

NGUYỄN TĂNG VŨ

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC LỚP 9
Bồi dưỡng học sinh năng khiếu

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời giới thiệu

"Đây là một tuyển tập gồm đầy đủ các chủ đề quan trọng của hình học lớp 9 dành cho các bạn học sinh chuẩn bị thi vào các trường trung học phổ thông (THPT) chuyên. Cuốn sách được viết với văn phong nhẹ nhàng, ngắn gọn, ví dụ và bài tập được chọn lọc cẩn thận để minh họa tốt nhất cho các phương pháp giải toán cơ bản ở từng chủ đề. Ở đầu mỗi chủ đề đều có phần dẫn nhập về phương pháp chung, một số kiến thức cơ bản liên quan, cuối mỗi chủ đề là phần bài tập phong phú để học sinh có thể tự luyện. Đây là một định hướng rất quan trọng, vì các bạn học sinh sẽ chỉ thực sự nắm bắt được các phương pháp, hiểu sâu vấn đề khi tự mình làm bài. Tôi đánh giá cao nội dung cuốn sách, một sản phẩm tâm huyết của tác giả Nguyễn Tăng Vũ. Đây sẽ là một tài liệu rất phù hợp cho các bạn học sinh muốn chinh phục cánh cửa các trường chuyên. Cuốn sách cũng sẽ rất bổ ích cho các bạn học sinh lớp 10 chuyên toán và các thầy cô giáo dạy lớp 9, 10."

TS. Trần Nam Dũng
Trường Phổ thông Năng khiếu - ĐHQG TP.HCM

"Cấu trúc sách khác với các quyển sách Hình học hiện nay. Bài tập đa dạng, phong phú phù hợp với học sinh khá giỏi bậc trung học cơ sở (THCS). Quyển sách còn là tài liệu tham khảo thiết thực cho các bậc phụ huynh học sinh yêu thích toán THCS, sinh viên các trường Sư phạm, giáo viên Toán bậc THCS."

Thầy Nguyễn Đức Tấn
Giáo viên chuyên Toán tại TP.HCM

Dành tặng vợ Bảo Trân và các con Si Rô Bale

Lời nói đầu

Hình học luôn là một trong những đề tài khó và hấp dẫn đối với học sinh và giáo viên yêu thích môn toán. Hơn nữa để đạt các kết quả tốt trong các kì thi học sinh giỏi và kì thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán, các em học sinh cần phải làm tốt bài hình học vì nó chiếm một vị trí khá quan trọng trong đề thi. Để giúp các em học sinh và bạn đọc có một cuốn sách hình học tham khảo tốt, xin giới thiệu đến bạn đọc cuốn sách "Các chuyên đề hình học 9 - Bồi dưỡng học sinh năng khiếu".

Cuốn sách này bao gồm 10 chương. Chương 1, 2, 3 trình bày các bài toán cơ bản, các mô hình quen thuộc trong chương trình THCS, để thực sự giỏi toán hình học chúng ta cũng nên nắm chắc các bài toán này, từ đó trang bị cho mình một nền kiến thức cơ bản tốt. Chương 4, 5 trình bày các vấn đề về thẳng hàng và đồng quy, đây cũng chính là các câu hỏi thường gặp nhất trong bài toán hình học. Chương 6, 7, 8 trình bày các vấn đề khó hơn liên quan đến yếu tố thay đổi, đây là dạng toán khó cần phải nắm chắc các phương pháp suy luận và cũng nắm chắc các kiến thức ở các chương trước. Chương 9 là các bài toán tổng hợp, được lấy từ đề thi học sinh giỏi, đề thi tuyển sinh vào 10 của các trường chuyên lớn trong cả nước. Đây là chương để vận dụng tất cả những kiến thức đã học ở các chương trước, cũng là chương để kiểm tra năng lực hình học của học sinh. Chương 10 được xem như phần phụ lục nhằm giới thiệu một số kì thi hình học quốc tế mà học sinh Việt Nam có thể tham gia được. Cuối cùng là phần gợi ý vấn tắt cho các bài tập, các em dựa vào đó để đi tìm lời giải các bài tập khó.

Một số tính chất hay định lí phức tạp và ứng dụng của nó sẽ không được nêu trong sách này vì với các em học sinh THCS điều đó cũng chưa thật sự cần thiết, các bài toán giải bằng phương pháp mạnh một cách dễ dàng cũng không được đưa vào tài liệu để giữ gìn tư duy trong sáng cho các em học sinh THCS.

Cùng với sách tham khảo này là website về hình học do chính tác giả thành lập www.toanviet.net. Các bạn có thể vào website để xem bài giảng, bài tập và các đề thi. Vì đang xây dựng nên trang web còn thiếu sót khá nhiều, tuy vậy cũng giúp ích được phần nào cho các bạn không có điều kiện đi học thêm.

Vì viết trong thời gian ngắn nên cũng không tránh được những thiếu sót, hy vọng bạn đọc lượng thứ và đóng góp nhiệt tình để cho các lần tái bản sau được hoàn thiện hơn. Mọi thắc mắc xin liên hệ email: nguyentangvu@gmail.com.

Cuối cùng, xin chân thành cảm ơn thầy Nguyễn Đức Tấn, TS. Trần Nam Dũng đã đọc bản thảo và đóng góp ý kiến quý báu cho tác giả. Cảm ơn các bạn Lê Phúc Lữ, Nguyễn Tiến Hoàng và một số bạn giáo viên trẻ tại Star Education đã đóng góp các bài toán và phát hiện nhiều lỗi đánh máy để sản phẩm được hoàn thiện hơn.

NGUYỄN TĂNG VŨ

Mục lục

Chương 1. Các điểm thẳng hàng	8
1.1 Định lí Menelaus	8
1.2 Phương pháp góc bù	12
1.3 Kỹ thuật hình duy nhất	14
1.3.1 Chứng minh tia hoặc đường thẳng trùng nhau	14
1.3.2 Chứng minh các điểm trùng nhau	17
1.4 Các trường hợp đặc biệt khác	20
1.5 Bài tập tự luyện	24
Gợi ý giải một số bài tập	26

Chương 1

Các điểm thẳng hàng

Chứng minh các điểm thẳng hàng là dạng câu hỏi thường gặp nhất trong các bài toán hình học. Nhìn lại trong quá khứ, sự phát triển của Hình học phẳng là việc phát hiện ra những kết quả đẹp mà ở đây là các đường thẳng: đường thẳng Euler, đường thẳng Simson, ...

Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta có rất nhiều phương pháp mà một trong số đó, thường thấy nhất chính là định lí Menelaus. Ngoài ra, một phương pháp hay sử dụng là biến đổi góc hoặc sử dụng các tia trùng nhau. Trong chương này ta sẽ tìm hiểu một số phương pháp và các bài toán thẳng hàng thường gặp.

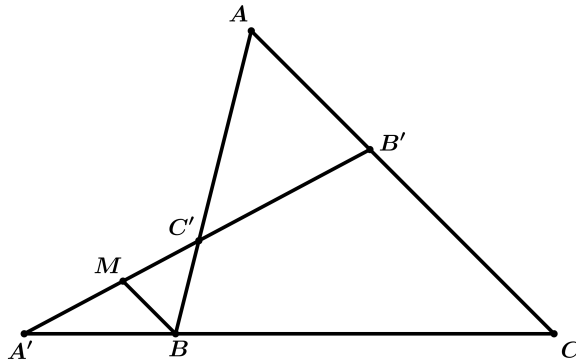
1.1 Định lí Menelaus

Định lí Menelaus trong phần này chỉ được trình bày dưới dạng hình học, các dạng đại số và lượng giác sẽ được tìm hiểu rõ hơn trong chương trình trung học phổ thông, vì thế việc chứng minh có khi phụ thuộc vào hình vẽ.

Định lí 1.1.1 Cho tam giác ABC và ba điểm A', B', C' trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB sao cho: hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm đó nằm trên phần kéo dài của một cạnh còn hai điểm kia nằm trên hai cạnh của tam giác. Điều kiện cần và đủ để A', B', C' thẳng hàng là hệ thức:

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1 \quad (1.1)$$

Lời giải.



Ta phải chứng minh rằng (với điều kiện đã cho về các điểm A', B', C'): A', B', C' thẳng hàng $\Leftrightarrow (1.1)$.

a) Điều kiện cần. Ta chứng minh A', B', C' thẳng hàng $\Rightarrow (1.1)$

Xét trường hợp hai điểm (B', C') nằm trên hai cạnh của tam giác, còn A' nằm trên phần kéo dài của BC .

Từ B , kẻ đường thẳng song song với AC , cắt đường thẳng $A'B'$ tại M .

Ta có: $\frac{CA'}{A'B} = \frac{B'C}{BM}$ và $\frac{BC'}{C'A} = \frac{BM}{AB'}$.

