

ĐỀ CHÍNH THỨC

Lưu ý : Thí sinh làm mỗi câu trên một tờ giấy riêng và ghi rõ số thứ tự câu ở trang 1 của mỗi tờ giấy thi.
Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Câu 1 (4,0 điểm). Cho hai đa thức $P(x) = x^9 - x^5 + x - 4$ và $Q(x) = x^{13} - 4x^4 + 2x - 4$. Gọi x_0 là một nghiệm thực của đa thức $P(x)$.

- Chứng minh $0 < x_0 \leq \sqrt[5]{4}$.
- Chứng minh $\sqrt[5]{2} < Q(x_0) < \sqrt[5]{4}$.

Câu 2 (3,0 điểm). Kí hiệu \mathbb{Z} là tập hợp các số nguyên. Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(1) = \frac{5}{4}$ và với mọi số nguyên m, n thì $f(m+n) + f(m-n) = 2f(m)f(n)$.

Câu 3 (4,0 điểm). Xét hai số nguyên tố p, q thay đổi sao cho tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn đẳng thức $\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$. Tìm tập hợp giá trị của biểu thức $q - p$.

Câu 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có M là trung điểm BC . Giả sử đường tròn (M, MA) cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại D, E (khác A).

- Chứng minh $BA \cdot BD = CA \cdot CE$.
- Đường thẳng qua A song song với BC cắt (M, MA) tại F (khác A). Chứng minh các đường thẳng BC, DE và tiếp tuyến tại F của (M, MA) đồng quy.
- Gọi G là giao điểm của các đường thẳng BE, CD và L là điểm đối xứng của G qua M . Chứng minh $\angle EAC = \angle MAB$.

Câu 5 (4,0 điểm). Trên bảng có viết các số $1; 2; 3; \dots; 2024$ gồm 2024 số nguyên dương đầu tiên. Người ta thực hiện liên tiếp thao tác sau : mỗi lần chọn tùy ý hai số x, y ở trên bảng sao cho $x \geq y + 2$ rồi xóa hai số này đi và thay bởi hai số $x - 1; y + 1$. Nếu từ các số trên bảng mà không thể thực hiện được thao tác như trên, ta gọi đó là trạng thái dừng.

- Chứng minh dù có thực hiện như thế nào theo quy luật trên thì sau hữu hạn thao tác cũng sẽ đạt được trạng thái dừng.
- Gọi S là số thao tác thực hiện để đạt trạng thái dừng. Tìm giá trị nhỏ nhất của S .

-----**HẾT**-----

Cán bộ coi thi **KHÔNG** giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: SBD:

Trường: Tỉnh/TP: