STAR-EDUCATION
WWW.STAR-EDUCATION.NET
LẦN THỨ 2

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
NĂM HỌC 2022-2023
MÔN THI: **TOÁN CHUYÊN**

———————

Thời gian làm bài: 120 phút

———————

Bài 1. (**1,5 điểm**) Cho các số $x, y, z > 0$ và $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$. Đặt $a = \frac{y^2 - x^2}{y}, b = \frac{z^2 - x^2}{z}$. Chứng minh

(a) $ab\sqrt{y^2 + z^2} = x^3$ và $ab = (y - a)(z - b)$.

(b) $x \leq \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{2}$.

Bài 2. (**1,5 điểm**) Cho phương trình $x^2 - (2 - m)x + 2m^2 - m = 0$ (m là tham số).

(a) Chứng minh rằng nếu m là số nguyên dương thì phương trình không có nghiệm.

(b) Nếu phương trình có nghiệm x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x_1 + x_2 + 6}{x_1 \cdot x_2 + 1}$$

Bài 3. (**1 điểm**) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + x + 2 = 4y \\ y^2 + y + 2 = 4z \\ z^2 + z + 2 = 4x \end{cases}$

Bài 4. (**1,5 điểm**)

(a) Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa $ab = cd$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ là hợp số.

(b) Có bao nhiêu tập con có 4 phần tử của tập $A = \{2026, 2027, \cdots, 2116\}$ trong đó tích hai số này bằng tích hai số kia?

Bài 5. (**3 điểm**) Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. A là điểm thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

(a) Chứng minh EF có độ dài không đổi. Tìm vị trí của A để diện tích tam giác AEF lớn nhất.

(b) Gọi M là trung điểm BC, tia MH cắt (O) tại P. Chứng minh số đo góc $\angle EPF$ không đổi.

(c) Gọi K là giao điểm của AD với (O). Chứng minh PK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 6. (**1,5 điểm**) Cho 1022 số nguyên dương không nhất thiết phân biệt.

(a) Chứng minh rằng trong các số đã cho có một số hoặc một vài số có tổng chia hết cho 1022.

(b) Nếu tổng của 1022 số này là 2044 và không có số nào bằng 1023 thì từ các số này có thể chọn ra một số hoặc một vài số có tổng đúng bằng 1022.

HẾT

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Bài 1. (**1,5 điểm**) Cho các số $x, y, z > 0$ và $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$. Đặt $a = \frac{y^2 - x^2}{y}, b = \frac{z^2 - x^2}{z}$. Chứng minh

(a) $ab\sqrt{y^2 + z^2} = x^3$ và $ab = (y - a)(z - b)$.

(b) $x \leq \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{2}$.

Lời giải

(a) (**0.5 điểm**) Từ giả thiết ta có: $x^2 = \frac{y^2z^2}{y^2 + z^2}$. Biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned} ab\sqrt{y^2 + z^2} &= \frac{y^2 - x^2}{y} \cdot \frac{z^2 - x^2}{z} \cdot \sqrt{y^2 + z^2} \\ &= (y^2z^2 - x^2(y^2 + z^2) + x^4) \cdot \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{y^2z^2}} \\ &= \left(y^2z^2 - x^2 \cdot \frac{y^2z^2}{x^2} + x^4\right) \sqrt{\frac{1}{x^2}} = x^3. \end{aligned}$$

Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} (y - a)(z - b) &= \left(y - \frac{y^2 - x^2}{y}\right)\left(z - \frac{z^2 - x^2}{z}\right) \\ &= \frac{x^4}{yz} = \frac{x^4}{x\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} = ab. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. (**0.5 điểm**)

(b) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$x^2 = \frac{y^2z^2}{y^2 + z^2} \leq \frac{\left(\frac{y^2 + z^2}{2}\right)^2}{y^2 + z^2} = \frac{y^2 + z^2}{4} \Rightarrow x \leq \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{2}.$$

Hoàn tất chứng minh. (**0.5 điểm**)

Bài 2. (**1,5 điểm**) Cho phương trình $x^2 - (m + 2)x + 2m^2 + 1 = 0$ (m là tham số).

(a) Tìm số tự nhiên m để phương trình có nghiệm.

