

**ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC**

Câu	Nội dung	Điểm
1	Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_{30}, b_1, b_2, \dots, b_{30}$ thỏa mãn $a_i \neq 0$ với mọi $i = 1, \dots, 30$ . Hỏi phương trình $\max \{a_1x + b_1, a_2x + b_2, \dots, a_{30}x + b_{30}\} = 4$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?	3
	Giả sử phương trình đã cho có 3 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$ . Suy ra tồn tại chỉ số $1 \leq i \leq 30$ để $a_i x_2 + b_i = \max \{a_1x + b_1, a_2x + b_2, \dots, a_{30}x + b_{30}\} = 4$ ; ngoài ra ta có $a_i x_1 + b_i \leq 4, a_i x_3 + b_i \leq 4$ .	1.5
	Nói cách khác, hàm tuyến tính $a_i x + b_i - 4$ nhận giá trị 0 tại $x_2$ và không dương tại $x_1, x_3$ . Điều này chỉ xảy ra khi nó là hàm hằng bằng 0; nghĩa là $a_i = 0, b_i = 4$ , mâu thuẫn. Như vậy, phương trình đã cho có không quá 2 nghiệm.	1
	Đảo lại, với $a_1 = \dots = a_{29} = 1, a_{30} = -1, b_1 = \dots = b_{30} = 0$ ta dễ thấy phương trình $\max \{x, -x\} = 4$ có 2 nghiệm là $x = \pm 4$ .	0.5

Câu	Nội dung	Điểm
2	Cho các số thực $x, y$ thỏa mãn $ x  \leq 3,  y  \leq 3$ . Chứng minh rằng: $0 \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) \leq 164$	4
	Một mặt, do $ x ,  y  \leq 3$ , ta có $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4( x  + 1)( y  + 1)$ $\leq (3^2 + 1)(3^2 + 1) + 4(3 + 1)(3 + 1) = 164$ Dấu "=" đạt được khi $x = y = -3$	2
	Mặt khác, $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 4x - 4y + 4$ $= (xy + 1)^2 + (x + y - 2)^2 \geq 0$ Dấu "=" đạt được khi $xy = -1, x + y = 2$ hay $(x, y) = (1 \pm \sqrt{2}, 1 \mp \sqrt{2})$ .	2

Câu	Nội dung	Điểm
3	Các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ được viết trên một vòng tròn theo thứ tự đó. Biết rằng mỗi số lớn hơn tích của hai số liền trước nó: với mọi $1 \leq i \leq 100$ thì $a_i a_{i+1} < a_{i+2}$ (ta quy ước $a_{101} = a_1, a_{102} = a_2$ ). Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu số nguyên dương trong các số $a_1, a_2, \dots, a_{100}$	4
	Chúng ta sẽ chỉ ra rằng hai số hạng liên tiếp không thể đồng thời là số nguyên dương được. Thật vậy, giả sử ngược lại, $a_i, a_{i+1}$ là hai số nguyên dương liên tiếp. Suy ra, vì $a_{i+2} > a_i a_{i+1}$ nên $a_{i+2} > a_{i+1} \geq 1$ . Tương tự, $a_{i+3} > a_{i+2} a_{i+1}$ nên $a_{i+3} > a_{i+2}$ . Cứ lập luận như vậy, ta suy ra $a_{k+1} > a_k \geq 1$ với mọi $k$ . Nói riêng, điều này có nghĩa là $a_1 < a_2 < \dots < a_{100} < a_1$ , mâu thuẫn. Như vậy, trong 100 số hạng $a_1, \dots, a_{100}$ có nhiều nhất 50 số nguyên dương.	2
	Hơn nữa, nếu có 50 số nguyên dương thì chúng là các số hạng chỉ số chẵn hoặc là các số hạng chỉ số lẻ. Giả sử $a_1, a_3, \dots, a_{99}$ là các số nguyên dương (trường hợp $a_2, \dots, a_{100}$ là các số nguyên dương lập luận tương tự). Khi này bằng cách nhân các bất đẳng thức $a_2 > a_{100} a_1, a_4 > a_3 a_2, \dots, a_{100} > a_{99} a_2$ lại, ta được $a_2 a_4 \dots a_{100} > a_1 a_2 \dots a_{100}$ , kéo theo $1 > a_1 a_3 \dots a_{99}$ , vô lý.	1
	Như vậy, trong các số $a_1, \dots, a_{100}$ , có nhiều nhất 49 số nguyên dương. Ví dụ sau đây cho thấy giá trị này đạt được: $a_2 = a_4 = \dots = a_{98} = 1, a_1 = \frac{1}{100}, a_3 = \frac{1}{99}, \dots, a_{99} = \frac{1}{51}, a_{100} = \frac{1}{50}.$	1

