SỞ GD – ĐT TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4
LẦN THỨ XXVIII – NĂM 2024

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

MÔN : **TOÁN** – KHỐI : **10**

Câu 1 (4,0 điểm). Cho hai đa thức $P(x)=x^9-x^5+x-4$ và $Q(x)=x^{13}-4x^4+2x-4.$ Gọi x_0 là một nghiệm thực của đa thức $P(x)$.

a) Chứng minh $0<x_0\le\sqrt[5]{4}.$

b) Chứng minh $\sqrt[6]{2}<Q(x_0)<\sqrt[5]{4}.$

Nội dung	Điểm
a) Do x_0 là nghiệm của $P(x)$ suy ra $4=x_0\left(x_0^8-x_0^4+1\right)\Rightarrow x_0>0.$ Ta có $x_0^5+4=x_0^9+x_0\ge 2x_0^5\Rightarrow x_0\le\sqrt[5]{4}$.	**2,0**
b) Khi đó $x_0^8-x_0^4+1=\dfrac{4}{x_0}\Rightarrow\dfrac{x_0^{12}+1}{4}=\dfrac{x_0^4+1}{x_0}=x_0^3+\dfrac{1}{3x_0}+\dfrac{1}{3x_0}+\dfrac{1}{3x_0}\ge\dfrac{4}{\sqrt[4]{27}}>\dfrac{4}{3}$ $\Rightarrow x_0^{12}>\dfrac{13}{3}>4\Rightarrow x_0>\sqrt[6]{2}.$	**1,0**
Mà $Q(x)=(x^4+1)P(x)+x\Rightarrow\sqrt[6]{2}<Q(x_0)<\sqrt[5]{4}$ (do $\sqrt[5]{4}$ không phải là nghiệm của $P(x)$).	**1,0**

Câu 2 (3,0 điểm). Kí hiệu $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên. Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ sao cho $f(1)=\dfrac{5}{4}$ và với mọi số nguyên m,n thì $f(m+n)+f(m-n)=2f(m)f(n).$

Nội dung	Điểm
Kí hiệu $P(m;n)$ là phép thế cặp số $(m;n)$ vào mệnh đề $f(m+n)+f(m-n)=2f(m)f(n).$ $P(0;0)\Rightarrow 2f(0)=2f^2(0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)=0\\ f(0)=1\end{array}\right..$	**0,5**
Trường hợp 1 : $f(0)=0.$ $P(m;0)\Rightarrow 2f(m)=2f(m)f(0)=0\ \forall m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ vô lý.	**0,5**
Trường hợp 2 : $f(0)=1.$ $P(0;n)\Rightarrow f(n)+f(-n)=2f(0)f(n)\Rightarrow f(-n)=f(n)\ \forall n\in\mathbb{Z}\Rightarrow f$ là hàm chẵn. $P(m;1)\Rightarrow f(m+1)=\dfrac{5}{2}f(m)-f(m-1)\ \forall m\in\mathbb{Z}.$	**0,5**
Ta chứng minh $f(n)=\dfrac{1}{2}\left(2^n+\dfrac{1}{2^n}\right)\ \forall n\in\mathbb{N}$ bằng quy nạp. Thật vậy $n=0;n=1$ mệnh đề đúng.	**0,5**
Giả sử $f(n-1)=\dfrac{1}{2}\left(2^{n-1}+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ và $f(n)=\dfrac{1}{2}\left(2^n+\dfrac{1}{2^n}\right).$ Khi đó : $f(n+1)=\dfrac{5}{4}\left(2^n+\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{1}{2}\left(2^{n-1}+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)=2^n\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{5}{4}-1\right)=2^n+\dfrac{1}{4.2^n}=\dfrac{1}{2}\left(2^{n+1}+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ mệnh $\Rightarrow$ đề được chứng minh.	**0,5**
Từ đây ta được $f(n)=\dfrac{1}{2}\left(2^n+2^{-n}\right)\ \forall n\in\mathbb{Z}.$ Thử lại thấy đúng.	**0,5**

Câu 3 (4,0 điểm). Xét hai số nguyên tố p, q thay đổi sao cho tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn đẳng thức $\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$. Tìm tập hợp giá trị của biểu thức $q-p$.