(b) Nếu phương trình có nghiệm x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x_1 + x_2 - 1}{x_1 \cdot x_2 + 1}.$$

Lời giải

(a) Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(2m^2+1) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{4}{7}.$$

Do đó m nguyên dương thì $m \geq 1$ nên phương trình vô nghiệm. (**0.5 điểm**)

(b) Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $0 \leq m \leq \frac{4}{7}$. Theo định lý Viete, ta có: $x_1 + x_2 = m+2, x_1x_2 = 2m^2+1$. Thay vào biểu thức A, ta được

$$A = \frac{m+1}{2m^2+2}.$$

(**0.5 điểm**) Ta có $0 \leq m \leq \frac{4}{7}$ nên suy ra $m^2 \leq m, m+1 > 0$, vậy nên

$$A = \frac{m+1}{2m^2+2} \leq \frac{m+1}{2m+2} = \frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $m = 0$.
Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{1}{2}$ khi $m = 0$. (**0.5 điểm**)

Bài 3. (**1 điểm**) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x+2 = 4y \ (1) \\ y^2+y+2 = 4z \ (2) \\ z^2+z+2 = 4x \ (3) \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $x^2+x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \Leftrightarrow 4y > 0 \Leftrightarrow y > 0.$
Chứng minh tương tự, ta có: $x > 0, z > 0$
Giả sử $x \neq y$. Nếu $x > y$, từ (1) và (2) suy ra $y > z$, từ (2) và (3) suy ra $z > x$. Mâu thuẫn. Nếu $x < y$, chứng minh tương tự ta có điều mâu thuẫn. Do đó $x = y$
Chứng minh tương tự, ta có $x = y = z$. Dễ dàng tính được $\left[\begin{array}{l} x=y=z=1 \\ x=y=z=2 \end{array}\right.$. (**1 điểm**)

Bài 4. (**1,5 điểm**)

(a) Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa $ab = cd$. Chứng minh rằng $a+b+c+d$ là hợp số.

(b) Có bao nhiêu tập con có 4 phần tử của tập $A = \{2026, 2027, \cdots, 2116\}$ trong đó tích hai số này bằng tích hai số kia?

Lời giải

(a) Gọi m là ƯCLN của a và c. Khi đó:

$$\begin{cases} a = ma_1 \\ c = mc_1 \end{cases} \text{ với } \quad (a_1, c_1) = 1$$

Ta có: $ab = cd \Leftrightarrow ma_1b = mc_1d \Leftrightarrow a_1b = c_1d$
Suy ra $a_1b \,\vdots\, c_1$. Mà $(a_1, c_1) = 1$ nên $b \,\vdots\, c_1$. Đặt $b = nc_1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
$a_1b = c_1d \Leftrightarrow a_1nc_1 = c_1d \Leftrightarrow d = na_1$
Do đó: $a+b+c+d = ma_1 + nc_1 + mc_1 + na_1 = (m+n)(a_1+c_1)$.
Vì $m+n \geq 2$ và $a_1 + c_1 \geq 2$ nên $a+b+c+d$ là hợp số.
Hoàn tất chứng minh. (**0.75 điểm**)

(b) Chọn 4 phần tử $a < b < c < d$ trong A. Giả sử 4 phần tử này thỏa tích hai số này bằng tích hai số kia. Khi đó: $ad = bc$

Ta có:

$$\begin{cases} b = a + x \\ c = a + y \\ d = a + z \end{cases} \text{ với } (a \geq 2026; 0 < x < y < z \leq 90)$$

$$\begin{aligned} ad = bc \Leftrightarrow a(a+z) = (a+x)(a+y) &\Leftrightarrow a^2 + az = a^2 + ax + ay + xy \\ &\Leftrightarrow a(z - x - y) = xy \end{aligned}$$

Suy ra $\begin{cases} a \mid xy \\ z - x - y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq xy \\ x + y \leq z - 1 \leq 89 \end{cases}.$

Do đó: $xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4} \leq \dfrac{89^2}{4} < 1981 \Rightarrow a \leq xy < 1981$. Mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại tập con nào thỏa yêu cầu bài. (**0.75 điểm**)

Bài 5. (**3 điểm**) Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. A là điểm thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

(a) Chứng minh EF có độ dài không đổi. Tìm vị trí của A để diện tích tam giác AEF lớn nhất.

(b) Gọi M là trung điểm BC, tia MH cắt (O) tại P. Tính $\angle APH$.

(c) Gọi K là giao điểm của AD với (O). Chứng minh PK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

(a) Tứ giác $BFEC$ nội tiếp suy ra $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$, ta được $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AE}{AB} = \cos \angle BAC$.

