



ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

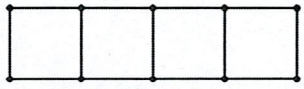
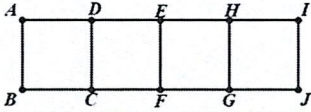
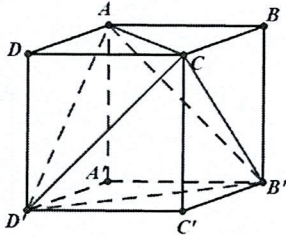
MÔN: TOÁN - KHỐI: 10

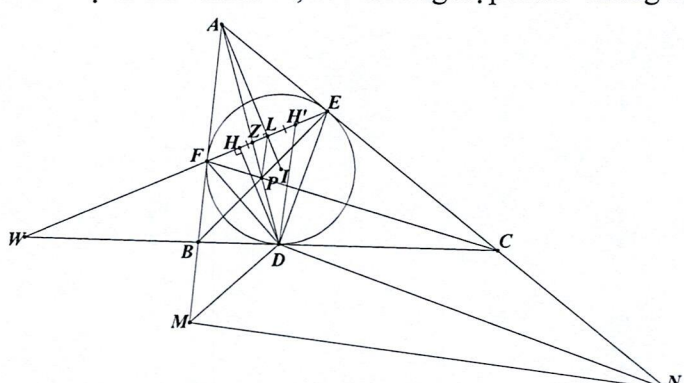
Lưu ý: Các bước giải đúng nhưng khác đáp án đều cho điểm tương ứng.

Câu	Nội dung	Điểm
1	Câu 1. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x(x+y) = y(y+z) = z(z+x) \neq 0$. Chứng minh a. $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = x + y + z$. b. $4\left(\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}\right) - \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3}\right) = 9$.	4,0
a.	Từ giả thiết suy ra $xyz \neq 0$ và $x^2 = y(y+z) - xy$. Do đó $\frac{x^2}{y} = y + z - x$.	1,0
	Tương tự ta có $\frac{y^2}{z} = z + x - y$ và $\frac{z^2}{x} = x + y - z$. Suy ra $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = x + y + z$.	1,0
	Đặt $P = 4\left(\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}\right) - \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3}\right)$. Trường hợp 1: Khi $(x-y)(y-z)(z-x) = 0$ thì từ giả thiết ta có $x = y = z$. Khi đó $P = 9$, đpcm.	0,5
	Trường hợp 2: Khi $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$. Ta có $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = \frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^2}{z} \cdot \frac{z^2}{x} = xyz$. Suy ra $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2$.	0,5
b.	Ta cũng có $\left(\frac{x^2}{y} - y\right)\left(\frac{y^2}{z} - z\right)\left(\frac{z^2}{x} - x\right) = (z-x)(x-y)(y-z)$. Suy ra $(x+y)(y+z)(z+x) = xyz$. Do đó $x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 = -xyz$. Do vậy $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = -xyz$. Suy ra $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} = -4$.	0,5
	Ta có $\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} - \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{x}{z}\right)$. Lại có $\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ nên $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} - 4 = 3 + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}.$ Mặt khác $\frac{x^2}{y^2} = 1 + \frac{z-x}{y}$; $\frac{y^2}{z^2} = 1 + \frac{x-y}{z}$; $\frac{z^2}{x^2} = 1 + \frac{y-z}{x}$ nên $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = -4$. Suy ra $\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} = 3 + (-4) \cdot 7 = -25$. Do vậy $P = 4(-4) - (-25) = 9$, đpcm.	0,5

2	Gọi S là tập hợp các số nguyên n ($n > 1$) sao cho với n số thực bất kỳ thuộc khoảng $(-2; 2)$ có tổng bằng 0 thì tổng lũy thừa bậc 4 của chúng luôn nhỏ hơn 32. Chứng minh $S = \{2; 3\}$.	3,0
	Gọi các số thực đang xét là $a_1, \dots, a_n$ thì $a_1, \dots, a_n \in (-2; 2)$ và $a_1 + \dots + a_n = 0$. - Với $n = 2$ thì $a_1^4 < 16, a_2^4 < 16$ nên $a_1^4 + a_2^4 < 32$. Suy ra $2 \in S$.	1,0
	- Với $n = 3$, giả sử $a_1 a_2 \geq 0$ (do trong 3 số cho trước sẽ có ít nhất 2 số có tích không âm). Ta có $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 < a_1^4 + a_2^4 + 16 \leq (a_1 + a_2)^4 + 16 = (-a_3)^4 + 16 = a_3^4 + 16 < 32.$ Suy ra $3 \in S$.	1,0
	- Với $n \geq 4$ thì chọn $a_1 = a_3 = -a_2 = -a_4 = \sqrt[4]{8}$ và các số còn lại (nếu có) bằng 0, ta có $a_1^4 + \dots + a_n^4 = 32$. Suy ra $n \notin S$ với mọi số nguyên dương $n \geq 4$. Vậy $S = \{2; 3\}$.	1,0

3	a. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x; y) = 2^x - 5^y$ với x, y là 2 số nguyên dương thỏa mãn $2^x \geq 5^y$. b. Tìm tất cả các số nguyên dương N có đúng 2 ước nguyên tố là 2 và 5, đồng thời $N + 4$ là số chính phương.	4,0
a) (1,5đ)	a) Với x, y là 2 số nguyên dương bất kỳ thỏa mãn $2^x \geq 5^y$. Ta có $f(x; y) \geq 0$. Nếu $f(x; y) = 0$ thì $2^x = 5^y$, vô lý.	0,5
	Nếu $f(x; y) = 1$ thì $2^x - 5^y = 1$. Suy ra $x \geq 3; 5^y = 2^x - 1 \equiv 3 \pmod{4}$, vô lý. Nếu $f(x; y) = 2$ thì $2^x - 5^y = 2$, vô lý do 5^y lẻ.	0,5
	Do $f(3; 1) = 3$ nên giá trị nhỏ nhất của $f(x; y)$ cần tìm là 3.	0,5
b) (2,5đ)	Đặt $N = 2^a 5^b$ và $N + 4 = m^2$ với $a, b, m \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $(m-2)(m+2) = N$. Do $a \geq 1$ nên $N : 2$. Do đó m chẵn (do m^2 chẵn), suy ra $N : 4$. Do vậy $a \geq 2$. Đặt $m = 2k, k \in \mathbb{N}^*$ ta được $(k-1)(k+1) = 2^{a-2} 5^b$. Xét các trường hợp sau: Nếu $a = 2$ thì $(k-1)(k+1) = 5^b$. Suy ra $\begin{cases} k-1 = 5^x; k+1 = 5^y \\ x+y = b; x < y; x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$ Suy ra $2 = 5^x (5^{y-x} - 1)$, vô nghiệm do $5^{y-x} \equiv 1 \pmod{4}$.	0,5
	Nếu $a \geq 3$ thì $(k-1)(k+1) : 2$. Suy ra k lẻ và $k \geq 3$ (do $2^{a-2} 5^b \geq 10$). Đặt $p = \frac{k-1}{2}$ và $q = \frac{k+1}{2}$ thì $p, q \in \mathbb{N}^*; q - p = 1$ và $pq = 2^{a-4} 5^b$. Do $(p, q) = 1$ nên $p, q \in \{2^{a-4}, 5^b\}$.	0,5
	Đặt $a-4 = t$ thì $t \in \mathbb{N}$ do $p, q \in \mathbb{N}^*$. Nếu $\begin{cases} p = 5^b \\ q = 2^t \end{cases}$ thì $2^t - 5^b = 1$, vô nghiệm theo câu a (chú ý $t = 0$ không thỏa mãn).	0,5
	Nếu $\begin{cases} p = 2^t \\ q = 5^b \end{cases}$ thì $5^b - 2^t = 1$. Suy ra $t \geq 2$ và b lẻ, t chẵn (do $(-1)^b = (-1)^t + 1 \pmod{3}$). Do đó $5^b = 5^{2s+1} \equiv 5 \pmod{8}$. Suy ra $2^t = 5^b - 1 \equiv 4 \pmod{8}$. Do vậy $t = 2$ và $b = 1$. Vậy $b = 1, a = 6$ và số nguyên dương cần tìm là $N = 320$.	1,0

Bài 4	a. Cho 4 hình vuông đơn vị xếp kề nhau như hình vẽ. Có bao nhiêu cách tô màu 10 đỉnh của các hình vuông đơn vị bởi k màu khác nhau (mỗi đỉnh tô 1 màu) sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào cùng màu khi $k = 3$? $k = 10$? (trong hình vẽ có tất cả 13 cặp đỉnh kề nhau)  b. Có bao nhiêu cách tô màu 8 đỉnh của hình lập phương bởi 3 màu khác nhau (mỗi đỉnh tô 1 màu) sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào cùng màu? (trong hình lập phương có tất cả 12 cặp đỉnh kề nhau)	4,0
a) (2,0đ)		
	Với $k = 3$. Số cách tô màu đỉnh A là 3. Số cách tô màu 3 đỉnh B, C, D sao cho 2 đỉnh B, D cùng màu là 2×2. Số cách tô màu 3 đỉnh B, C, D sao cho 2 đỉnh B, D khác màu là 2×1.	0,5
	Số cách tô màu 6 đỉnh E, F, G, H, I, J là 3^3. Vậy số cách tô màu cần tìm khi $k = 3$ là $3 \times (2 \times 2 + 2 \times 1) \times 3^3 = 486$.	0,5
	Với $k = 10$. Số cách tô màu đỉnh A là 10. Số cách tô màu 3 đỉnh B, C, D sao cho 2 đỉnh B, D cùng màu là $9 \times 1 \times 9$. Số cách tô màu 3 đỉnh B, C, D sao cho 2 đỉnh B, D khác màu là $9 \times 8 \times 8$.	0,5
	Số cách tô màu 6 đỉnh E, F, G, H, I, J là $(1 \times 9 + 8 \times 8)^3$. Vậy số cách tô màu cần tìm khi $k = 10$ là $10 \times (81 + 72 \times 8) \times 73^3 = 2555841690$.	0,5
b) (2,0đ)		
	Trường hợp 1: Các đỉnh A, C, B', D' được tô bởi 1 màu. Số cách chọn 1 màu để tô các đỉnh A, C, B', D' là 3. Số cách tô màu các đỉnh còn lại là 2^4. Vậy số cách tô thỏa mãn là $3 \cdot 2^4 = 48$.	1,0
	Trường hợp 2: Các đỉnh A, C, B', D' được tô bởi 2 màu. Số cách chọn 2 trong 3 màu để tô các đỉnh A, C, B', D' là C_3^2. Số cách tô màu các đỉnh A, C, B', D' bằng 2 màu sao cho có 3 đỉnh cùng màu là 4×2. Khi đó, số cách tô màu các đỉnh còn lại là 2×1^3.	0,5
	Số cách tô màu các đỉnh A, C, B', D' bằng 2 màu sao cho có 2 cặp đỉnh mà mỗi cặp đỉnh cùng màu là 3×2. Số cách tô màu các đỉnh còn lại là 1^4. Vậy số cách tô thỏa mãn là $C_3^2 \times [4 \times 2 \times (2 \times 1^3) + 3 \times 2 \times 1^4] = 66.$ Tóm lại, tổng số cách tô thỏa mãn yêu cầu bài toán là $48 + 66 = 114$.	0,5