Nội dung	Điểm
Cách 1. $\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}\Leftrightarrow\frac{1}{p+1}-\frac{1}{q}=\frac{4}{n+2}\Leftrightarrow\frac{q-p-1}{(p+1)q}=\frac{4}{n+2}$	1,0
Có $q>p+1$ và $(q,q-p-1)=(q,p+1)=1$, $(p+1,q-p-1)=(p+1,q)=1$.	1,0
Vế trái là phân số tối giản nên $q-p-1 \mid 4$. Do đó $q-p\in\{2;3;5\}$.	1,0
Các bộ (p,q,n) thỏa mãn là $(3,5,78)$, $(2,5,28)$, $(2,7,19)$.	1,0

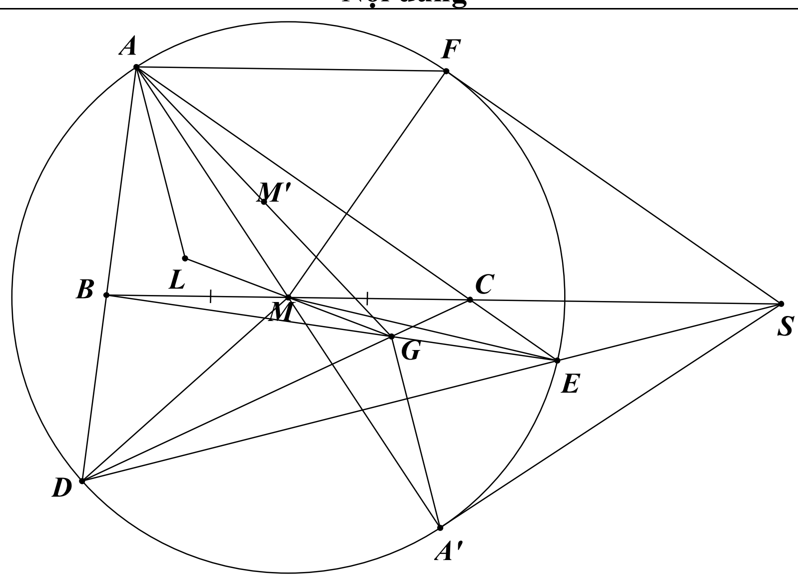
Nội dung	Điểm
Cách 2. Ta có $\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}\Leftrightarrow 4pq+2p+2q+2=n(q-p-1)$.	1,0
Suy ra $q>p+1$ và $n=4p+2+\frac{4(p+1)^2}{q-p-1}$.	1,0
Suy ra $q-p-1 \mid 4$ do $(q-p-1,p+1)=1$. Do đó $q-p\in\{2;3;5\}$.	1,0
Các bộ (p,q,n) thỏa mãn là $(3,5,78)$, $(2,5,28)$, $(2,7,19)$.	1,0

Câu 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ có M là trung điểm BC. Giả sử đường tròn (M,MA) cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại D, E (khác A).

a) Chứng minh $BA.BD=CA.CE$.

b) Đường thẳng qua A song song với BC cắt (M,MA) tại F (khác A). Chứng minh các đường thẳng BC, DE và tiếp tuyến tại F của (M,MA) đồng quy.

c) Gọi G là giao điểm của các đường thẳng BE, CD và L là điểm đối xứng của G qua M. Chứng minh $\widehat{LAC}=\widehat{MAB}$.

Nội dung	Điểm
	
a) Ta có $BA.BD=-\wp_{B\backslash(M)}=MA^2-BM^2=MA^2-CM^2=-\wp_{C\backslash(M)}=CA.CE$.	1,0

b) Do $AF \parallel BC$ và $MB = MC$ nên $A(FMCB) = -1$.	**0,5**
Kẻ đường kính AA' của (M). Ta có tứ giác $FEA'D$ điều hòa.	**0,5**
Gọi S là giao điểm các tiếp tuyến tại F, A' của (M, MA). Suy ra DE đi qua S.	**0,5**
Ta có $FA \perp FA', MA = MA', MC \parallel AF$ nên MC là đường trung trực của $A'F$. Suy ra BC đi qua S. Vậy BC, DE và tiếp tuyến tại F của (M, MA) đồng quy tại S.	**0,5**
c) Gọi M' là trung điểm của AG thì MM' là đường trung bình của tam giác LAG nên $AL \parallel MM'$.	**0,5**
Ta có MM' đi qua trung điểm DE (đường thẳng Gauss) nên $MM' \perp DE$. Suy ra $AL \perp DE$.	**1,0**
Suy ra $\widehat{LAC} = 90^\circ - \widehat{AED} = \widehat{MAB}$.	**0,5**

