§9. GÓC OLYMPIADOPHOBE

A "BẤT KỲ" KHÔNG PHẢI LÀ "MỌI"

Bộ não của côn trùng vốn dĩ không được thiết kế cho việc tính toán phức tạp. Các thanh ghi vừa ít ỏi lại kém tin cậy, không có khả năng xử lý song song, không có bộ nhớ đệm, còn bộ nhớ RAM (nhớ làm việc) thì cùng lắm chỉ hỗ trợ địa chỉ hóa 4-bit. Thế nhưng, bất chấp mọi rào cản đó, chú gián Kuzka vẫn miệt mài tính toán. Để bù đắp cho những hạn chế của não bộ, cậu đã sử dụng đủ mọi mánh khóe: đếm bằng ngón (hay nói chính xác hơn là bằng chân), dùng các quy tắc nhân nhẩm, và đủ mọi chiêu trò "ảo thuật" tính toán khác.

Quá trình tính toán diễn ra cực kỳ vất vả. Kuzka huơ vung cả sáu cái chân, lúc nghiêng sang phải lúc ngả sang trái, thỉnh thoảng lại lộn nhào một cách kỳ quặc. Có những lúc cậu chạy loanh quanh khắp quán Am-Bar rồi chộp lấy một mẩu phấn, hì hục ghi ghi chép chép xuống sàn nhà.

Nhìn từ bên ngoài, mọi hành động của cậu trông hệt như một điệu múa tế lễ cổ xưa. Busenka, Gorguly và Ogryza đứng nhìn theo đầy mê mẩn.

- Dù các tư thế cứ lặp đi lặp lại, - Busenka lên tiếng nhận xét, - nhưng chuỗi chuyển động này trông vẫn không có vẻ gì là tuần hoàn cả.
- Kể cả nếu có chu kỳ đi chăng nữa, thì chắc chắn chu kỳ đó cũng phải rất lớn, - Ogryza gật gù phụ họa.
- Nhưng rõ ràng là mỗi tư thế đều đã được lặp lại ít nhất một lần, - Gorguly chốt lời.

Kuzka rõ ràng đã hoàn toàn kiệt sức.

- Xong rồi! - cuối cùng Kuzka thở hắt ra một hơi nặng nhọc. - Ra kết quả rồi!
- Ra cái gì cơ?
- Tớ vừa tìm ra được một dấu hiệu chia hết hoàn toàn mới! Chắc chắn các cậu chưa từng thấy bao giờ.
- Cho phép tôi bày tỏ một chút nghi ngờ nhé, - Gorguly lịch sự lên tiếng. - Bàn về các dấu hiệu chia hết thì tôi đã nắm rõ trong lòng bàn tay rồi!
- Vậy thì hãy chuẩn bị mở rộng tầm mắt đi, - Kuzka điệu bộ cúi chào hệt như một nghệ sĩ trên sân khấu. - Xin trân trọng giới thiệu: dấu hiệu chia hết cực kỳ đơn giản, thanh nhã và hiệu quả dành cho số 403!
- Ý cậu là dấu hiệu để nhận biết một số chia hết cho 403 chứ gì? - Gorguly hỏi lại, có phần tò mò.
- Không, không phải là "chia hết cho"! Mà là dấu hiệu chia hết *của* số 403! Sự kỳ diệu nằm ở chỗ đó! Bình thường, người ta cho trước một số x rồi dùng dấu hiệu để kiểm tra xem x có chia hết cho 5 hay 11 hay không. Còn với dấu hiệu của tớ, ta sẽ kiểm tra xem số 403 có chia hết cho x hay không!

- Thế kiểm tra bằng cách nào? - Ogryza sốt ruột hỏi.
- Số 403 sẽ chia hết cho một số tự nhiên có hai chữ số x khi và chỉ khi: tổng các bình phương của hai chữ số tạo nên x bằng đúng 10, - Kuzka tuyên bố với vẻ đầy tự hào.

Cả nhóm khán giả im lặng mất vài giây để tiêu hóa thông tin, rồi đồng loạt vỗ tay rầm rộ.

- Cậu làm tốt lắm, Kuzka, - Ogryza cất lời khen ngợi.
- Tầm mắt của anh sao rồi? - Busenka quay sang hỏi Gorguly. - Đã được mở rộng chưa?
- Cảm ơn cô, mở rộng lắm rồi, - Gorguly đáp. - Từ bé đến giờ tôi chưa từng chứng kiến thứ gì giống như vậy. Thật sự quá ấn tượng. Nhưng điều khiến tôi bái phục nhất lại là điệu múa ba-lê nhào lộn mà cậu ấy đã biểu diễn để đúc kết ra được cái dấu hiệu đó.
- Đương nhiên, không hề dễ chút nào, - Kuzka hãnh diện đồng tình. - Hơn nữa, trong lúc tớ đang tập trung tính toán, các cậu cứ đứng ngoài thì thầm to nhỏ mãi, làm tớ mất tập trung lắm đấy.
- Bọn tớ chỉ đang trầm trồ thán phục thôi mà, - Busenka vội giải thích, - với cả, bọn tớ còn đang bàn luận xem chuỗi chuyển động của cậu có tính tuần hoàn hay không.
- Chuỗi nào cơ?
- Nếu ta xét dãy các tư thế của cậu, ký hiệu là x_n. Chẳng hạn, theo những gì tớ nhớ thì...

