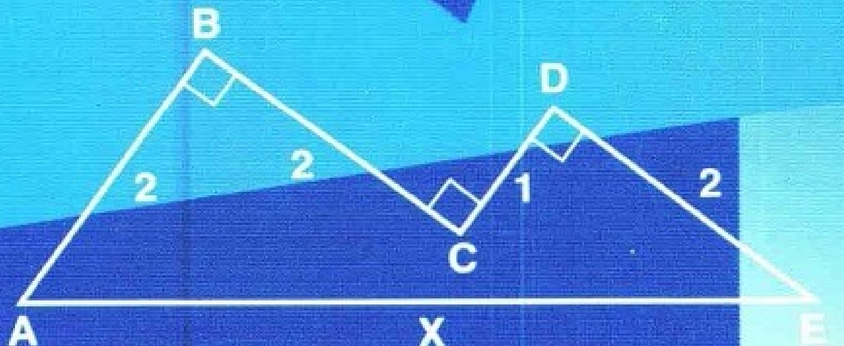
VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 7

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN

TOÁN 7

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ mười)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I
SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

§1. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA CÁC SỐ HỮU TỈ

Các phân số bằng nhau biểu diễn cùng một số hữu tỉ. Số hữu tỉ là số có thể viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$. Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là **Q**.

Ta xác định trên **Q** một thứ tự như sau :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \ (a, b, c, d \in \mathbf{Z} \ ; \ b, d > 0).$$

Ta xác định trên **Q** hai phép toán :

– phép cộng : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$;

– phép nhân : $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Phép cộng số hữu tỉ có bốn tính chất : giao hoán, kết hợp, cộng với số 0, cộng với số đối. Phép nhân số hữu tỉ có bốn tính chất : giao hoán, kết hợp, nhân với số 1, nhân với số nghịch đảo.

Giữa phép nhân và phép cộng có quan hệ : phép nhân phân phối đối với phép cộng. Giữa thứ tự và phép toán có quan hệ :

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z \ ;$$
$$x < y \Rightarrow xz < yz \quad \text{với } z > 0 \ ;$$
$$x < y \Rightarrow xz > yz \quad \text{với } z < 0.$$

Trừ đi một số hữu tỉ là cộng với số đối của số ấy. Chia cho một số hữu tỉ khác 0 là nhân với số nghịch đảo của số ấy. Mọi số hữu tỉ khác 0 đều có số nghịch đảo. Do đó phép chia một số hữu tỉ cho một số hữu tỉ khác 0 bao giờ cũng cho kết quả là một số hữu tỉ.

Ví dụ 1

a) So sánh tổng và tích của mỗi cặp phân số sau :

$$\frac{7}{5} \text{ và } \frac{7}{2}\ ;\ \frac{8}{11} \text{ và } \frac{-8}{3}.$$

b) Cho phân số $\frac{a}{b} \neq 1$. Hãy tìm phân số $\frac{c}{d}$ sao cho $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

Giải :

a) $\frac{7}{5} + \frac{7}{2} = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{2}\ ;\ \frac{8}{11} + \frac{-8}{3} = \frac{8}{11} \cdot \frac{-8}{3}$.

b) Với $b \neq 0, d \neq 0, a \neq b$ thì

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad + bc}{bd} = \frac{ac}{bd} \Leftrightarrow ad + bc = ac \Leftrightarrow ad = ac - bc$$

$$\Leftrightarrow ad = c(a - b) \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{a - b}.$$

Chẳng hạn : Nếu $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$ thì $\frac{c}{d} = \frac{7}{7 - 5} = \frac{7}{2}$.

Nếu $\frac{a}{b} = \frac{8}{11}$ thì $\frac{c}{d} = \frac{8}{8 - 11} = \frac{8}{-3} = \frac{-8}{3}$.

Bài tập

1. So sánh các số hữu tỉ :

a) $\frac{-18}{91}$ và $\frac{-23}{114}$; b) $\frac{-22}{35}$ và $\frac{-103}{177}$.

2. Tìm hai phân số có tử bằng 9, biết rằng giá trị của mỗi phân số đó lớn hơn $\frac{-11}{13}$ và nhỏ hơn $\frac{-11}{15}$.

3. Cho các số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ với mẫu dương, trong đó $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng :

a) $ad < bc$; b) $\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$.

4. Kí hiệu [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, gọi là *phần nguyên của* x, chẳng hạn [1,5] = 1 ; [5] = 5 ; [–2,5] = –3.

a) Hãy tính : $\left[\frac{-1}{7}\right]$; [3,7] ; [–4] ; $\left[\frac{-43}{10}\right]$.

b) Cho x = 3,7. So sánh :

$$A = [x] + \left[x + \frac{1}{5}\right] + \left[x + \frac{2}{5}\right] + \left[x + \frac{3}{5}\right] + \left[x + \frac{4}{5}\right] \quad \text{và} \quad B = [5x].$$

c) Tính $\left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{3^2}\right] + \left[\frac{100}{3^3}\right] + \left[\frac{100}{3^4}\right]$.

d) Tính $\left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{2^2}\right] + \left[\frac{50}{2^3}\right] + \left[\frac{50}{2^4}\right] + \left[\frac{50}{2^5}\right]$.

e) Cho $x \in \mathbf{Q}$. So sánh [x] với x, so sánh [x] với y trong đó $y \in \mathbf{Z}$, $y < x$.

5. Thực hiện các phép tính :

a) $\frac{-2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{-1}{6} + \frac{-2}{5}$;

b) $\frac{-2}{3} + \frac{-1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \frac{-7}{10}$;

c) $\frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41}$;

d) $\frac{1}{100 \,.\, 99} - \frac{1}{99 \,.\, 98} - \frac{1}{98 \,.\, 97} - \ldots - \frac{1}{3 \,.\, 2} - \frac{1}{2 \,.\, 1}$.

6. Cho các số hữu tỉ x bằng 1,4089 ; 0,1398 ; –0,4771 ; –1,2592.

a) Viết các số đó dưới dạng tổng của một số nguyên a và một số thập phân b không âm nhỏ hơn 1(*).

b) Tính tổng các số hữu tỉ trên bằng hai cách : tính thông thường, tính tổng các số được viết dưới dạng ở câu a.

c) Hãy so sánh a và [x] trong từng trường hợp ở câu a.

(*) Trong cách viết này, a là phần nguyên của x, còn b là phần lẻ của x. Kí hiệu phần lẻ của x là {x} thì x = [x] + {x}.

7. Tìm số nguyên n để phân số sau có giá trị là một số nguyên và tính giá trị đó :

a) $A = \dfrac{3n+9}{n-4}$; b) $B = \dfrac{6n+5}{2n-1}$.

8. Tìm các số nguyên x và y, biết rằng :

$$\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}.$$

9. Viết tất cả các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 20 theo thứ tự tuỳ ý. Lấy mỗi số trừ đi số thứ tự của nó ta được một hiệu. Tổng của tất cả các hiệu đó bằng bao nhiêu ?

10. Thực hiện các phép tính :

a) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{10} - \dfrac{4}{15} - \dfrac{7}{20}\right) \cdot \dfrac{5}{19}}{\left(\dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{-3}{35}\right) \cdot \dfrac{-4}{3}}$;

b) $\dfrac{(1+2+3+\ldots+100)\cdot\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{9}\right)\cdot(6{,}3\,.\,12 - 21\,.\,3{,}6)}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{100}}$;

c) $\dfrac{\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{11}}{\dfrac{4}{9} - \dfrac{4}{7} - \dfrac{4}{11}} + \dfrac{\dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{25} - \dfrac{3}{125} - \dfrac{3}{625}}{\dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{25} - \dfrac{4}{125} - \dfrac{4}{625}}$.

11. Tìm số hữu tỉ x, biết rằng :

a) $\dfrac{2}{3}x + 4 = -12$;

b) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} : x = -3$;

c) $|3x - 5| = 4$;

d) $\dfrac{x+1}{10} + \dfrac{x+1}{11} + \dfrac{x+1}{12} = \dfrac{x+1}{13} + \dfrac{x+1}{14}$;

e*) $\dfrac{x+4}{2000} + \dfrac{x+3}{2001} = \dfrac{x+2}{2002} + \dfrac{x+1}{2003}$.

12. Chứng minh rằng : $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+\frac{99}{100!}<1$.

13. Chứng minh rằng :

$$\frac{1.2-1}{2!}+\frac{2.3-1}{3!}+\frac{3.4-1}{4!}+\dots+\frac{99.100-1}{100!}<2.$$

14. a) Người ta viết bảy số hữu tỉ trên một vòng tròn. Tìm các số đó, biết rằng tích của hai số bất kì cạnh nhau bằng 16.

b) Cũng hỏi như trên đối với n số.

15. Có tồn tại hay không hai số dương a và b khác nhau, sao cho $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a-b}$?

16*. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\dots+\frac{1}{49.50}=\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\frac{1}{28}+\dots+\frac{1}{50}.$$

17*. Cho $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\dots+\frac{1}{99.100}$.

Chứng minh rằng : $\frac{7}{12}<A<\frac{5}{6}$.

18. Tìm hai số hữu tỉ a và b, sao cho :

$$a-b=2(a+b)=a:b.$$

19*. Tìm hai số hữu tỉ a và b, sao cho $a+b=ab=a:b$.

20*. Tìm số hữu tỉ x, sao cho tổng của số đó với số nghịch đảo của nó là một số nguyên.

~ ***Ví dụ :*** 23, 24, 26 đến 29, 33, 58 đến 76.

Bài tập : 135, 139 đến 143, 148 đến 150, 156 đến 160, 212 đến 228, 230 đến 271, 273 đến 275, 277, 278.

§2. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Xem chuyên đề *Giá trị tuyệt đối của một số* ở phần *Chuyên đề*.

~ ***Ví dụ :*** 35 đến 43.

Bài tập : 152, 153, 162 đến 164.

§3. LUỸ THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Luỹ thừa bậc n của một số hữu tỉ x, kí hiệu x^n, là tích của n thừa số x (n là một số tự nhiên lớn hơn 1).

Quy ước : $x^0 = 1$ với $x \neq 0$; $x^1 = x$.

Ta có các quy tắc :

$$x^m . x^n = x^{m+n} ; \quad x^m : x^n = x^{m-n} \text{ (với } x \neq 0, m \geq n) ;$$

$$(x^m)^n = x^{mn} ; \qquad (x.y)^n = x^n.y^n ; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \text{ (với } y \neq 0).$$

Ví dụ 2

a) Có thể khẳng định rằng x^2 luôn luôn lớn hơn x hay không ?

b) Khi nào thì $x^2 < x$?

Giải :

a) Không thể khẳng định như vậy, chẳng hạn với $x = \frac{1}{2}$ thì $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$.

b) $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0$.

Xảy ra quan hệ trên nếu x và x – 1 trái dấu. Chú ý rằng $x - 1 < x$ nên phải có $x - 1 < 0, x > 0$ tức là $0 < x < 1$. Như vậy với $0 < x < 1$ thì $x^2 < x$.

Cách giải khác, xem ví dụ 30.

Ví dụ 3

Tìm các số hữu tỉ a, b, c, biết rằng : ab = 2, bc = 3, ca = 54.

Giải : Nhân từng vế ba đẳng thức trên, ta được

$$(abc)^2 = 2 . 3 . 54 = 6 . 6 . 9 = (6 . 3)^2 \text{ nên } abc = \pm 18.$$

Nếu abc = 18 thì cùng với ab = 2 suy ra c = 9, cùng với bc = 3 suy ra a = 6, cùng với ca = 54 suy ra $b = \frac{1}{3}$.

Nếu abc = –18 thì lập luận tương tự như trên suy ra c = –9, a = –6, $b = \frac{-1}{3}$.

Có hai đáp số : $a = 6, b = \frac{1}{3}, c = 9$

$$\text{và } a = -6, b = \frac{-1}{3}, c = -9.$$

Ví dụ 4

Rút gọn : $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{49} + 5^{50}.$

Giải :

$$5A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + ... + 5^{50} + 5^{51}$$

$$A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{49} + 5^{50}.$$

Do đó $5A - A = 5^{51} - 1.$

Vậy $A = \frac{5^{51} - 1}{4}.$

Nhận xét : Trong biểu thức A, số hạng sau gấp 5 lần số hạng liền trước. Do đó ta tính biểu thức 5A rồi trừ đi A thì được hiệu $5^{51}-1$, từ đó rút gọn được biểu thức A.

Ví dụ 5

Cho $B = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{98} + \left(\frac{1}{2}\right)^{99}.$

Chứng minh rằng $B < 1$.

Giải :

Ta viết : $2B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{97}} + \frac{1}{2^{98}}$

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}.$$

nên $2B - B = 1 - \frac{1}{2^{99}}.$

Do đó $B < 1$.

Bài tập

21. Chứng minh rằng :

a) $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 55 ; b) $16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33 ;

c) $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ chia hết cho 405.

22. Điền vào chỗ trống (...) các từ "bằng nhau" hoặc "đối nhau" cho đúng :

a) Nếu hai số đối nhau thì bình phương của chúng...

b) Nếu hai số đối nhau thì lập phương của chúng...

c) Luỹ thừa chẵn cùng bậc của hai số đối nhau thì ...

d) Luỹ thừa lẻ cùng bậc của hai số đối nhau thì...

23. Các đẳng thức sau có đúng với mọi số hữu tỉ a và b hay không ?

a) $-a^3 = (-a)^3$; b) $-a^5 = (-a)^5$;

c) $-a^2 = (-a)^2$; d) $-a^4 = (-a)^4$;

e) $(a - b)^2 = (b - a)^2$; g) $(a - b)^3 = -(b - a)^3$.

24. Tính :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{20}$; b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{25} : \left(\frac{1}{3}\right)^{30}$;

c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{3} : \left(\frac{1}{8}\right)^{2}$; d) $(x^3)^2 : (x^2)^3$ với $x \neq 0$.

25. Viết số 64 dưới dạng a^n với $a \in \mathbb{Z}$. Có bao nhiêu cách viết ?

26. Rút gọn biểu thức :

$$A = \frac{4^5 . 9^4 - 2 . 6^9}{2^{10} . 3^8 + 6^8 . 20}.$$

27. Cho $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + ... + (-1)^{n-1} . n$ với $n = 1, 2, 3, ...$

Tính $S_{35} + S_{60}$.

28. Cho A = 1 – 5 + 9 – 13 + 17 – 21 + 25 – ... (n số hạng, giá trị tuyệt đối của số hạng sau lớn hơn giá trị tuyệt đối của số hạng trước 4 đơn vị, các dấu cộng và trừ xen kẽ).

a) Tính A theo n.

b) Hãy viết số hạng thứ n của biểu thức A theo n (chú ý dùng luỹ thừa để biểu thị dấu của số hạng đó).

29. Với giá trị nào của các chữ thì các biểu thức sau có giá trị là số 0, số dương, số âm ?

a) $P = \frac{a^2 b}{c}$; b) $Q = \frac{x^3}{yz}$.

30. Cho hai số hữu tỉ a và b trái dấu trong đó $|a| = b^5$. Xác định dấu của mỗi số.

31. Viết các số sau dưới dạng luỹ thừa của 2 :

$$16\ ;\quad 64\ ;\quad 1\ ;\quad \frac{1}{32}\ ;\quad \frac{1}{8}\ ;\quad 0{,}5\ ;\quad 0{,}25.$$

32. a) Viết các số sau thành luỹ thừa với số mũ âm :

$$\frac{1}{1000000}\ ;\qquad 0{,}000\ 000\ 02.$$

b) Viết các số sau dưới dạng số thập phân :

$$10^{-7}\ ;\qquad 2{,}5\ .\ 10^{-6}.$$

33. Tính xem A gấp mấy lần B :

a) $A = 3{,}4\ .\ 10^{-8}$; $\qquad B = 34\ .\ 10^{-9}$;

b) $A = 10^{-4} + 10^{-3} + 10^{-2}$; $\qquad B = 10^{-9}$.

34. So sánh :

a) $\left(\frac{-1}{16}\right)^{100}$ và $\left(\frac{-1}{2}\right)^{500}$; $\qquad$ b) $(-32)^9$ và $(-18)^{13}$.

35. Hãy sắp xếp các số hữu tỉ a, b, c theo thứ tự từ nhỏ đến lớn :

$$a = 2^{100},\quad b = 3^{75},\quad c = 5^{50}.$$

36. Trong các câu sau, câu nào đúng với mọi số hữu tỉ a ?

a) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > 0$;

b) Nếu $a^2 > 0$ thì $a > 0$;

c) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > a$;

d) Nếu $a^2 > a$ thì $a > 0$;

e) Nếu $a^2 > a$ thì $a < 0$.

37. a) Cho $a^m = a^n$ ($a \in \mathbf{Q}$; $m, n \in \mathbf{N}$). Tìm các số m và n.

b) Cho $a^m > a^n$ ($a \in \mathbf{Q}$; $a > 0$; $m, n \in \mathbf{N}$). So sánh m và n.

38. Tìm số hữu tỉ x, biết rằng :

a) $(2x - 1)^4 = 81$; $\qquad$ b) $(x - 1)^5 = -32$; $\qquad$ c) $(2x - 1)^6 = (2x - 1)^8$.

39. Tìm số tự nhiên x, biết rằng :

a) $5^x + 5^{x+2} = 650$; b) $3^{x-1} + 5 . 3^{x-1} = 162$.

40. Tìm các số tự nhiên x và y, biết rằng :

a) $2^{x+1} . 3^y = 12^x$; b) $10^x : 5^y = 20^y$; c) $2^x = 4^{y-1}$ và $27^y = 3^{x+8}$.

41. Tìm các số hữu tỉ a, b, c, biết rằng :

a) $ab = \frac{3}{5}$, $bc = \frac{4}{5}$, $ca = \frac{3}{4}$.

b) $a(a + b + c) = -12$; $b(a + b + c) = 18$; $c(a + b + c) = 30$;

c) $ab = c$, $bc = 4a$, $ac = 9b$.

42*. Cho năm số tự nhiên a, b, c, d, e thoả mãn $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$.

Chứng minh rằng năm số a, b, c, d, e bằng nhau.

43. Cho $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$.

So sánh A với $-\frac{1}{2}$.

44. Rút gọn $A = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} - 2^{97} + ... + 2^2 - 2$.

45. Rút gọn $B = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + ... + 3^2 - 3 + 1$.

46. Cho $C = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{99}}$.

Chứng minh rằng $C < \frac{1}{2}$.

47*. Chứng minh rằng :

$$\frac{3}{1^2 . 2^2} + \frac{5}{2^2 . 3^2} + \frac{7}{3^2 . 4^2} + \cdots + \frac{19}{9^2 . 10^2} < 1.$$

48*. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}.$$

49. Ta không có $2^m + 2^n = 2^{m+n}$ với mọi số nguyên dương m, n. Nhưng có những số nguyên dương m, n có tính chất trên. Tìm các số đó.

50*. Tìm các số nguyên dương m và n, sao cho

$$2^m - 2^n = 256.$$

51*. Cho một bảng vuông 3 × 3 ô. Trong mỗi ô của bảng viết số 1 hoặc số −1. Gọi d_i là tích các số trên dòng i (i = 1, 2, 3), c_k là tích các số trên cột k (k = 1, 2, 3).

a) Chứng minh rằng không thể xảy ra

$$d_1 + d_2 + d_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

b) Xét bài toán trên đối với bảng vuông n × n.