Câu 5 (4,0 điểm). Trên bảng có viết các số $1;2;3;...;2024$ gồm 2024 số nguyên dương đầu tiên. Người ta thực hiện liên tiếp thao tác sau : mỗi lần chọn tùy ý hai số x, y ở trên bảng sao cho $x \ge y + 2$ rồi xóa hai số này đi và thay bởi hai số $x-1; y+1$. Nếu từ các số trên bảng mà không thể thực hiện được thao tác như trên, ta gọi đó là trạng thái dừng.

a) Chứng minh dù có thực hiện như thế nào theo quy luật trên thì sau hữu hạn thao tác cũng sẽ đạt được trạng thái dừng.

b) Gọi S là số thao tác thực hiện để đạt trạng thái dừng. Tìm giá trị nhỏ nhất của S.

Nội dung	Điểm
a) Ở thời điểm thứ t, ta kí hiệu A_t là tổng bình phương các số trên bảng. Giả sử ta chọn hai số x, y với $x \ge y + 2$. Khi đó $A_{t+1} - A_t = (x-1)^2 + (y+1)^2 - x^2 - y^2 = -2x + 2y + 2 = -2(x - y - 1) \le -2$.	**1,0**
Giả sử quá trình thực hiện được vô hạn lần, sau mỗi lần đại lượng A_t giảm ít nhất 2 đơn vị. Như vậy đến lúc nào đó đại lượng này sẽ nhận giá trị âm. Tuy nhiên đại lượng tổng bình phương luôn không âm $\Rightarrow$ vô lý. Vậy đến lúc nào đó sẽ đạt trạng thái dừng.	**1,0**
b) Ở trạng thái dừng, các số trên bảng hơn kém nhau không quá 1 đơn vị. Giả sử lúc đó có k số $n+1$ và $2024-k$ số n với $0 \le k < 2024$. Do tính bất biến của tổng các số trên bảng nên ta được : $k(n+1) + (2024-k)n = 1 + 2 + ... + 2024 = \dfrac{2024.2025}{2} = 1012.2025$.	**0,5**
$\Rightarrow k + 2024n = 2025.1012 \Rightarrow 2024(1012 - n) = k - 1012$ Dễ thấy $\lvert k - 1012 \rvert < 2024 \Rightarrow 1012 - n = 0 \Rightarrow k = n = 1012$. Như vậy trạng thái dừng bao gồm 1012 số 1012 và 1012 số 1013.	**0,5**
Để đạt trạng thái dừng thì số 1 phải chịu "tác động" ít nhất 1011 lần (để đến được số 1012), tương tự số 2 chịu "tác động" ít nhất 1010 lần, ..., số 1011 chịu "tác động" ít nhất 1 lần, số 1014 chịu "tác động" ít nhất 1 lần (để đến được số 1013), ..., số 2024 chịu "tác động" ít nhất 1011 lần. Do đó số sự "tác động" ít nhất là $2(1 + 2 + ... + 1011) = 1012.1011$. Tuy nhiên mỗi bước thực hiện thao tác thì "tác động" vào hai số. Do đó số thao tác thực hiện ít nhất là $\dfrac{1011.1012}{2} = 506.1011 \Rightarrow S \ge 506.1011$.	**0,5**
Ta chỉ ra một cách thực hiện thao tác mà $S = 505.1011$ như sau : Chọn hai số $(1;2024)$ và thực hiện liên tiếp 1011 bước để đưa đến bộ $(1012;1013)$. Chọn hai số $(2;2023)$ và thực hiện liên tiếp 1010 bước để đưa đến bộ $(1012;1013)$. ... Chọn hai số $(1011;1014)$ và thực hiện 1 bước để đưa đến bộ $(1012;1013)$. Khi đó số thao tác thực hiện là $S = 1 + 2 + ... + 1011 = 506.1011$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 506.1011.	**0,5**

------------------HẾT------------------