5	Cho tam giác nhọn không cân ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. a. Gọi H là hình chiếu của D lên EF. Chứng minh HD là phân giác $\widehat{BHC}$. b. Gọi P là giao điểm của BE, CF và L là giao điểm của AI, EF. Gọi H' là điểm đối xứng với H qua L. Chứng minh DH' song song với PL. c. Gọi M là điểm đối xứng với F qua B và N là điểm đối xứng với E qua C. Chứng minh $\frac{\sin \widehat{DNM}}{\sin \widehat{DMN}} = \frac{\sin \widehat{H'DE}}{\sin \widehat{H'DF}}$ và PL vuông góc với MN.	5,0
	Giả sử các điểm có vị trí như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự. 	
a)	Gọi W là giao điểm của FE, BC . Theo Định lý Ceva thì AD, BE, CF đồng quy.	0,5
(1,0đ)	Suy ra $(W, D, B, C) = -1$. Lại có $HD \perp HW$ nên HD là phân giác $\widehat{BHC}$.	0,5
b)	Theo câu a ta có A, P, D thẳng hàng. Gọi Z là giao điểm của FE, AD. Ta có $E(W, D, B, C) = -1$ nên $(A, P, Z, D) = -1$. Suy ra $(LA, LP, LH, LD) = -1$. Lại có $LA \parallel HD$ nên LP đi qua trung điểm HD. Suy ra DH' song song với PL (do L là trung điểm của HH').	0,5
c)	Ta có $\frac{\sin \widehat{DNM}}{\sin \widehat{DMN}} = \frac{DM}{DN} = \frac{DB \cos(B/2)}{DC \cos(C/2)} = \frac{\cot(B/2) \cdot \cos(B/2)}{\cot(C/2) \cdot \cos(C/2)}$ và $\frac{\sin \widehat{H'DE}}{\sin \widehat{H'DF}} = \frac{H'E}{H'F} \cdot \frac{\sin \widehat{DEF}}{\sin \widehat{DFE}} = \frac{HF}{HE} \cdot \frac{\cos(B/2)}{\cos(C/2)}$ $= \frac{\cot \widehat{DFE} \cdot \cos(B/2)}{\cot \widehat{DEF} \cdot \cos(C/2)} = \frac{\tan(C/2) \cdot \cos(B/2)}{\tan(B/2) \cdot \cos(C/2)}$ Suy ra $\frac{\sin \widehat{DNM}}{\sin \widehat{DMN}} = \frac{\sin \widehat{H'DE}}{\sin \widehat{H'DF}}$.	0,5
(2,0đ)	Chú ý $\widehat{DNM} + \widehat{DMN} = \widehat{H'DE} + \widehat{H'DF} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} < 90^\circ$. Nếu $\widehat{DNM} > \widehat{H'DE}$ thì $\widehat{DMN} < \widehat{H'DF}$. Khi đó $\frac{\sin \widehat{DNM}}{\sin \widehat{DMN}} > \frac{\sin \widehat{H'DE}}{\sin \widehat{H'DF}}$, loại.	0,5
	Nếu $\widehat{DNM} < \widehat{H'DE}$ thì $\widehat{DMN} > \widehat{H'DF}$. Khi đó $\frac{\sin \widehat{DNM}}{\sin \widehat{DMN}} < \frac{\sin \widehat{H'DE}}{\sin \widehat{H'DF}}$, loại. Do vậy $\widehat{DNM} = \widehat{H'DE}$. Suy ra $DH' \perp MN$. Do vậy $PL \perp MN$, đpcm.	0,5