Do đó $EF = BC \cos \angle BAC$. Mà $\angle BAC$ có số đo không đổi và BC cố định nên EF có độ dài không đổi. (**0.5 điểm**)

Ký hiệu S_{XYZ} là diện tích tam giác XYZ.

Ta có $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 \angle BAC$, suy ra $S_{AEF} = S_{ABC} \cdot \cos^2 \angle BAC$.

S_{AEF} lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABC} lớn nhất, khi và chỉ khi A là điểm chính giữa cung lớn BC. (**0.5 điểm**)

Vậy vị trí cần tìm của A là trung điểm cung lớn BC.

(b) Kẻ đường kính AT của đường tròn (O).

$BH \perp AC$ và $TC \perp AC$ nên $BH \parallel TC$, tương tự $CH \parallel TB$ nên $BHCT$ là hình bình hành. Từ đây suy ra HT đi qua M. Vậy $\angle APH = \angle APT = 90°$, khi đó A, E, F, H, P cùng thuộc một đường tròn, (**0.5 điểm**) suy ra $\angle EFP = \angle EAF = \angle BAC$ không đổi. (**0.5 điểm**)

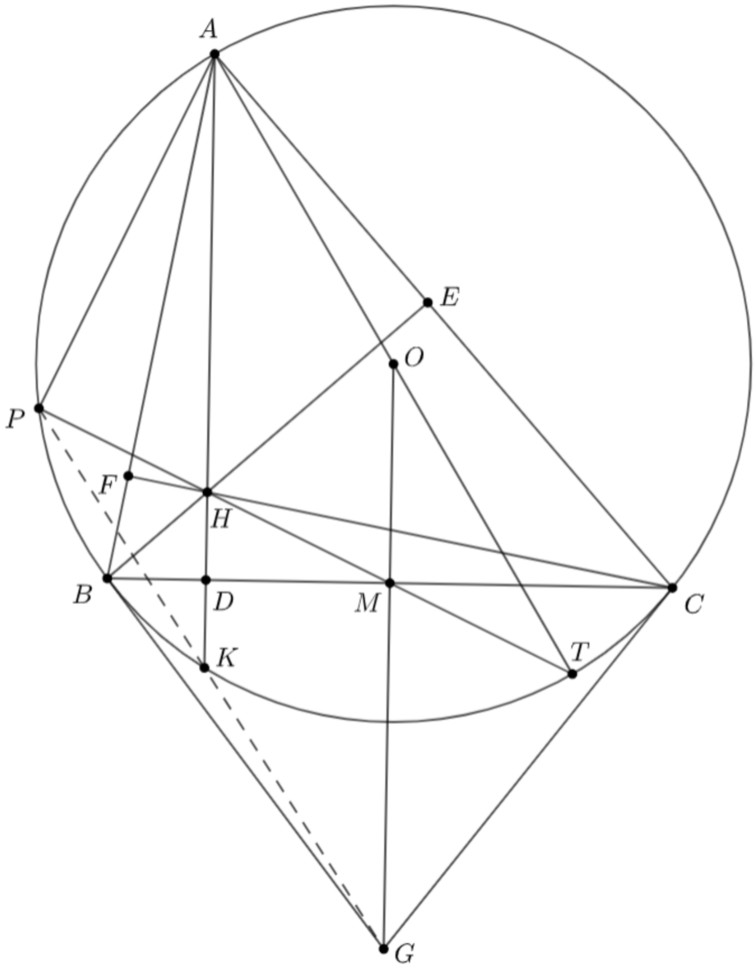
(c) Gọi G là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O).

Ta có $MT \cdot MP = MB \cdot MC = MO \cdot MG$ nên tứ giác $POTG$ nội tiếp. (**0.5 điểm**)

Suy ra

$$\angle GPT = \angle GOT = \angle KAT = \angle KPT.$$

Do đó P, K, G thẳng hàng. Vậy PK luôn đi qua điểm G cố định. (**0.5 điểm**)



Bài 6. (**1,5 điểm**) Cho 1022 số nguyên dương không nhất thiết phân biệt.

(a) Chứng minh rằng trong các số đã cho có một số hoặc một vài số có tổng chia hết cho 1022.

(b) Nếu tổng của 1022 số này là 2044 và không có số nào bằng 1023 thì từ các số này có thể chọn ra một số hoặc một vài số có tổng đúng bằng 1022.

Lời giải

(a) Gọi các số đã cho là $a_1, a_2, \cdots a_{1022}$. Giả sử $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{1022}$.
Đặt $S_k = a_1 + a_2 + \cdots a_k$ $(k \in \{1; 2; 3 \cdots 1022\}$
Có tất cả 1022 tổng S. Nếu trong các tổng này tồn tại một tổng chia hết cho 1022 thì bài toán đã được chứng minh. Giả sử trong 1022 tổng này không có tổng nào chia hết cho 1022. Khi đó số dư các tổng này có thể nhận khi chia cho 1022 là $1, 2, 3, \cdots 1021$. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 2 tổng có cùng số dư khi chia cho 1022. Giả sử 2 tổng này là S_m và S_n $(m < n)$. Ta có:

$$S_n - S_m = a_{m+1} + \cdots a_n \vdots 2022$$

Hoàn tất chứng minh. (**0.75 điểm**)

(b) (**0.75 điểm**) Ta có:

$$\begin{cases} S_{1022} = 2044 \\ S_i < S_{i+1} \quad (i = \overline{1, 1021}) \\ S_{j+1} - S_j \leq S_{j+2} - S_{j+1} \quad (i = \overline{1, 1020}) \quad (*) \end{cases}$$

Giả sử không thể chọn ra một số hoặc một vài số có tổng đúng bằng 1022. Khi đó:

$$\begin{cases} S_i \neq 1022, \quad \forall\ 1 \leq i \leq 1022 \\ S_j - S_i \not\vdots\ 1022, \quad \forall\ 1 \leq i < j \leq 1022 \end{cases}$$

Vì nếu $S_j - S_i \ \vdots\ 1022$ thì $S_j - S_i = a_{i+1} + \cdots + a_j = 1022$ $(0 < S_j - S_i < 2044)$. Mâu thuẫn. Như vậy các tổng S_i $(i = \overline{1, 1022})$ khi chia cho 1022 có số dư đôi một khác nhau. Và các tổng S_j $(j = \overline{1, 1021})$ sẽ nhận các giá trị thuộc $\{1, 2, \cdots 1020, 1021, 1023, 1024, \cdots 2043\}$. Ta chia các giá trị này thành 1021 cặp số $(1; 1023), (2; 1024) \cdots (1021; 2043)$. Mỗi cặp số này đều chứa 2 số có cùng số dư khi chia cho 1022. Do đó tương ứng với mỗi cặp số này sẽ có đúng 1 tổng S_i $(i \in \{1; 2; \cdots 1021\})$ nhận giá trị là 1 trong 2 số của cặp. Kết hợp với điều kiện $(*)$, chỉ có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: $S_i = i, \quad \forall i = \overline{1, 1021}$.
Suy ra $S_{1022} - S_{1021} = a_{1022} = 2044 - 1021 = 1023$. Mâu thuẫn

TH2: $S_i = i + 1022, \quad \forall i = \overline{1, 1021}$. Hiển nhiên $S_1 = 1023$. Mâu thuẫn

Hoàn tất chứng minh.

Cách 2 Ta có $a_{1022} = 2044 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{1021}) \leq 2044 - 1021 = 1023$, mà $a_{1022} \neq 1023$ nên $a_{1022} \leq 1022$, suy ra $a_i \leq 1022$. Xét 1022 số $a_1 - a_{1022}, S_1 = a_n, S_2 = a_1 + a_2, \cdots S_{1021} = a_1 + a_2 + \cdots a_{1021}$.

- Nếu có một số chia hết cho 1022. Khi đó nếu $a_1 - a_{1022}$ chia hết cho 1022 thì $a_1 - a_{1022} = 0$, khi đó 1022 số đều bằng nhau và bằng 2. Từ đó chọn được 511 số có tổng đúng bằng 1022.
  Nếu $a_1 - a_{1022}$ không chia hết cho 1022 thì sẽ có i thỏa S_i chia hết cho 1022 mà $0 < S_i < 2044$ nên $S_i = 1022$ ta có điều cần chứng minh.
- Trường hợp không có số nào chia hết cho 1022 thì có hai số có hiệu chia hết cho 1022, khi đó $S_k - S_i = a_{i+1} + \cdots a_k = 1022$.
  Hoặc $a_1 - a_{1022} = S_i - 1022 \Rightarrow a_2 + \cdots a_i + a_{1022} = 1022$ điều cần chứng minh.