Nhân vế với vế hai đẳng thức trên, ta được: $\frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = \frac{B'C}{AB'}$.

Hay: $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$. (1)

b) Điều kiện đủ. Ta phải chứng minh $(1.1) \Rightarrow A', B', C'$ thẳng hàng.

Giả sử B', C' nằm trên hai cạnh của tam giác, còn A' nằm trên phần kéo dài của BC , và có hệ thức (1.1).

Nếu C' thuộc đoạn $A'B'$, và $A'B'$ cắt AB tại C'' thì, theo điều kiện cần.

Ta có: $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC''}{C''A} = 1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{BC'}{C'A} = \frac{BC''}{C''A}$

Vậy $C'' \equiv C'$ (do C' và C'' đều nằm trong đoạn thẳng AB) hay ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

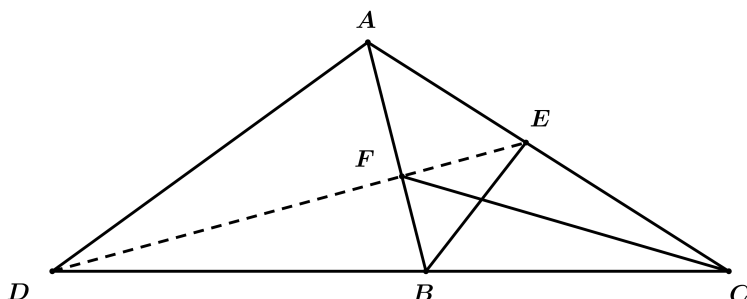
Trường hợp cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh của tam giác chứng minh tương tự. ■

Định lí Menelaus cho ta một tiêu chuẩn để chứng minh thẳng hàng, ta chỉ cần chứng minh bộ ba điểm thỏa mãn điều kiện 1.1. Hơn nữa ta thấy rằng điều kiện này liên quan đến tỉ số các độ dài, do vậy việc tính toán trên độ dài đoạn thẳng sẽ là yếu tố quyết định trong phần này.

Sau đây là một số ứng dụng của định lí Menelaus trong việc chứng minh các bài toán về các điểm thẳng hàng.

Bài 1.1. Chứng minh rằng trong một tam giác, chân các đường phân giác trong của hai góc và chân của đường phân giác ngoài của góc thứ ba cùng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải.



Giả sử các đường phân giác trong góc B, C là BE, CF và phân giác ngoài góc A là AD . Khi đó D nằm ngoài đoạn BC , E, F thuộc các đoạn AC, AB .

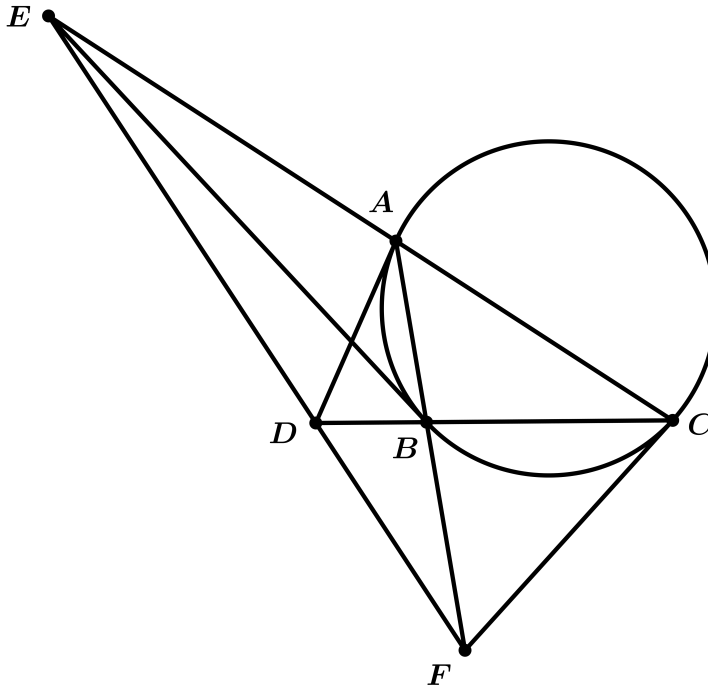
$$\text{Ta có } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}, \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB}, \frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BC}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1.$$

Theo định lí Menelaus thì D, E, F thẳng hàng. ■

Bài 1.2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại D ; tiếp tuyến tại B cắt AC tại E ; tiếp tuyến tại C cắt AB tại F . Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có $\triangle DAB \sim \triangle DCA$. Suy ra $\frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

$$\text{Nên } \frac{DB}{DC} = \frac{DB}{DA} \cdot \frac{DA}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}. \quad (1)$$

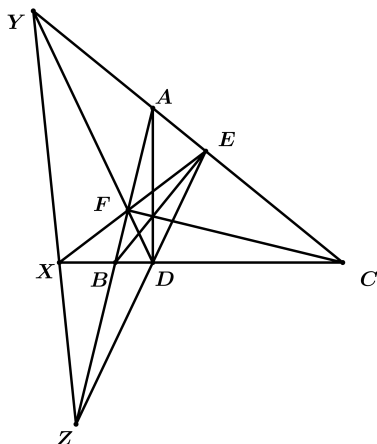
$$\text{Tương tự } \frac{EC}{EA} = \frac{AC^2}{BC^2}, \frac{FA}{FB} = \frac{BC^2}{AB^2}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1.$$

Do đó D, E, F thẳng hàng. ■

Bài 1.3. Cho tam giác ABC nhọn khác tam giác đều, các đường cao AD, BE, CF . Gọi X là giao điểm của EF và BC ; Y, Z được xác định tương tự. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

Lời giải.



Các tứ giác $AFDC, ABDE$ nội tiếp. Suy ra $\angle BDF = \angle BAC = \angle CDE$.

Hơn nữa $AD \perp BC$ nên DX là phân giác ngoài của $\angle EDF$.

Chứng minh tương tự EY, FZ là phân giác ngoài của góc $\angle DEF$ và $\angle DFE$.

Tam giác DEF có X, Y, Z lần lượt là chân đường phân giác ngoài của tam giác DEF .

Áp dụng Menelaus cho tam giác DEF thì X, Y, Z thẳng hàng. ■

1.2 Phương pháp góc bù

Giả sử cần chứng minh A, B, C theo thứ tự thẳng hàng.

- Nếu có tia Bx nằm giữa hai tia BA, BC thì A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\angle ABx + \angle CBx = 180^\circ$.
- Nếu có tia Ax sao cho AB, AC cùng phía đối với Ax thì A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\angle xAB = \angle xAC$.

Một trong những ví dụ cho phương pháp này là bài toán về đường thẳng Simson trong chương 3. Sau đây ta xét một số ví dụ khác.

Bài 1.4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại điểm P khác A . Đường thẳng AP cắt BC tại K . Chứng minh K, E, D thẳng hàng.

Lời giải.

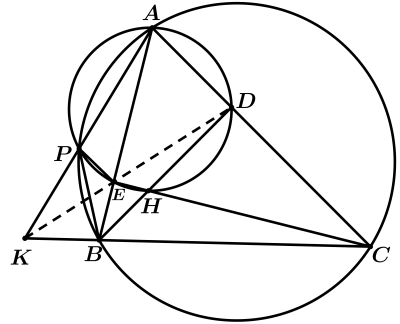
Giả sử ta có hình như hình vẽ. Các trường hợp khác làm tương tự.

Ta có $APED, BEDC$ là các tứ giác nội tiếp nên $\angle APE = \angle EDC = \angle KBE$. Suy ra $KPEB$ nội tiếp.

Vậy $\angle PEK = \angle PBK = \angle PAD = 180^\circ - \angle PED$.

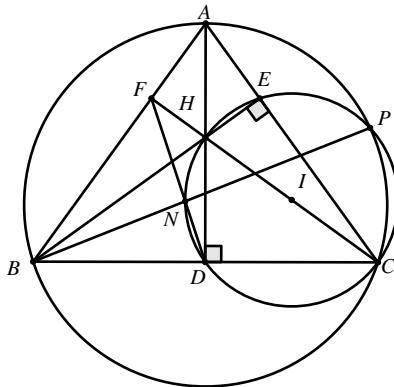
Do đó $\angle PEK + \angle PED = 180^\circ$.

Suy ra K, E, D thẳng hàng. ■



Bài 1.5. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn w . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường tròn tâm I đường kính CH cắt w tại điểm P khác C . Đường thẳng BP cắt (I) tại N . Chứng minh rằng F, D, N thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có $BD \cdot BC = BN \cdot BP$ và $BD \cdot BC = BF \cdot BA$, suy ra $BN \cdot BP = BF \cdot BA$.

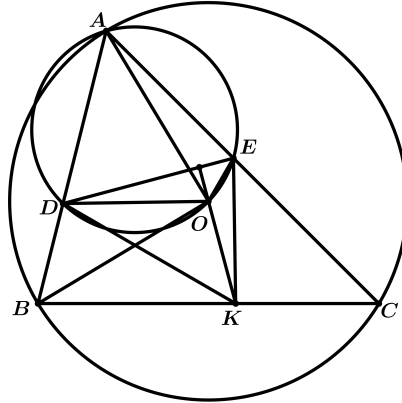
Do đó tứ giác $AFNP$ nội tiếp, suy ra $\angle BNF = \angle BAP$. (1)

Mà $\angle BAP = \angle BCP = \angle BND$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\angle BNF = \angle BND$. Vậy F, D, N thẳng hàng. ■

Bài 1.6. Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn thay đổi qua A và O cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E . Gọi K là trực tâm tam giác ODE . Chứng minh B, K, C thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có $\angle OKD = \angle OED = \angle OAD = \angle OBD$. Suy ra $ODBK$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $OECK$ nội tiếp.

Khi đó $\angle OKB = \angle ODA = \angle OEC$ và $\angle OEC + \angle OKC = 180^\circ$

Nên $\angle OKB + \angle OKC = 180^\circ$.

Suy ra B, K, C thẳng hàng. ■

1.3 Kỹ thuật hình duy nhất

1.3.1 Chứng minh tia hoặc đường thẳng trùng nhau

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta có thể sử dụng cách chứng minh hai đường thẳng hoặc hai tia AB, AC trùng nhau. Theo phương pháp này, có nhiều cách để tiếp cận như:

- Cùng vuông góc hoặc song song với một đường thẳng khác.
- Cùng là phân giác của một góc.
- Cùng là trung tuyến của tam giác.

Sau đây ta xét một số bài tập áp dụng phương pháp này.

Bài 1.7. Cho tam giác ABC , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các đường thẳng AB, BE, CF, AC . Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường thẳng.

Lời giải.

Áp dụng định lí Thales, ta có: $\frac{BM}{BF} = \frac{BD}{BC} = \frac{BN}{BE}$

Suy ra $MN \parallel EF$. (1)

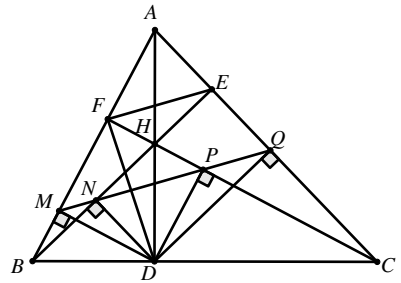
Ta có $HNDP$ và $AFHE$ nội tiếp nên suy ra $\angle HNP = \angle HDP = \angle HAF = \angle HEF$.

Suy ra $NP \parallel EF$. (2)

Từ (1) và (2) ta có M, N, P thẳng hàng.

Tương tự ta cũng có Q, N, P thẳng hàng.

Vậy bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường thẳng. ■



Bài 1.8. Cho tam giác ABC , các đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Phân giác góc $\angle ABH$ và $\angle ACH$ cắt nhau tại K . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH, BC . Chứng minh M, K, N thẳng hàng.

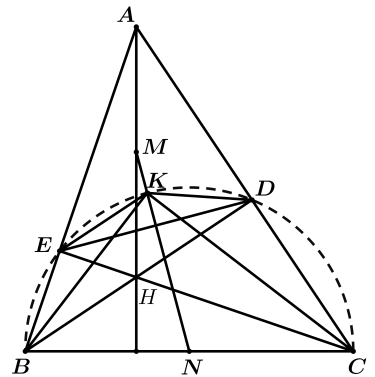
Lời giải.

Ta chứng minh được 5 điểm B, C, D, E, K cùng thuộc đường tròn đường kính BC .

Do BK là phân giác góc $\angle ABH$ nên $KD = KE$. (1)

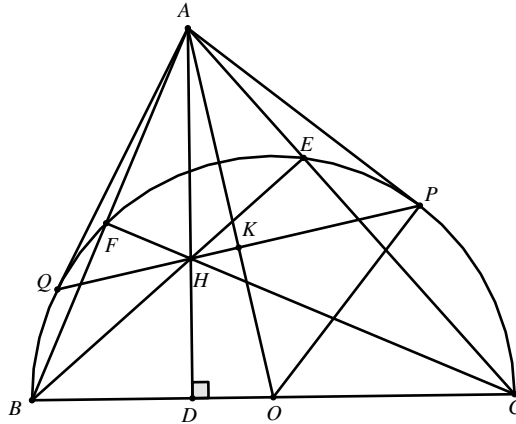
Ta cũng có $ND = NE = \frac{1}{2}BC$ và $MD = ME$. (2)

Từ (1) và (2) ta có M, K, N cùng thuộc trung trực của DE nên thẳng hàng. ■



Bài 1.9. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H . Từ A vẽ các tiếp tuyến AP và AQ đến đường tròn đường kính BC (P, Q là các tiếp điểm). Chứng minh P, H, Q thẳng hàng.

Lời giải.



Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC và O là tâm đường tròn đường kính BC .

Đường thẳng AO cắt đường thẳng HP tại K .

Dễ thấy $OA \perp PQ$. (1)

Ta chứng minh được $AP^2 = AE \cdot AC = AH \cdot AD$.

Suy ra $\triangle APH \sim \triangle ADP$ và $\angle AHP = \angle APD$.

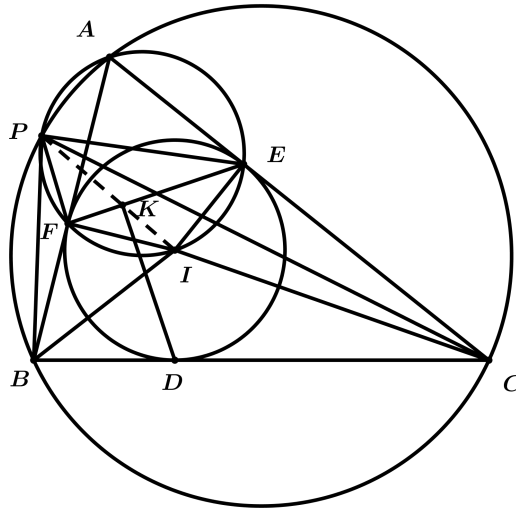
Mặt khác $OPAD$ nội tiếp nên $\angle APD = \angle AOD$.

Do đó tứ giác $ODHK$ nội tiếp nên $\angle OKH = 90^\circ$ hay $OA \perp HP$. (2)

Từ (1) và (2) ta có P, H, Q thẳng hàng. ■

Bài 1.10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại P . Vẽ $DK \perp EF$ với K thuộc EF . Chứng minh P, K, I thẳng hàng.

Lời giải.



Ta chứng minh được KD là phân giác góc $\angle BKC$.

Từ đó suy ra $\triangle FKB \sim \triangle EKC$. Do đó $\frac{FK}{EK} = \frac{FB}{EC}$.

Mặt khác ta có $\triangle PFB \sim \triangle PEC$ nên $\frac{PF}{PE} = \frac{FB}{EC} = \frac{FK}{EK}$.

Do đó PK là phân giác góc $\angle EPF$. (1)

Lại có tứ giác $PEIF$ nội tiếp có $IE = IF$ nên PI là phân giác $\angle EPF$. (2)

Từ (1) và (2) ta có P, K, I thẳng hàng. ■

1.3.2 Chứng minh các điểm trùng nhau

Cùng kĩ thuật chứng minh như trên, ta có thể sử dụng “phương pháp điểm trùng”, phương pháp này hay được sử dụng để chứng minh các bài toán phát biểu ngược.

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta dựng điểm C' sao cho A, B, C' thẳng hàng, sau đó chứng minh C trùng C' .

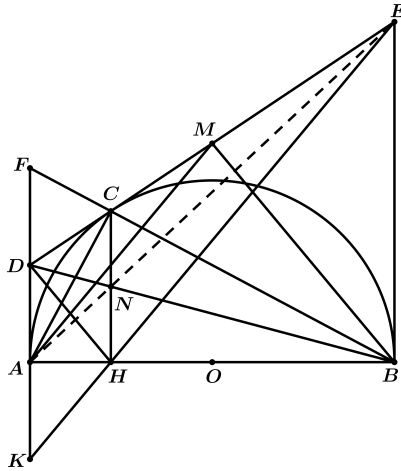
Việc chứng minh C trùng C' thường xuất phát từ sự xác định duy nhất của điểm C có thể là giao của hai đường, trung điểm đoạn thẳng....

Bài 1.11. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C bất kỳ thuộc đường tròn. Tiếp tuyến tại C cắt tiếp tuyến tại A, B của (O) lần lượt tại D, E . Gọi H là hình chiếu của C trên AB .

a) DB cắt CH tại N . Chứng minh A, N, E thẳng hàng.

b) Đường thẳng qua A song song HE và đường thẳng qua B song song với HD cắt nhau tại M . Chứng minh D, M, E thẳng hàng.

Lời giải.



a) Giả sử BC cắt AD tại F , ta chứng minh được D là trung điểm của AF .

$$\text{Khi đó } \frac{CN}{DF} = \frac{BN}{BD} = \frac{HN}{AD}.$$

Mà $AD = DF$, suy ra $CN = HN$ hay N là trung điểm của CH .

Gọi N' là giao điểm của AE và CH .

Chứng minh tương tự ta cũng có N' là trung điểm của CH . Do đó $N \equiv N'$ hay A, N, E thẳng hàng.

b) Phân tích: vẽ hình chính xác và trực giác ta dự đoán được M là trung điểm của DE , hơn nữa điểm M là được xác định duy nhất do là giao điểm của 2 đường.

Do đó ta có thể gọi M' là trung điểm DE và chứng minh $M' \equiv M$ bằng cách chứng minh $AM' \parallel HE$ và $BM' \parallel HD$.

Thực ra do vai trò như nhau nên chỉ cần chứng minh $AM' \parallel HD$ là đủ.

$$\text{Ta có } \frac{HA}{HB} = \frac{CD}{CE} = \frac{AD}{BE}.$$

Suy ra $\triangle AHD \sim \triangle BHE \Rightarrow \angle AHD = \angle BHE$.

Lại có $\angle KHA = \angle BHE$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle KHA = \angle AHD$.

Từ đó ta có tam giác HDK cân tại H và A là trung điểm KD .

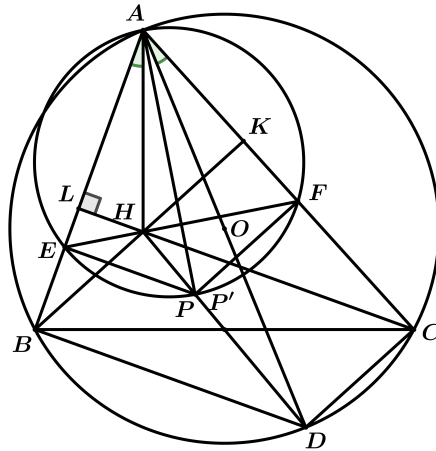
Tam giác DKE có $M'A$ là đường trung bình nên $AM' \parallel EK$ hay $AM' \parallel HE$.

Chứng minh tương tự ta có $BM' \parallel HD$.

Vậy $M' \equiv M$. Hay D, M, E thẳng hàng. ■

Bài 1.12. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , có H là trực tâm tam giác, AD là đường kính của (O) . Trên các cạnh AB, AC lấy E, F sao cho $AE = AF$ và E, H, F thẳng hàng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt phân giác góc $\angle BAC$ tại P . Chứng minh H, P, D thẳng hàng.

Lời giải.



Gọi BK, CL lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC và P' là giao điểm phân giác góc $\angle BAC$ và HD . Ta chứng minh $P' \equiv P$, hay $AEPF$ nội tiếp.

Ta có tính chất quen thuộc $\angle HAB = \angle DAC$, nên AP' cũng là phân giác $\angle HAD$.

Lại có $\angle AEF = \angle ABH + \angle EHB$; $\angle AFE = \angle ACH + \angle FHC$.

Mà $\angle ABH = \angle ACH$ và $\angle AEF = \angle AFE$ nên $\angle EHB = \angle FHC = \angle EHL$.

Do đó HE là phân giác $\angle LHB$, suy ra $\frac{LE}{EB} = \frac{HL}{HB}$. (1)

Tam giác AHL và tam giác ADC đồng dạng, suy ra $\frac{HL}{DC} = \frac{AH}{AD}$.

Mà $CD = BH$ và $\frac{AH}{AD} = \frac{HP'}{P'D}$, suy ra $\frac{HL}{HB} = \frac{HP'}{P'D}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{LE}{EB} = \frac{HP'}{P'D} \Rightarrow P'E \parallel HL \parallel BD \Rightarrow P'E \perp AB$.

Chứng minh tương tự ta có $P'F \perp AC$.

Do đó $AEP'F$ nội tiếp, suy ra $P' \equiv P$. Hay D, P, H thẳng hàng. ■

1.4 Các trường hợp đặc biệt khác

Trong phần này, ta xét một số bài tập dạng đặc biệt đó là chứng minh đường thẳng qua trung điểm, hoặc tâm ba đường tròn thẳng hàng.

Bài 1.13. (Bổ đề hình thang) Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) khác hình bình hành. Gọi P là giao điểm của AD và BC ; Q là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng đường thẳng PQ qua trung điểm của AB và CD .

Lời giải.

Vẽ đường thẳng qua Q song song với hai đáy cắt AD , BC lần lượt tại E, F .

Ta có $\frac{QE}{CD} = \frac{AQ}{AC} = \frac{BQ}{BD} = \frac{QF}{CD}$, suy ra $QE = QF$.

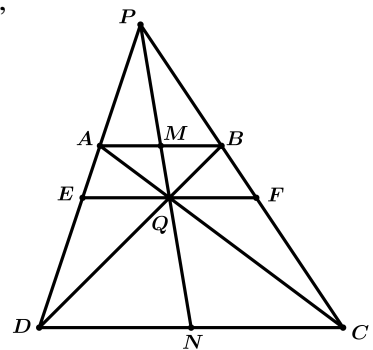
Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AB, CD với PQ .

Ta có $\frac{EQ}{DN} = \frac{PQ}{PN} = \frac{QF}{CN}$.

Mà $QE = QF$, suy ra $DN = CN$

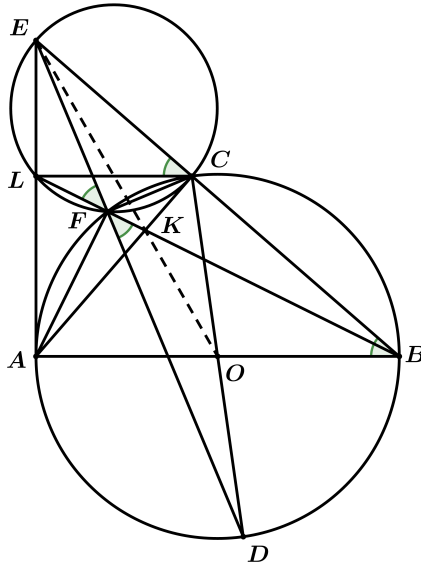
Hay N là trung điểm CD .

Chứng minh tương tự M là trung điểm AB . ■



Bài 1.14. Cho đường tròn tâm O đường kính AB , C là một điểm thuộc (O) , kẻ đường kính CD . Tiếp tuyến tại A cắt BC tại E , ED cắt (O) tại F (khác D), đường thẳng BF cắt AC tại K . Chứng minh E, K, O thẳng hàng.

Lời giải.



Gọi L là giao điểm của BF và AE . Ta có $BF \cdot BL = AB^2 = BC \cdot BE$.

Suy ra tứ giác $CFLE$ nội tiếp.

Khi đó $\angle ECL = \angle EFL = \angle DFB$.

Lại có: $\angle DFB = \angle BCD$ (cùng chắn cung \widehat{BD} của đường tròn (O)), $\angle DCB = \angle ABC$.

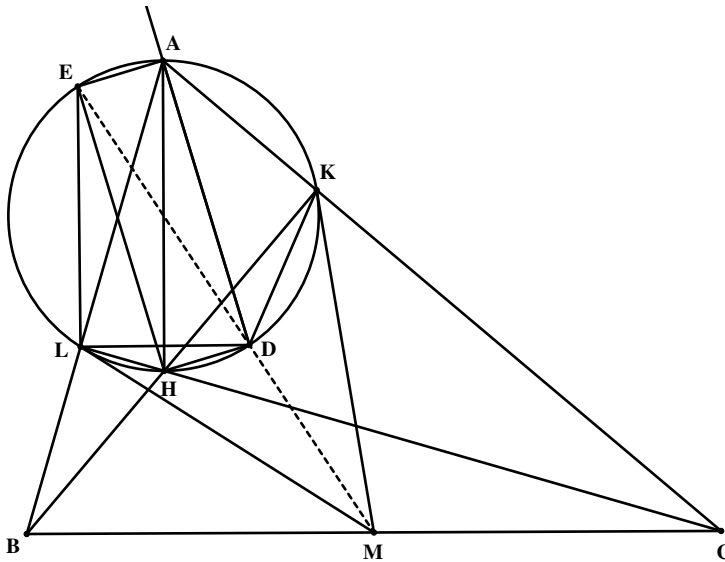
Vì vậy $CL \parallel AB$.

Áp dụng bổ đề hình thang ta có điều phải chứng minh. ■

Sau đây là một ví dụ về chứng minh thẳng hàng dựa vào ý tưởng: Chứng minh các điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng. Ý tưởng này đơn giản nhưng cũng được sử dụng khá rộng rãi trong việc chứng minh thẳng hàng.

Bài 1.15. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H lên đường phân giác trong và phân giác ngoài góc A . Chứng minh đường thẳng DE đi qua trung điểm của BC .

Lời giải.



Gọi K, L là chân đường cao từ B và C , M là trung điểm cạnh BC .

Ta có 6 điểm A, H, K, L, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH .

Ta cũng có AD, AE là phân giác trong và phân giác ngoài của $\angle KAL$ nên $KD = LD$ và $KE = LE$.

Mặt khác $MK = ML = \frac{1}{2}BC$.

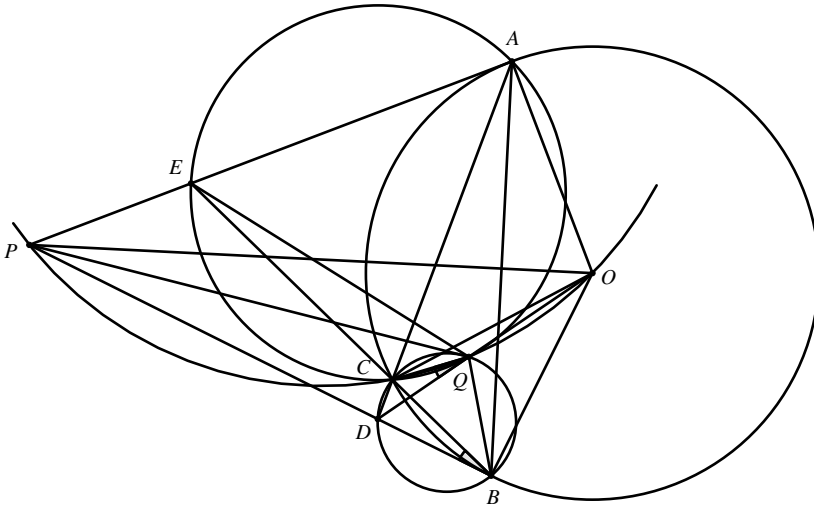
Các điểm M, D, E cùng thuộc đường trung trực của KL nên thẳng hàng. ■

Trường hợp khác là trường hợp chứng minh tâm ba đường tròn thẳng hàng, để chứng minh điều này ta thường chứng minh ba đường tròn đó cùng đi qua hai điểm.

Bài 1.16. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm phân biệt A, B . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại điểm P . Trên cung nhỏ AB lấy điểm C sao cho CAB khác tam giác cân. Các đường thẳng CA và BP cắt nhau tại D , BC và AP cắt nhau tại E .

Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACE , BCD và OPC thẳng hàng.

Lời giải.



Gọi Q là giao của (ACE) và (BCD) (Q khác C).

Ta có $\angle BDQ = \angle BCQ = \angle QAE$. Suy ra $AQDP$ nội tiếp.

Tương tự thì $BQEP$ nội tiếp.

Khi đó $\angle PQC = \angle EQC - \angle EQP = \angle PAC - \angle PBE = \frac{1}{2}(\angle AOC - \angle BOC) = \angle POC$.

Vậy tứ giác $OPCQ$ nội tiếp.

Từ đó ta có tâm các đường tròn (ACE) , (BCD) , (OPC) thẳng hàng. ■

1.5 Bài tập tự luyện

Bài 1.1 Cho tam giác ABC , trên các cạnh BC, AC lấy các điểm M và N thỏa điều kiện $BM = 2CM, CN = 3NA$. Đường thẳng MN cắt đường thẳng AB tại P . Tính $\frac{PA}{PB}$.

Bài 1.2 Chứng minh rằng chân ba đường phân giác ngoài của một tam giác thì thẳng hàng.

Bài 1.3 Cho tam giác ABC , đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác IAD, IBE, ICF thẳng hàng.

Bài 1.4 (Đường thẳng Gauss) Cho tứ giác $ABCD$ khác hình thang. Gọi I là giao điểm của AD, BC ; J là giao điểm của AB, CD . Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD và IJ cùng thuộc một đường thẳng.

Bài 1.5 Cho tam giác ABC nhọn, phân giác AD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC . Chứng minh rằng BF, CE cắt nhau tại một điểm thuộc đường cao hạ từ A của tam giác ABC .

Bài 1.6 Cho tam giác ABC , đường tròn qua B, C tương ứng cắt các cạnh AB, AC tại D và E . Tiếp tuyến tại D và E của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt nhau tại P . Gọi M là trung điểm của BC , chứng minh A, P, M thẳng hàng.

Bài 1.7 Cho tam giác ABC , đường tròn tâm (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D và E . Gọi K là hình chiếu của C trên BI .

- Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, AC . Chứng minh rằng K, M, N thẳng hàng.
- Chứng minh D, E, K thẳng hàng.

Bài 1.8 (TPHCM 2017) Cho tam giác ABC đều, các điểm M, N thuộc cạnh BC sao cho $\angle MAN = 30^\circ$ và M nằm giữa B, N . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN và ACM cắt nhau tại K . Chứng minh K, C đối xứng nhau qua AN và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN thuộc AK .

Bài 1.9 Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . Đường cao AH , gọi D, E là hình chiếu của H trên AB, AC . Chứng minh rằng D, O, E thẳng hàng khi và chỉ khi $AH = R\sqrt{2}$.

Bài 1.10 Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn đường kính BC . Đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC . Đường tròn tâm A bán kính AH cắt đường tròn đường kính BC tại P và Q . Chứng minh rằng D, E, P, Q thẳng hàng.

Bài 1.11 Cho tam giác ABC , phân giác trong góc $\angle BAC$ cắt BC tại D . Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, BD, AD tại E, F, G ; đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ACD tiếp xúc với AC, CD, AD tại P, Q, R . Chứng minh E, F, R thẳng hàng và P, Q, G thẳng hàng.

Bài 1.12 Cho tam giác ABC , đường tròn bàng tiếp góc A và bàng tiếp góc B tiếp xúc với AB lần lượt tại D, E . Vẽ đường kính DF . Chứng minh E, F, C thẳng hàng.

Bài 1.13 (VMO 2014) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm cung BC không chứa A . Trên AC lấy điểm K khác C sao cho $IK = IC$. Đường thẳng BK cắt (O) tại D ($D \neq B$) và cắt đường thẳng AI tại E . Đường thẳng DI cắt đường thẳng AC tại F .

a) Chứng minh rằng $EF = \frac{BC}{2}$.

b) Trên DI lấy điểm M sao cho CM song song với AD . Đường thẳng KM cắt đường thẳng BC tại N . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt đường tròn (O) tại P ($P \neq B$). Chứng minh rằng đường thẳng PK đi qua trung điểm của đoạn thẳng AD .

Bài 1.14 (Định lí Brokard) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn w tâm O . Gọi I là giao điểm của AC, BD ; P là giao điểm của AD và BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI và BCI cắt nhau tại K .

a) Chứng minh K, I, P thẳng hàng.

b) Gọi Q là giao của AB và CD . Chứng minh $OI \perp PQ$.

Bài 1.15 (Định lí Lyness) Cho tam giác ABC , đường tròn w tiếp xúc với AB, AC tại D, E và tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh DE đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

Bài 1.16 Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm BC , đường thẳng MH cắt đường thẳng EF tại K . Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại P . Chứng minh K, D, P thẳng hàng.

Bài 1.17 Cho tam giác ABC , các đường cao BD, CE . Gọi M, N là trung điểm BD, CE , MN cắt các đường thẳng AB, AC tại P, Q . Gọi K là trung điểm của PQ , chứng minh AK qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 1.18 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O , gọi I là giao điểm của AC, BD . Đường thẳng qua D vuông góc AD cắt đường thẳng qua C vuông góc BC tại K . Chứng minh rằng I, O, K thẳng hàng.

Bài 1.19 Cho tam giác ABC cân tại A , đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, AB, AC lần lượt tại P, E, F . Một đường thẳng tiếp xúc với (I) tại D và cắt các cạnh AB, AC tại M, N .

- Chứng minh rằng BN, CM, EF, D cùng đi qua một điểm.
- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M, N trên cạnh BC . Gọi T là giao điểm của MK và NH , chứng minh T thuộc DP .

Bài 1.20 Cho tam giác nhọn ABC khác tam giác cân, nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao AD, BE, CF , gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm AD, BE, CF . AO cắt BC tại A' . Gọi A_2 là trung điểm đoạn thẳng nối hình chiếu của A' trên AB, AC ; các điểm B_2, C_2 được xác định tương tự. Chứng minh rằng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

Gọi D' là chân đường phân giác ngoài của góc A , khi đó $\angle IAD' = 90^\circ = \angle IDD'$, do đó tứ giác $IAD'D$ nội tiếp đường tròn đường kính ID' .

Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IAD là trung điểm M của ID' .

Tương tự gọi E', F' là chân đường phân giác ngoài của góc B, C , và N, P lần lượt là trung điểm của IE', IF' . Khi đó N, P là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác IEB, IFC .

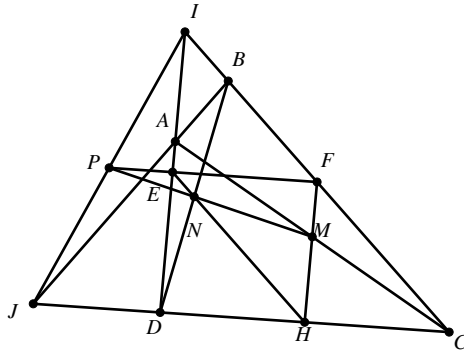
Theo bài trên ta có D', E', F' thẳng hàng, mà M, N, P là trung điểm của ID', IE', IF' nên sử dụng tính chất đường trung bình ta có $MN \parallel D'E', MP \parallel D'F'$, từ đó có M, N, P thẳng hàng.

Bài 1.4 Gọi E, F, H lần lượt là trung điểm của ID, IC, CD . Rõ ràng $P \in EF, M \in FH, N \in EH$.

$$\text{Theo định lý Thales: } \frac{PE}{PF} = \frac{JD}{JC}; \frac{NH}{NE} = \frac{BC}{BI}; \frac{MF}{MH} = \frac{AI}{AD} \quad (1).$$

$$\text{Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác } IDC \text{ với 3 điểm thẳng hàng } J, A, B: \frac{JD}{JC} \cdot \frac{BC}{BI} \cdot \frac{AI}{AD} = 1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{PE}{PF} \cdot \frac{JD}{JC} \cdot \frac{MF}{MH} = 1$, do đó 3 điểm P, N, M thẳng hàng.



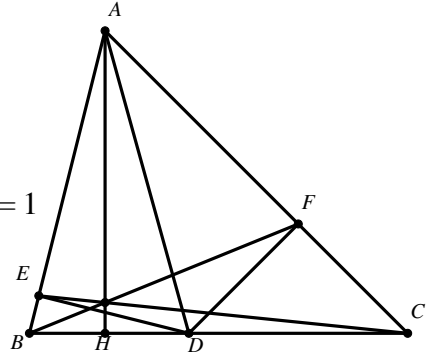
Bài 1.5 Theo tính chất phân giác ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Hơn nữa, theo mối liên hệ giữa góc và cạnh của tam giác vuông ta có $CF = CD \cos C, AF = AD \cos DAC, AE = AF, BE = CD \cos B, BH = AB \cos B, HC = AC \cos C$.

Khi đó

$$\frac{HB}{HC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{AE}{BE} = \frac{AB \cos B}{AC \cos C} \cdot \frac{CD \cos C}{FA} \cdot \frac{AE}{CD \cos B} = 1$$

Theo định lý Ceva thì BF, CE, AH đồng quy.



Bài 1.6 Gọi Q là trung điểm của DE , ta có $\angle DAQ = \angle CAM$. Ta cần chứng minh $\angle DAQ = \angle EAP$, điều này có nhiều cách chứng minh, trong chương 3 đã chứng minh, trong bài này tôi giải một cách khác.

Vẽ đường kính AH của (ADE) DH cắt AE tại K và EH cắt AD tại F .

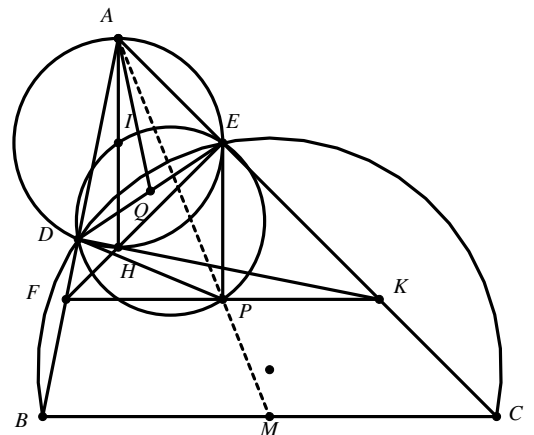
Gọi P' là trung điểm của FK . Ta chứng minh được $P'D, P'E$ là tiếp tuyến của (ADE) , suy ra $P' \equiv P$. Mà tam giác ADE và AFK đồng dạng, dẫn tới ADQ và AKP đồng dạng, dẫn tới

$$\angle DAQ = \angle KAP = \angle EAP$$

Từ đó ta có $\angle EAP = \angle CAM$, suy ra

A, P, M thẳng hàng.

Gọi Q là trung điểm DE , chứng minh $\angle QAD = \angle PAE$.



Bài 1.7

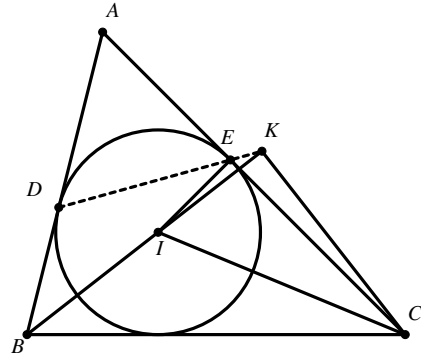
a) Ta có $MN \parallel AB$.

Tam giác KBC vuông tại K có KM là trung tuyến nên $KM = MB$, suy ra $\angle KCB = 2\angle KBM = \angle ABC$, dẫn tới $KM \parallel AB$.

Do đó K, M, N thẳng hàng.

b) Ta có $IEKC$ nội tiếp, suy ra $\angle KEC = \angle KIC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = \angle AEF$.

Suy ra A, E, K thẳng hàng.



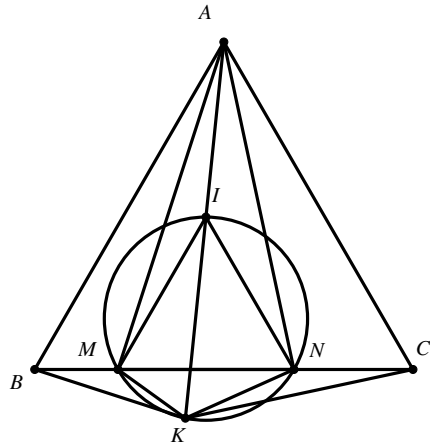
Bài 1.8 Gọi K' là điểm đối xứng của B qua AM . Khi đó $AM = AB$ và $\angle BAM = \angle MAK'$, mà $\angle MAN = 30^\circ = \frac{1}{2}\angle BAC$ nên $\angle K'AN = \angle CAN$, và $AK' = AC$, dẫn tới AN là trung trực của CK' .

Mặt khác ta có $\angle AK'M = \angle ABM = 60^\circ = \angle ACM$ nên tứ giác $ACK'M$ nội tiếp. Tương tự thì $ABK'N$ nội tiếp. Từ đó ta có $K' \equiv K$, rõ ràng C, K đối xứng qua AN như trên.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN .

Ta có $\angle MIN = 2\angle MAN = 60^\circ$ và $\angle MKN = 120^\circ$, suy ra $\angle MIN + \angle MKN = 180^\circ$, do đó $IMKN$ nội tiếp.

Hơn nữa $IM = IN$ nên MI là phân giác $\angle MKN$, mà KA cũng là phân giác $\angle MAN$ nên M, I, A thẳng hàng.



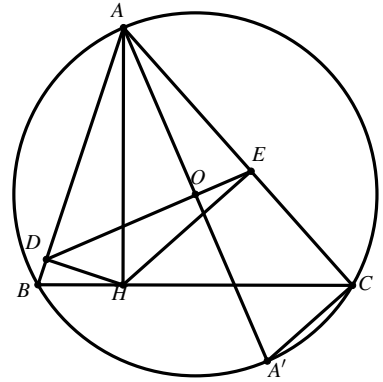
Bài 1.9

Vẽ đường kính AA' . Ta chứng minh được $AA' \perp DE$.

Nếu $AH = R\sqrt{2}$ thì $AH^2 = 2R^2 = AO \cdot AA'$.

Và $AH^2 = AD \cdot AB$, do đó $AD \cdot AB = AO \cdot AA'$, dẫn tới $\triangle ADO \sim \triangle AA'B$, suy ra $\angle ADO = \angle AA'B = \angle ACB = \angle ADE$, dẫn tới D, O, E thẳng hàng. Ngược lại, nếu D, O, E thẳng hàng.

Ta có $\angle ADO = \angle ADE = \angle ACB = \angle AA'B$, dẫn tới tam giác ADO và $AA'B$ đồng dạng, nên $AD \cdot AB = AO \cdot AA' = 2R^2$, suy ra $AH^2 = 2R^2$ hay $AH = R\sqrt{2}$.



Bài 1.10

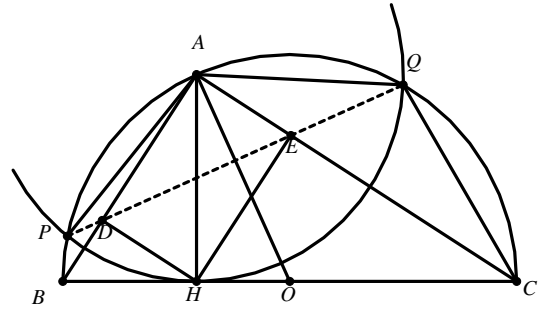
Ta có $AH^2 = AE \cdot AD$, suy ra $AQ^2 = AE \cdot AC$, dẫn tới tam giác AQE và ACQ đồng dạng. Từ đó ta có $\angle AQE = \angle ACQ$.

Mặt khác $AP = AQ$ nên $\angle APQ = \angle AQP$, mà $\angle APQ = \angle ACQ$ nên $\angle AQP = \angle ACP = \angle AQE$.

Suy ra P, Q, E thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có P, D, Q cũng thẳng hàng.

Vậy P, Q, D, E thẳng hàng.



Bài 1.11 Gọi r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABD và bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ACD .

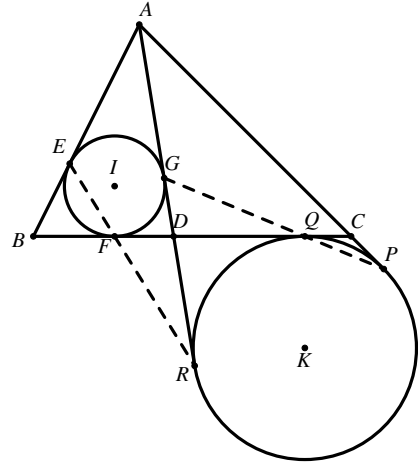
Ta có $AG = r \cot \frac{A}{4} = r \cot \frac{A}{4}$ và $AR = R \cot \frac{A}{4}$, suy ra $\frac{AG}{AR} = \frac{r}{R}$.

Hơn nữa $\frac{DG}{DR} = \frac{IG}{KR} = \frac{r}{R}$.

Từ đó ta có $\frac{AG}{AR} = \frac{DG}{DR} \Rightarrow \frac{DR}{AR} = \frac{DG}{AG} = \frac{DF}{AE}$.

Khi đó $\frac{BE}{BF} \cdot \frac{AG}{AE} \cdot \frac{DF}{DG} = 1$, theo định lý Menelaus thì E, F, R thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta cũng có P, Q, G thẳng hàng.



Bài 1.12 Gọi G và H là hình chiếu của I_a, I_b trên BC . Ta có $\frac{I_bC}{I_aC} = \frac{I_bH}{I_aG} = \frac{BE}{I_aF}$.

Khi đó tam giác $E C I_b$ và $F C I_a$ đồng dạng và $\angle I_b C E = \angle I_a C F$, dẫn tới E, C, F thẳng hàng.

Bài 1.13

a) Chứng minh $\angle AKI = \angle ABI$ (cùng bù $\angle ACI$).

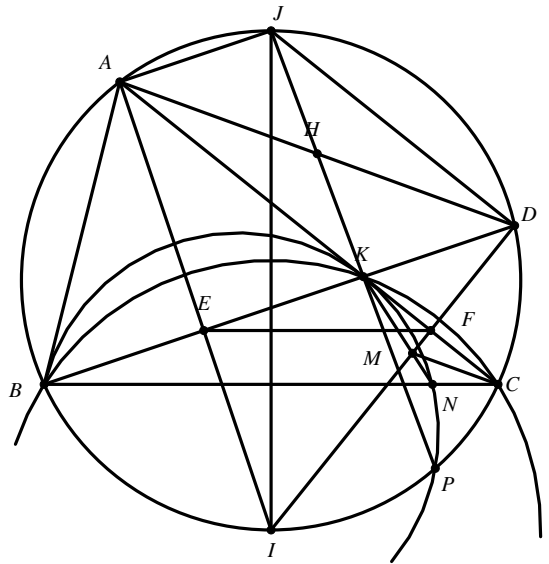
Tam giác ABI, AKI bằng nhau, suy ra E là trung điểm của BK .

Chứng minh F là trung điểm CK .

b) Tam giác AID có DE, AF là đường cao cắt nhau tại K nên K là trực tâm, suy ra $IK \perp AD$, do đó $CM \perp IK$. Suy ra M là trực tâm tam giác IKC .

Khi đó AC là tiếp tuyến của (BKN) .

$\angle CKP = \angle KBP = \angle DIP$, suy ra $KFPI$ nội tiếp, do đó $\angle IPK = 90^\circ$, suy ra IJ là đường kính. Từ đó chứng minh $JAKD$ là hình bình hành.



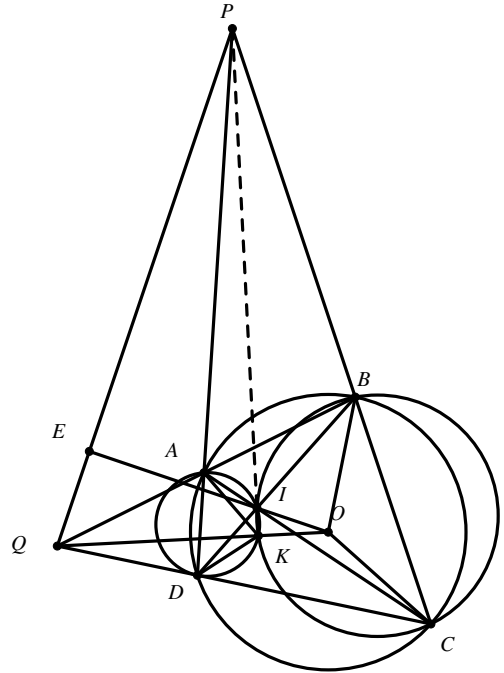
Bài 1.14 a) Gọi K' là giao điểm của PI và đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI , khi đó $PI \cdot PK' = PA \cdot PD = PB \cdot PC$ nên K' cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC , do đó $K' \equiv K$. Hay P, I, K thẳng hàng.

b) Ta có $\angle AKB = \angle AKI + \angle BKI = \angle EAB + \angle ACB = \angle AOB$, suy ra $AKOB$ nội tiếp, tương tự thì $BKOC$ nội tiếp.

Chúng minh tương tự như trên ta cũng có O, K, Q thẳng hàng.

Ta có $\angle OKB = \angle OAB = \angle OBA = \angle AKQ$, suy ra KI, KQ là phân giác ngoài và phân trong của $\angle AKI$ nên $PK \perp OQ$.

Chúng minh tương tự ta cũng có $QI \perp OP$. Từ đó ta có I là trực tâm của tam giác OPQ nên $OI \perp PQ$.

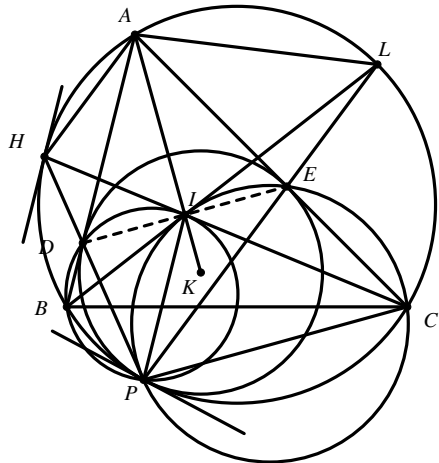


Bài 1.15

Giả sử DP cắt (ABC) tại H . Vẽ hai tia tiếp tuyến tại P_x và H_y của (ABC) . Khi đó P_x cũng là tiếp tuyến của ω .

Ta có $\angle xPH = \angle yHP = \angle BDP$, suy ra $H_y \parallel AB$, từ đó ta có H là điểm chính giữa cung AB . Do đó C, I, H thẳng hàng.

PE cắt (ABC) tại L , tương tự thì B, I, L thẳng hàng.



Ta có $HD \cdot HP = HB^2 = HI^2 \Rightarrow \triangle HID \sim \triangle HPI$, dẫn tới $\angle HID = \angle HPI$. Tương tự thì $\angle LIE = \angle LPI$.

Hơn nữa $\angle HIL = \angle HIA + \angle LIA = \angle HAI + \angle LAI = \angle HAL$.

Từ đó ta có $\angle DIE = \angle HID + \angle LIE + \angle HIL = \angle HPI + \angle HAL = 180^\circ$, do đó D, I, E thẳng hàng.

Bài 1.16

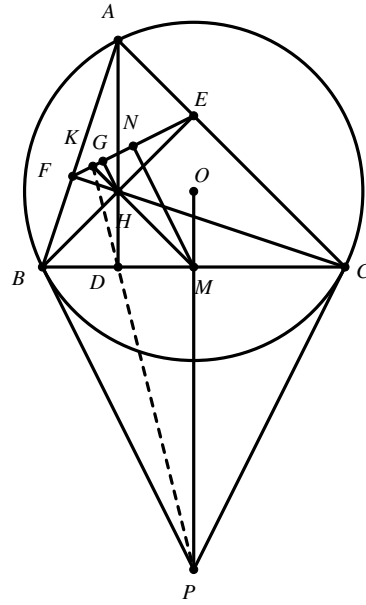
Ta cần chứng minh $\angle HKD = \angle MKP$, tương đương với chứng minh tam giác HKD và MKP đồng dạng hay cần chứng minh

$$\frac{HK}{HD} = \frac{MK}{MP}.$$

Vẽ $HG \perp EF, MN \perp EF$. Ta có N là trung điểm của EF và $\frac{HK}{MK} = \frac{HG}{MN}$ (1)

Ta có tam giác HEF và HBC đồng dạng nên $\frac{HG}{HD} = \frac{EF}{BC} = \frac{EN}{CM}$. (2)

Ta có $\angle MEN = \angle BAC = \angle PCM$, suy ra $\triangle MEN \sim \triangle PCM$, dẫn tới $\frac{EN}{CM} = \frac{MN}{PM}$ (3)



Từ (1), (2) và (3) ta có

$$\frac{HG}{HD} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow \frac{HG}{MN} = \frac{HD}{MP} = \frac{HK}{MK} \Rightarrow \triangle HKD \sim \triangle MKP \Rightarrow \angle HKD = \angle MKP$$

Do đó K, P, D thẳng hàng.

Bài 1.17 Cho AO cắt PQ tại K' .

Gọi M là trung điểm BC , khi đó I là tâm đường tròn đường kính BC . Suy ra $IN \perp CE, IM \perp BD$, tứ giác $INMH$ nội tiếp.

Từ (1) và (2) thì (*) tương đương

$$\frac{KD}{KF} \cdot \frac{IB}{ID} = \frac{IC}{IA} \cdot \frac{KL}{KC}$$

$$\frac{KD}{KF} \cdot \frac{KC}{KL} = \frac{IC}{IA} \cdot \frac{ID}{IB}$$

Mà

$$\frac{IC}{IA} \cdot \frac{ID}{IB} = \frac{CD^2}{AB^2}$$

Và

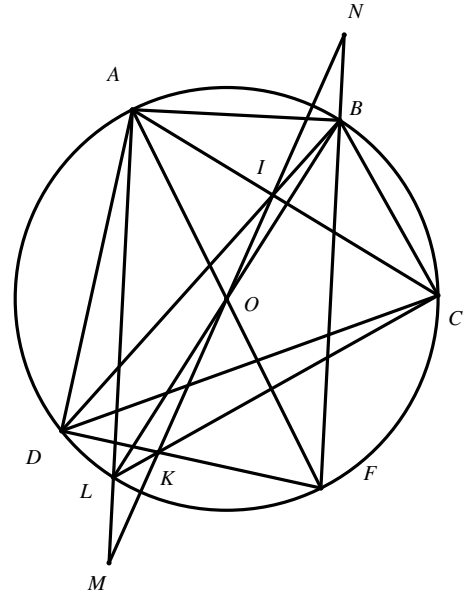
$$\frac{KD}{KF} \cdot \frac{KC}{KL} = \frac{CD^2}{LF^2}$$

Từ đó ta có

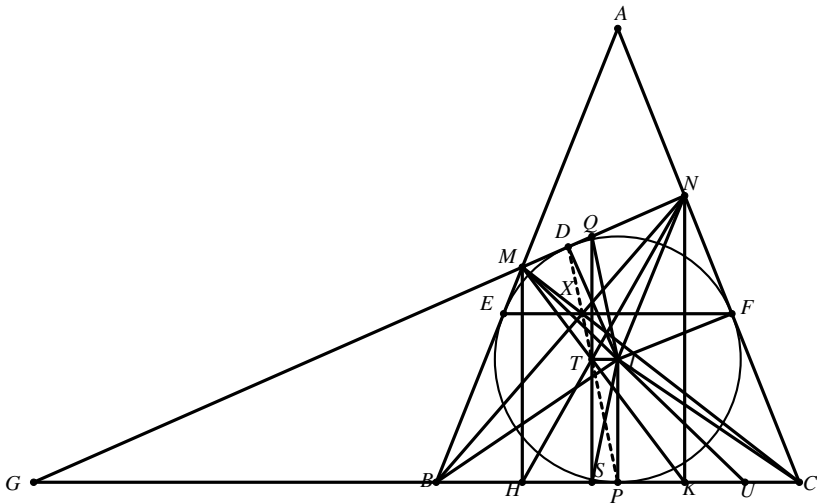
$$\frac{ML}{AM} = \frac{NB}{NF}$$

suy ra $ML = BN$ và MN qua O .

Vậy I, O, K thẳng hàng.



Bài 1.19



a) Gọi X là giao điểm của BN và EF . Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABN

ta có

$$\frac{XN}{XB} \cdot \frac{FA}{FN} \cdot \frac{EB}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{XN}{XB} = \frac{EB}{FN}$$

Gọi Y là giao điểm của DP và BN . Tương tự ta cũng có

$$\frac{YN}{YB} = \frac{BP}{ND}$$

Mà $BP = BE, FN = ND$ nên $\frac{XN}{XB} = \frac{YN}{YB}$, do đó $X \equiv Y$. Dẫn tới BN, EF, DP đồng quy.

Tương tự thì BN, EF, DP đồng quy.

b) Đường thẳng qua T song song MN cắt BC, MN tại S, Q .

Gọi U là giao điểm của MI và BC .

$$\text{Ta có } \angle BIU = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BMN = \angle CIN.$$

Và $\angle IBC = \angle ICN, IB = IC$, do đó $\triangle IBU = \triangle ICN$, dẫn tới $BU = CN$.

Khi đó

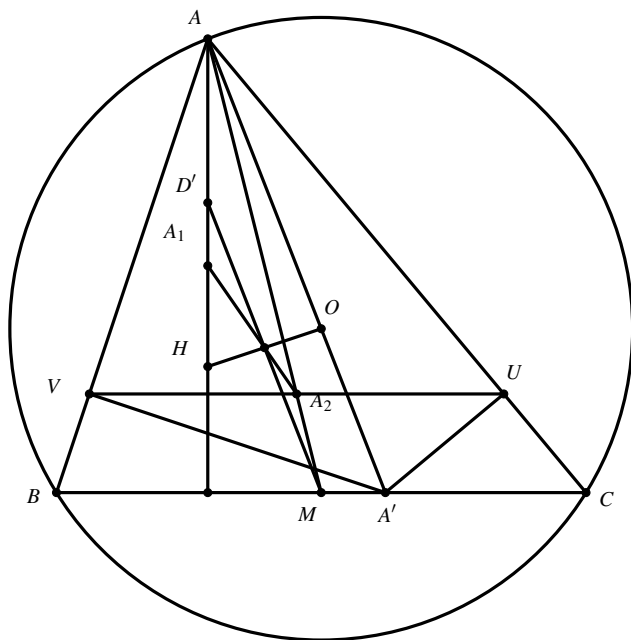
$$\frac{MT}{TK} = \frac{MH}{NK} = \frac{BM}{CN} = \frac{BM}{BU} = \frac{MI}{IU}$$

suy ra $IT \parallel BC$, dẫn tới $IT \perp SQ$ và tam giác IQS cân.

Hơn nữa GI là phân giác $\angle QGP$ nên $GQIS$ nội tiếp.

Theo định lý Simson thì D, T, P thẳng hàng.

Bài 1.20



Gọi D' là trung điểm AH , M là trung điểm BC . Ta có A, A_2, M thẳng hàng. Ta chứng minh A_1A_2 qua trung điểm MD' bằng định lý Menelaus cho tam giác AMD' .

Ta chứng minh $\frac{A_1D}{AA_1} = \frac{A_2M}{A_2A}$, ta có $\frac{A_1D}{AA_1} = \frac{AD - AH}{AD} = \frac{HD}{AD}$ và $\frac{A_2M}{AA_2} = \frac{UC}{AU}$.

Sử dụng cặp đồng dạng BHD và $A'UC$ cùng cặp BDA và $A'UA$ ta có $\frac{HD}{BD} = \frac{UC}{AU'}$ và

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AU'}{AU}, \text{ từ đó có } \frac{HD}{AD} = \frac{UC}{AU'}$$

Hơn nữa trung điểm MD' là tâm đường tròn Euler nên tương tự ta cũng có B_1B_2, C_1C_2 cũng qua P .