Câu	Nội dung	Điểm
4	Cho các số nguyên dương $a, b$ với $a > b$ . Biết rằng $a^3 - b^3$ là một ước của $ab(a^2 - b^2)$ . Chứng minh rằng $(a - b)^3 > 3ab$	4
	Đặt $a = dm, b = dn$ , với $d = \gcd(a, b)$ , như vậy $\gcd(m, n) = 1$ . Điều kiện của bài toán chứng tỏ $d^3(m^3 - n^3) \mid d^4 mn(m^2 - n^2)$ , kéo theo $(m^3 - n^3) \mid dmn(m^2 - n^2)$ , hay $(m - n)(m^2 + mn + n^2) \mid dmn(m - n)(m + n)$ , nghĩa là $(m^2 + mn + n^2) \mid dmn(m + n)$ .	2
	Để ý rằng hiển nhiên $\gcd(m^2 + mn + n^2, m) = \gcd(m^2 + mn + n^2, n) = 1$ . Ngoài ra, ta cũng có $\gcd(m^2 + mn + n^2, m + n) = 1$ . Thật vậy, nếu $k \mid m^2 + mn + n^2$ và $k \mid m + n$ thì $k \mid (m + n)n + n^2$ chứng tỏ $k \mid n^2$ ; tương tự $k \mid m^2$ , do đó $k \mid \gcd(m, n) = 1$ , hay $k = 1$ . Từ đó $m^2 + mn + n^2 \mid d$ , kéo theo $d \geq m^2 + mn + n^2 = (m - n)^2 + 3mn > 3mn$ .	1
	Suy ra $(a - b)^3 = d^3(m - n)^3 \geq d^3 = d^2 \cdot d > d^2 \cdot 3mn = 3ab$	1

Câu	Nội dung	Điểm
5	<p>Cho tứ giác <math>ABCD</math> nội tiếp đường tròn <math>(O)</math>. Các đường thẳng <math>AD</math> và <math>BC</math> cắt nhau tại <math>P</math>, các đường thẳng <math>AC</math> và <math>BD</math> cắt nhau tại <math>Q</math>. Gọi <math>M</math> và <math>N</math> tương ứng là trung điểm của <math>AD</math> và <math>BC</math>. Ký hiệu <math>(L)</math> và <math>(K)</math> tương ứng là đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>QAD</math> và tam giác <math>QBC</math>. Đường thẳng <math>MQ</math> cắt lại <math>(K)</math> tại điểm <math>E</math> (khác <math>Q</math>), đường thẳng <math>NQ</math> cắt lại <math>(L)</math> tại điểm <math>F</math> (khác <math>Q</math>).</p> <p>a) Chứng minh rằng các điểm <math>P, O, E, F, M, N</math> cùng thuộc một đường tròn.</p> <p>b) Đường thẳng đi qua <math>L</math> và vuông góc với <math>QF</math> cắt đường thẳng đi qua <math>K</math> và vuông góc với <math>QE</math> tại điểm <math>T</math>. Chứng minh rằng các điểm <math>T, P</math> và <math>O</math> thẳng hàng.</p>	5
5.a	<div style="text-align: center;"> </div> <p>Do <math>\Delta QAD \sim \Delta QBC</math> nên <math>\angle MQD = \angle NQC</math>, suy ra <math>NQ</math> là đường đối trung của tam giác <math>AQD</math>. Ta thu được tứ giác <math>AFDQ</math> điều hòa.</p> <p>Suy ra</p> $\angle QFM = \angle QFD - \angle MFD = \angle QAD - \angle QFA = \angle QBC - \angle QDA = \angle MPN.$ <p>Suy ra <math>M, F, P, N</math> đồng viên. Tương tự <math>M, E, P, N</math> đồng viên.</p> <p>Lại có <math>\angle PMO = \angle PNO = 90^\circ</math> nên <math>PO</math> là đường kính của <math>(PMN)</math>. Vậy <math>P, O, E, F, M, N</math> đều nằm trên đường tròn đường kính <math>OP</math>.</p>	2

<p><b>5.b</b></p>	<p>Gọi <math>J</math> là trung điểm của <math>OP</math>. <math>LQ</math> cắt <math>TK</math> tại <math>U</math>, <math>KQ</math> cắt <math>TL</math> tại <math>V</math>. <math>(L)</math> giao <math>(K)</math> tại <math>S</math> khác <math>Q</math>.</p> <p>Hiển nhiên <math>P</math> thuộc trục đẳng phương của <math>(L)</math> và <math>(K)</math> nên <math>P, Q, S</math> thẳng hàng. Đồng thời ta cũng có <math>\angle PSO = 90^\circ</math>.</p> <p>Ta có <math>JL \perp FS</math>, <math>LK \perp QS</math> nên <math>\angle JLK = \angle FSQ = \frac{1}{2} \angle FLQ = \angle QLT</math>.</p> <p>Tương tự <math>\angle JKL = \angle QKT</math>, suy ra <math>Q, J</math> liên hợp đẳng giác trong tam giác <math>TLK</math>. Do đó <math>TQ, TJ</math> đẳng giác trong <math>\angle LTK</math>. (1)</p>	<p><b>1.5</b></p>
	<p>Mặt khác, ta cũng có <math>\angle QLT = \angle QSF = \angle QNP = \angle QMP = \angle QSE = \angle QKT</math>, suy ra tứ giác <math>LKUV</math> nội tiếp.</p> <p>Lại có <math>LQ \perp BC</math> nên <math>LQ \parallel KO</math>, tương tự suy ra <math>LQKO</math> là hình bình hành.</p> <p>Từ đó <math>\frac{VQ}{OK} = \frac{VQ}{QL} = \frac{VU}{LK} = \frac{TV}{TK}</math>.</p> <p>Mà <math>\angle TKO = \angle TUQ = \angle TVQ</math> nên <math>\triangle TVQ \sim \triangle TKO</math> (c.g.c).</p> <p>Vậy <math>TQ, TO</math> đẳng giác trong <math>\angle LTK</math>. (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra <math>T, P, J, O</math> thẳng hàng.</p>	<p><b>1.5</b></p>