CHƯƠNG 6

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

§1. LỜI GIẢI ĐỀ SỐ 1

Bài 1.

a) Với $m = 2$, (1) trở thành $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 2x - 4$.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ 2x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x \geq 3 \end{array}\right.$.

Rõ ràng $x = 2$ là nghiệm của (1).

Với $x \geq 3$, (1) tương đương với

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \sqrt{(x-2)(x-3)} = 2(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x-2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x - 3 = 4(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = \dfrac{5}{3} \end{cases}. \text{ (Loại)}$$

Vậy (1) chỉ có nghiệm $x = 2$ khi $m = 2$.

b) Ta viết lại (1) như sau

$$\sqrt{(x-m)(x-m-1)} = 2(x-m)$$

Điều kiện xác định $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq m \\ x \geq m+1 \end{array}\right. \\ x \geq m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x \geq m+1 \end{array}\right.$.

Rõ ràng $x = m$ là nghiệm của (2). Với $x \geq m + 1$, (2) tương đương với

$$\begin{cases} x \geq m+1 \\ \sqrt{x-m-1} = 2\sqrt{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m+1 \\ x - m - 1 = 4(x-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m+1 \\ x = \dfrac{3m-1}{3} \end{cases}$$

Nếu (1) có 2 nghiệm phân biệt thì $\dfrac{3m-1}{3} \geq m+1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \geq 1$ (Vô lí). Vậy (1) chỉ có đúng một nghiệm $x = m$, do đó không tồn tại $m \in \mathbb{R}$ sao cho (1) có hai nghiệm phân biệt.

Bài 2.

a) Vì $a > b > c > d$ và $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$nên $a \geq b+1 \geq c+2 \geq d+3$.
Do đó $b \leq a-1, c \leq a-2, d \leq a-3$.
Kết hợp với giả thiết $a+b+c+d = 2004$, suy ra

$$2004 \leq a+(a-1)+(a-2)+(a-3) \Leftrightarrow a \geq \frac{1005}{2}, \text{ mà } a \in \mathbb{Z} \text{ nên } a \geq 503.$$

Xét $a = 503$, chọn $b = 502, c = 500$ và $d = 499$. Ta thấy

$a+b+c+d = 2004$ và $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = \left(a^2 - b^2\right) + \left(c^2 - d^2\right) = 1005 + 999 = 2004.$

Như vậy, giá trị nhỏ nhất của a là 503.

$$2004 > a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1 \Leftrightarrow a < \frac{2005}{2}.$$

Ta có $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2004 \Rightarrow 2004 > a^2 - b^2($ do $c > d)$. Mặt khác, $b \leq a-1$ nên Vì a là số nguyên nên $a \leq 1002$. Xét $a = 1002$, khi đó $b+c+d = 1002 = a$ $b^2 - c^2 + d^2 = a^2 - 2004 = a^2 - 2a$.

b) Ta có $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2004 \Rightarrow 2004 > a^2 - b^2$ (do $c > d$). Mặt khác, $b \leq a-1$ nên Ta có $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2004 \Rightarrow 2004 > a^2 - b^2$(do $2004 > a^2 - (a-1)^2$ Vì a là số nguyên nên $a \leq 1002$.

Xét $a = 1002$, khi đó $\begin{cases} b+c+d = 1002 = a \\ b^2 - c^2 + d^2 = a^2 - 2004 = a^2 - 2a \end{cases}$.

Khi đó $b^2 - c^2 + d^2 = (b+c+d)^2 - 2(b+c+d)$
$\Leftrightarrow 2(b+c+d) = 2(bc+cd+db) + 2c^2$
$\Leftrightarrow b+c+d = bc+cd+db+c^2.$
Điều trên vô lí vì $bc+cd+db+c^2 > bc+cd+db \geq b+c+d$.
Do đó, $a \leq 1001$.
Với các số nguyên a thỏa $503 \leq a \leq 1001$, chọn $b = a-1, c = 1003-a$ và $d = 1002-a$.
Ta chứng minh a, b, c, d thỏa các yêu cầu đề bài.
Rõ ràng $a > b$ và $c > d$; hơn nữa, $b > c \Leftrightarrow a-1 > 1003-a \Leftrightarrow a > 502$ (Luôn đúng vì $a \geq 503$). Mặt khác,

$$\begin{aligned} &a+b+c+d = a+a-1+1003-a+1002-a = 2004 \\ &a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a^2 - (a-1)^2 + (1003-a)^2 - (1003-a)^2 \\ &\ = (2a-1) + (2005-2a) = 2004 \end{aligned}$$

Do đó các số nguyên dương a, b, c, d thỏa các yêu cầu bài toán.
Như vậy, $a \in \{503; 504; 505; \ldots; 1000; 1001\}$, suy ra số giá trị có thể có của a là 499 .

Bài 3.

a) Nhận xét: $25^3 \equiv 7^3 \equiv 1(\bmod 9)$. Áp dụng nhận xét, ta xét các trường hợp sau:

- Với $n = 3k\ \left(k \in \mathbb{Z}^+\right)$, ta có
$$25^n + 7^n + 1 \equiv 3(\bmod 9)$$
Do đó $25^n + 7^n + 1$ không chia hết cho 9 khi $n = 3k$.
- Với $n = 3k + 1 (k \in \mathbb{N})$, ta có
$$25^n + 7^n + 1 \equiv 25 + 7 + 1 \equiv 32 \equiv 5(\bmod 9)$$
Do đó $25^n + 7^n + 1$ không chia hết cho 9 khi $n = 3k + 1$.
- Với $n = 3k + 2, (k \in \mathbb{N})$, ta có
$$25^n + 7^n + 1 \equiv 25^2 + 7^2 + 1 \equiv 0(\bmod 9)$$
Do đó $25^n + 7^n + 1 \vdots 9$ khi $n = 3k + 2$. Vậy $25^n + 7^n + 1$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi $n = 3k + 2$ (k là số tự nhiên).

b) Đặt $a = 25^n - 7^m - 3^m$ là số lẻ, nên $|a| \neq 0$.
Vì $25 \equiv 1(\bmod 3)$ và $7 \equiv 1(\bmod 3)$ nên $25^n - 7^m \equiv 0(\bmod 3)$.

- Với m lẻ, ta có:
$$7^m + 3^m \equiv 2^m + (-2)^m \equiv 0(\bmod 5)$$
Suy ra $a = 25^n - 7^m - 3^m$ chia hết cho 5 và $3 \Rightarrow a \vdots 15 \Rightarrow A \geqslant 15$
Với $m = n = 1$, ta có $A = |25 - 7 - 3|$.
- Với m chẵn. Đặt $m = 2k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$, ta có:
$$\begin{aligned} 7^m + 3^m = 7^{2k} + 3^{2k} &\equiv \left((-3)^{2k} + 3^{2k}\right)(\bmod 10) \\ &\equiv 2 \cdot 9^k (\bmod 10) \equiv \pm 2(\bmod 10) \equiv 2 \text{ hoặc } 8(\bmod 10) \end{aligned}$$
Do đó, chữ số tận cùng của $A = |25^n - 7^m - 3^m|$ là 3 hoặc 7.
Vì A chia hết cho 3 nên $a \neq 7, 13$.
Mà $25^n - 7^m - 3^m \equiv 1 - (-1)^m - (-1)^m \equiv -1(\bmod 8)$ nên $A \neq 3$
Suy ra, với m chẵn thì $A > 15$

Vậy GTNN của A là 15 khi $m = n = 1$.

Bài 4.

a) Ta có: $\triangle AQF \sim \triangle BDF$ và $\triangle APE \sim \triangle CDE$ nên các tam giác AQF và APE cân tại A.
Do đó $AQ = AF, AP = AE$. Mà $AF = AE$ nên ta được $AP = AQ$, hay A là trung điểm PQ.

b) $PQFE$ nội tiếp đường tròn đường kính PQ nên $\widehat{QEP} = \widehat{QFP} = 90^\circ$.
Do đó K là trực tâm của $\triangle DPQ \Rightarrow DK \perp PQ$.
Lại có $DI \perp PQ$ nên ta được D, I, K thẳng hàng.
$\widehat{KFD} = \widehat{KED} = 90^\circ \Rightarrow KEDF$ nội tiếp. Do đó $K \in (I)$.

c) Tia KA cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle DPQ$ tại N thì DN là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle DPQ$.

Ta có $\widehat{NLD} = \widehat{KLD} = 90^{\circ}$ (do $K \in (I)$).

Vậy nên L nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle DPQ$.

Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của $\triangle ABC$. X, Y lần lượt là tiếp điểm của (J) với BC, AB.

Ta có $KI \parallel XJ$ (cùng vuông góc với BC) và

$$\frac{AI}{AJ} = \frac{IF}{JY} = \frac{IK}{JX}$$

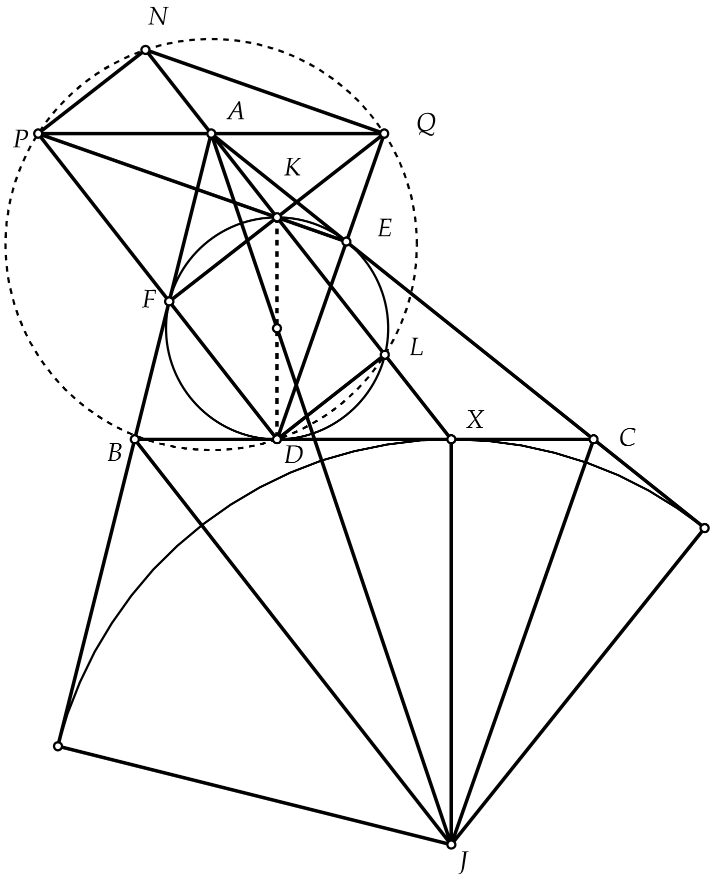
nên A, K, X thẳng hàng. Vậy $M \equiv X$.

Đặt $BM = x, CM = y$, ta được$x + y = BC$ và $x + AB = y + AC$. Từ đây tính được $y = \dfrac{AB + BC - CA}{2}$.

Đặt $AF = AE = a, BD = BF = b, CD = CE = c$, ta được

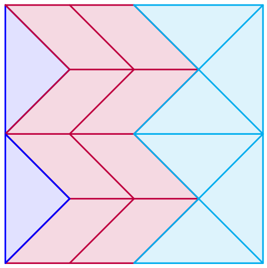
$a + b = AB, b + c = BC, c + a = AC$. Ta cũng tính được $b = \dfrac{AB + BC - CA}{2}$.

Vậy $BD = CM$.



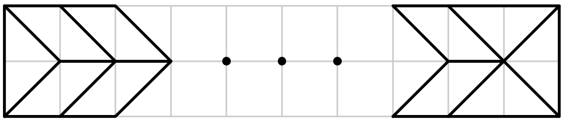
Bài 5.

a) Ta phủ hình như sau:



b) Giả sử A là một hình chữ nhật $m \times n$ thỏa mãn đề bài.

- Tô màu đen trắng các ô xen kẽ, mỗi hình T hoặc P đều phủ được nửa ô đen và nửa ô trắng, do đó số ô đen và ô trắng phải bằng nhau, do đó $m \times n$ chẵn.
- Xét n chẵn thì ta chia thành các hình chữ nhật dạng $2 \times m$ và có cách phủ như sau thỏa đề bài.



Vậy tất cả giá trị cần tìm là m hoặc n chẵn.