$x_1 =$, $x_2 =$, $x_3 =$, $\ldots$

Tớ nhận ra rằng các tư thế của cậu liên tục lặp lại, viết theo ngôn ngữ logic toán học ngắn gọn thì là:

$$\forall k\ \exists n\ x_k = x_{k+n}.$$

- Mấy cái ký hiệu tượng hình này nghĩa là gì thế? - Kuzka thắc mắc.
- Đó là các lượng từ trong logic. Ký hiệu "$\forall$" đọc là "với mọi"; còn "$\exists$" đọc là "tồn tại". Cả mệnh đề đó sẽ được đọc là: với mọi số k, tồn tại một số n sao cho $x_k = x_{k+n}$.
- Câu thần chú đó rốt cuộc có ý nghĩa gì?
- Đơn giản là thế này nhé: cậu chọn lấy một số k bất kỳ...
- "Bất kỳ" là cụ thể số nào cơ chứ? Và lấy ở đâu ra? - Kuzka vẫn tỏ vẻ không hiểu.
- Cứ lấy trong ngăn kéo của tớ chẳng hạn, - Ogryza lên tiếng, - trong đó tớ cất cả đống số "bất kỳ" đấy. Đây này. - Ogryza lấy ra một chiếc hộp màu xanh, trên nắp hộp có đính kèm một chiếc phong bì nhỏ. Cô xé lớp vỏ phong bì rồi đưa nó cho Kuzka.

- Để tớ xem nào, - Kuzka hào hứng nói, - trong này chứa cái gì đây... Số 31! Ra vậy, 31 chính là một số bất kỳ à?
- Cũng không hoàn toàn là thế... Nhưng ít nhất nó là một đại diện cho các số "bất kỳ"! Để làm ví dụ thì ta có thể chọn số 31, nhưng về nguyên tắc, bất cứ con số nào khác cũng đều có quyền được đưa ra xem xét.
- Làm sao có thể xét hết tất cả mọi số được cơ chứ?
- Phương pháp là ta chọn ra một số đại diện, gọi nó là k, sau đó tiến hành lập luận mà không sử dụng bất kỳ tính chất đặc thù riêng biệt nào của số k đó. Khi làm như vậy, lập luận của chúng ta sẽ tự động đúng với mọi con số khác.
- Nói cách khác, nếu thích thì tớ có thể chọn $k = 31$, nhưng trong quá trình lập luận, tớ không được phép sử dụng dữ kiện nó chính xác là số 31?
- Hoàn toàn chính xác, - Gorguly tán thành, - ví dụ như cậu không được phép sử dụng tính chất "tổng bình phương các chữ số của nó bằng 10" vào trong lập luận.
- Nghe vẫn trừu tượng quá. Thôi bỏ qua đi. Tiếp theo là đoạn "tồn tại số n..." - Kuzka đọc lại câu nói khi nãy. - Thế thì con số ấy tồn tại ở đâu?
- Nó tồn tại ngay ở đây này, bên trong chiếc hộp màu xanh, - Ogryza đáp và đẩy chiếc hộp về phía Kuzka.
- Cậu chắc chắn đây đúng là con số đó chứ? - Kuzka hỏi với vẻ bán tín bán nghi.
- Chính nó đấy, - Ogryza xác nhận, - chiếc hộp này được thiết kế đi liền với chiếc phong bì chứa số k mà cậu vừa lấy.
- Được rồi, để tớ mở ra xem sao, - Kuzka cẩn thận hé mở nắp hộp.

Đột nhiên, "con số" lập tức bật tung ra khỏi hộp, nhảy vọt xuống sàn nhà, ngo ngoe mấy chục cái chân mỏng dính trông vô cùng buồn cười. Nó chạy thục mạng về phía góc phòng rồi chui tọt vào một cái khe hẹp dưới chân tường.

- Ái chà! - Kuzka giật mình kêu lên. - Có ai trong số các cậu kịp nhìn rõ đó là số mấy không?
- Tôi chịu, không nhìn kịp, - Gorguly đáp.
- Tớ cũng thế, - Busenka lắc đầu.
- Thế thì làm sao chúng ta sử dụng được con số này trong tính toán nếu thậm chí còn chẳng biết nó có giá trị bằng bao nhiêu?
- Quan tâm giá trị của nó làm gì cơ chứ? Điểm mấu chốt ở đây là con số đó có tồn tại, - Busenka giải thích.
- Nhưng tóm lại là nó tồn tại ở đâu?

- Ở đâu là ở đâu chứ? Ban đầu thì nó tồn tại ở bên trong chiếc hộp. Còn bây giờ thì nó đang tồn tại ở dưới chân tường kia kìa! Sự tồn tại của nó là điều hiển nhiên, chỉ là chúng ta không biết giá trị cụ thể của nó thôi. À, mà cậu cũng cần lưu ý rằng số n này là "hàng đính kèm" chỉ dành riêng cho số $k = 31$ thôi nhé. Nếu cậu chọn một số k khác, thì rất có khả năng cậu sẽ nhận được một số n hoàn toàn khác.

- Nghĩa là nó sống trong một chiếc hộp khác chứ gì, - Kuzka lẩm bẩm phỏng đoán. - Nhưng việc "k khác sẽ kéo theo n khác" có quan trọng đến mức đó không, trong khi đằng nào thì chúng ta cũng chẳng hề biết giá trị cụ thể của n bằng bao nhiêu?

- Cậu vẫn nên tập hình dung rõ ràng về mối quan hệ đó. Hãy lấy ví dụ, nếu số n này là một giá trị cố định và sử dụng chung cho mọi số k, thì ta hoàn toàn có thể kết luận rằng dãy số đó là một dãy tuần hoàn. Được viết dưới ngôn ngữ logic toán học là:

$$\exists n\ \forall k\ x_k = x_{k+n}.$$

- So với cái mệnh đề ban đầu, cậu chỉ việc đảo ngược thứ tự hai chữ thôi mà, - Kuzka nhận xét. - Giống hệt như việc nói "Mỗi con gián đều có một thói quen ngoáy râu" hay "Tồn tại một thói quen ngoáy râu mà mọi con gián đều có". Chúng có khác gì nhau đâu chứ?

- Đừng vội vàng đơn giản hóa vấn đề như vậy. Hai mệnh đề của chúng ta mang ý nghĩa khác nhau hoàn toàn, - Busenka nghiêm túc nói. - Cậu hoàn toàn có thể tự mình kiểm tra sự khác biệt đó mà.

- Tớ á? Cậu bắt tớ tự kiểm tra á? Tớ chỉ là một con côn trùng nhỏ bé mỏng manh thôi, sao cậu nỡ bắt tớ phải làm những việc nặng nhọc như vậy... - Kuzka giả vờ than vãn, nhưng lời rên rỉ còn chưa kịp dứt, cậu đã đột ngột dựng đứng cặp râu lên với vẻ đầy khí thế: - Được thôi, tớ sẽ tự kiểm tra cho các cậu xem!

Khảo sát Mệnh đề 1:

$$\forall k\ \exists n\ x_k = x_{k+n}.$$

Mệnh đề này có nghĩa là: nếu ta chọn một số k bất kỳ, ví dụ lấy $k = 31$, thì bên trong chiếc hộp đi kèm của Ogryza sẽ xuất hiện một số n nào đó sao cho tư thế ở bước thứ 31 (x_{31}) sẽ hoàn toàn trùng khớp với tư thế ở bước thứ $31 + n$ (x_{31+n}). Nói một cách dễ hiểu là tư thế x_{31} chắc chắn sẽ được lặp lại trong tương lai! Và vì điều kiện này đúng với mọi số k bất kỳ chứ không chỉ riêng số 31, ta có thể kết luận: mọi tư thế đều sẽ được lặp lại tại một thời điểm nào đó trong tương lai!
Chuyển sang Mệnh đề 2:

$$\exists n\ \forall k\ x_k = x_{k+n}.$$

Mệnh đề này phát biểu rằng: tồn tại sẵn một khoảng cách n cố định (mặc dù hiện tại ta không biết chính xác n bằng bao nhiêu do nó đã chạy tót xuống gầm chân tường rồi), và với chính khoảng cách n cố định này, tại mọi thời điểm k bất kỳ, tư thế x_k đều sẽ lặp lại ở bước x_{k+n}. Vậy ở trường hợp này, toàn bộ các tư thế không chỉ lặp lại, mà chúng còn lặp lại theo một chu kỳ tuần hoàn cố định mãi mãi!

