PCE}$ và $\widehat{PDB} = 180^\circ - \widehat{PDA} = 180^\circ - \widehat{PEA} = \widehat{PEC}$ nên hai tam giác PBD và PCE đồng dạng. Suy ra

$$\frac{BD}{CE} = \frac{PD}{PE} = \frac{DR}{ER}.$$

Lại có $AD = AE$ nên suy ra $\widehat{BDR} = \widehat{CER}$, dẫn đến hai tam giác BDR và CER đồng dạng. Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu của B, C lên DE thì hai tam giác BXR và CYR cũng đồng dạng. Vì vậy,

$$\frac{XR}{YR} = \frac{BR}{CR} = \frac{DR}{ER} \Rightarrow \overline{RX} \cdot \overline{RE} = \overline{RY} \cdot \overline{RD}.$$

Ký hiệu (UV) là đường tròn đường kính UV thì từ trên suy ra $\mathcal{P}_{R/(BE)} = \mathcal{P}_{R/(CD)}$. Ta cũng chứng minh được $\mathcal{P}_{H/(BE)} = \mathcal{P}_{H/(CD)}$ và $\mathcal{P}_{K/(BE)} = \mathcal{P}_{K/(CD)}$. Vì vậy, H, K, R cùng thuộc trục đẳng phương của (BE) và (CD) nên ba điểm này thẳng hàng.

Tam giác ADE cân tại A nên K và N đối xứng nhau qua DE . Vì vậy, nếu gọi L' là giao điểm của KR và FL thì $\widehat{PRF} = \widehat{L'RF}$. Biến đổi góc:

$$\widehat{PRL'} + \widehat{PFL'} = 2(\widehat{PRF} + \widehat{PFB}) = 2(\widehat{PAN} + \widehat{PDA}) = 180^\circ.$$

Suy ra tứ giác $PRL'F$ nội tiếp, dẫn đến $FL' = FP = FL$, tức là L trùng L' . Vậy ta có K, R, H, L thẳng hàng.

c) Áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC với ba đường AI, BE, CD đồng quy, ta có:

$$\frac{IB}{IC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{DA}{DB} = 1 \Rightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{DB}{CE} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{DB}{CE} = \frac{PB}{PC}.$$

Từ đây có được PI là phân giác của $\widehat{BIC}$. Bài toán quen thuộc, ta có $(FIBC) = -1$ nên PF là phân giác của $\widehat{BPC}$ nên nếu gọi giao điểm thứ hai của PI, PT với đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt là G, Q thì G, Q là trung điểm cung BC . Theo bổ đề hình thang, ta có PM đi qua O là điểm cố định.

Bài 5. (1 điểm) Cho 100 điểm $P_1, P_2, \dots, P_{100}$ nằm theo thứ tự trên một đường tròn, trong đó P_{100} và P_1 là hai điểm kề nhau. Ta có 5 màu, và mỗi điểm trong $P_1, P_2, \dots, P_{100}$ được tô bằng đúng một trong 5 màu đó, sao cho mỗi màu đều được sử dụng ít nhất một lần. Với mỗi cách tô màu như vậy, thì trong các điểm $P_1, P_2, \dots, P_{100}$ phải tồn tại ít nhất t điểm liên tiếp chứa ít nhất 3 màu khác nhau. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của t .

Lời giải: Trước hết, ta tô màu các điểm $P_{25}, P_{50}, P_{75}, P_{100}$ lần lượt bằng các màu 1, 2, 3, 4, và tất cả các điểm còn lại bằng màu 5.

Trong trường hợp này, với bất kỳ 25 điểm liên tiếp nào trong $P_1, P_2, \dots, P_{100}$, ta chỉ thu được nhiều nhất 2 màu, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó,

$$t \geq 26.$$

Giả sử tồn tại một cách tô màu sao cho mọi 26 điểm liên tiếp chỉ chứa nhiều nhất 2 màu.

Với cách tô này, ta chọn nhiều điểm liên tiếp nhất có thể từ tập $\{P_1, P_2, \dots, P_{100}\}$ sao cho các điểm này không chứa đủ cả 5 màu, và do đó chứa đúng 4 màu (nếu không, ta có thể mở rộng thêm một điểm kề mà vẫn chưa chứa đủ 5 màu).

Giả sử các điểm được chọn là

$$P_{k+1}, P_{k+2}, \dots, P_{100},$$

và 100 – k điểm này không chứa màu 1. Do tính cực đại, suy ra P_1 và P_k đều được tô màu 1.

Với $i = 1, 2, 3, 4, 5$, ký hiệu x_i là chỉ số lớn nhất của điểm được tô màu i . Khi đó $x_1 = k$.

Do tính đối xứng, ta có thể giả sử

$$x_2 < x_3 < x_4 < x_5.$$

Suy ra $x_5 = 100$, và dễ thấy rằng $x_2 > k$.

Ta chứng minh rằng với mỗi $i = 2, 3, 4, 5$,

$$x_i - x_{i-1} \geq 25.$$

Thật vậy, nếu $x_i - x_{i-1} \leq 24$, xét 26 điểm liên tiếp

$$P_{x_i-1}, P_{x_i}, P_{x_i+1}, \dots, P_{x_i+25} \quad (\text{chỉ số lấy theo modulo } 100).$$

Trong đó:

- $P_{x_{i-1}}$ được tô màu $i-1$,
- P_{x_i} được tô màu i ,
- $P_{x_{i+1}}$ được tô màu $j \neq i-1, i$.

Khi $i = 2, 3, 4$ thì tồn tại j sao cho $i+1 \leq j \leq 5$. Khi $i = 5$, do $P_{x_5+1} = P_{101} = P_1$, nên $j = 1 \notin \{4, 5\}$. Do đó, 26 điểm này chứa ít nhất 3 màu khác nhau, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Vì vậy,

$$x_5 = x_1 + \sum_{i=2}^5 (x_i - x_{i-1}) \geq 1 + 4 \times 25 > 100,$$

mâu thuẫn với $x_5 = 100$.

Mâu thuẫn này cho thấy rằng với mọi cách tô màu hợp lệ, luôn tồn tại 26 điểm liên tiếp trong $P_1, P_2, \dots, P_{100}$ chứa ít nhất 3 màu khác nhau.

Giá trị nhỏ nhất cần tìm của t là

26

HẾT