Vậy nếu ta thử thay đổi bằng các lượng từ khác thì sao nhỉ? Chẳng hạn như tạo ra Mệnh đề 3:

$$\forall k\ \forall n\ x_k = x_{k+n}.$$

Mệnh đề này có nghĩa là: cho dù bạn có chọn số k nào đi chăng nữa, và kết hợp với bất kỳ khoảng cách n nào đi chăng nữa, thì tư thế x_k luôn luôn giống hệt tư thế x_{k+n}. Tức là tớ chẳng làm gì khác ngoài việc giữ nguyên đúng một tư thế!
Busenka, Gorguly và Ogryza trố mắt ngạc nhiên nhìn Kuzka. Còn Kuzka lúc này dường như đang "lên đồng", hăng say hùng biện không ngừng nghỉ.

- Mọi người cứ thích làm ra vẻ khoa học nguy hiểm với mấy cái ký hiệu toán học ngoằn ngoèo, trong khi bản chất của vấn đề thì có khác gì nhau đâu cơ chứ! Thế tớ hỏi các cậu, nếu ta tiếp tục đổi chỗ hai lượng từ ở mệnh đề vừa rồi thì sao? Ta sẽ có Mệnh đề 4:

  $$\forall n\ \forall k\ x_k = x_{k+n}.$$

  Nó sẽ có ý nghĩa là...

- Khi hai lượng từ "với mọi" đứng liền kề nhau, cậu có thể đổi chỗ chúng thoải mái! - Ogryza vội vàng lên tiếng ngắt lời để ngăn cậu bạn đang quá hưng phấn. - Ý nghĩa của chúng vẫn giống y hệt nhau thôi.

- Ví dụ thế này nhé: "Trong mọi tầng hầm, mỗi một con chuột đều sở hữu một kho phô mai của riêng mình." Đúng không nào?

- Nghe rất hợp lý, - Ogryza gật đầu.

- Thế bây giờ tớ thử đổi chỗ nhé: "Mỗi một con chuột, ở trong mọi tầng hầm, đều sở hữu một kho phô mai." Ví dụ như khu vực tầng hầm nhà Zlobnopotam chỉ có đúng một cái két sắt. Thế cậu định cất phô mai của cậu vào trong cái két sắt đó à?

- Đương nhiên là không rồi, - Ogryza gãi đầu bối rối, - phô mai nặng mùi như thế, Zlobnopotam sẽ đánh hơi thấy và phát hiện ra ngay lập tức.

- Đấy, các cậu thấy chưa! - Kuzka đưa mắt nhìn quanh mọi người với vẻ đầy trách móc. - Chỉ vì dính vào mấy cái khái niệm lượng từ linh tinh rắc rối này mà suýt chút nữa là tớ đã đánh mất dấu hiệu chia hết tuyệt vời mà mình vừa tìm ra! Nói thật nhé, côn trùng chúng ta sống rất đơn giản, hoàn toàn chẳng cần đến mấy cái lượng từ làm gì! Tớ ghét lượng từ!

Ngay tại đỉnh điểm của màn diễn thuyết đầy cảm xúc ấy, Kuzka còn chưa kịp nổi giận cho thỏa thích thì bỗng nhiên cậu ngáp dài một cái, cơ thể từ từ trượt xuống, tựa hẳn lưng vào bức tường và nhanh chóng ngủ lịm đi.

- Đúng là bắt cậu nhóc làm việc quá sức rồi, - Ogryza khẽ chép miệng tỏ vẻ không hài lòng. - Bắt hai cái lượng từ chui vào trong cái đầu nhỏ bé của cậu ấy đã là một kỳ tích, mà chúng có trụ lại trong đó được lâu đâu cơ chứ.

Busenka đi tìm đâu đó được một chiếc lá cỏ ba lá mềm mại rồi nhẹ nhàng lót xuống dưới đầu để Kuzka gối lên.

- Mà tiện thể cho tôi hỏi, mấy cái hộp và phong bì kỳ diệu lúc nãy cô lấy ra thực chất là cái gì vậy? - Gorguly quay sang tò mò hỏi Ogryza.
- À, mấy thứ đó... Số là tối nay ở quán Am-Bar, tớ có tổ chức một chương trình quay xổ số 100% trúng thưởng. Cái hộp lúc nãy chính là một trong những phần thưởng của chương trình, và theo đúng kịch bản thì người giữ tấm vé số 31 sẽ quay trúng nó. Bên trong hộp chứa một con rết thuộc họ Symphyla: cơ thể có 24 chân, hệ hô hấp bằng khí quản, trông oai phong lẫm liệt y hệt như một con chiến mã thực thụ vậy!
- Ừ, công nhận là con vật đó trông ngầu thật đấy, - Gorguly gật gù đồng tình, - nhưng điều tôi thắc mắc là: con rết đó thì liên quan gì đến mấy khái niệm toán học nãy giờ?
- Thật ra thì chẳng có mối liên hệ nào cả. Nhưng anh phải công nhận là, để vào vai ẩn số n chạy trốn, nó đã có một màn diễn xuất vô cùng thiên tài!