52*. Cho n số $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, mỗi số bằng 1 hoặc −1. Biết rằng tổng của n tích $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \ldots, x_nx_1$ bằng 0. Chứng minh rằng n chia hết cho 4.

~ ***Ví dụ :*** 25, 30 đến 32, 34.

Bài tập : 133, 134, 136 đến 138, 151, 154, 155, 161.

§4. TỈ LỆ THỨC

Tỉ lệ thức là một đẳng thức của hai tỉ số. Trong tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (hoặc a : b = c : d) các số hạng a và d được gọi là ngoại tỉ, các số hạng b và c được gọi là trung tỉ.

Khi viết tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ta luôn giả thiết rằng $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta suy ra ad = bc. Đảo lại, nếu ad = bc (cả bốn số a, b, c, d khác 0) thì ta có các tỉ lệ thức :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \qquad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Như vậy trong tỉ lệ thức, ta có thể hoán vị các ngoại tỉ với nhau, hoán vị các trung tỉ với nhau, hoán vị cả ngoại tỉ với nhau và trung tỉ với nhau.

Từ đẳng thức ad = bc, ta lập được bốn tỉ lệ thức với các số hạng là a, b, c, d (với quy ước rằng hai tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ và $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ chỉ kể là một tỉ lệ thức).

Ví dụ 6

Cho ba số 6, 8, 24.

a) Tìm số x, sao cho x cùng với ba số trên lập thành một tỉ lệ thức.

b) Có thể lập được tất cả bao nhiêu tỉ lệ thức ?

Giải :

a) Trong ba số 6, 8, 24, có ba cách chọn ra tích của hai trong ba số ấy. Với mỗi tích, có một cách lập đẳng thức với tích của số còn lại và số x. Ta có :

$$6 \,.\, 8 = 24 \,.\, x \Leftrightarrow x = 2\,;$$

$$6 \,.\, 24 = 8 \,.\, x \Leftrightarrow x = 18\,;$$

$$8 \,.\, 24 = 6 \,.\, x \Leftrightarrow x = 32.$$

b) Với tích $6 \,.\, 8 = 24 \,.\, 2$, ta lập được bốn tỉ lệ thức :

$$\frac{6}{24} = \frac{2}{8}, \quad \frac{6}{2} = \frac{24}{8}, \quad \frac{8}{24} = \frac{2}{6}, \quad \frac{8}{2} = \frac{24}{6}.$$

Tương tự với các tích $6 \,.\, 24 = 8 \,.\, 18$ và $8 \,.\, 24 = 6 \,.\, 32$. Tất cả có $4 \,.\, 3 = 12$ tỉ lệ thức.

Ví dụ 7

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ (giả thiết $a \neq b$, $c \neq d$ và mỗi số a, b, c, d khác 0).

Giải :

Cách 1. Để chứng minh $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$, ta xét tích $a(c-d)$ và $c(a-b)$.

Ta có $$a(c-d) = ac - ad \qquad (1)$$

$$c(a-b) = ac - bc \qquad (2)$$

Ta lại có $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $a(c-d) = c(a-b)$. Do đó $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$.

Cách 2. Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ thì $a = bk$, $c = dk$. Ta tính giá trị của các tỉ số $\frac{a}{a-b}$ và $\frac{c}{c-d}$ theo k :

$$\frac{a}{a-b} = \frac{bk}{bk-b} = \frac{bk}{b(k-1)} = \frac{k}{k-1} \quad (1)$$

$$\frac{c}{c-d} = \frac{dk}{dk-d} = \frac{dk}{d(k-1)} = \frac{k}{k-1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$.

Cách 3. Hoán vị các trung tỉ của tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ được $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d}$.

Hoán vị các trung tỉ của $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{c-d}$ được $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$.

Cách 4. $\quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{d}{c} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}.$$

Như vậy để chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ta thường dùng hai phương pháp chính :

Phương pháp 1 : Chứng tỏ rằng ad = bc.

Phương pháp 2 : Chứng tỏ rằng hai tỉ số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ có cùng một giá trị. Nếu trong đề bài đã cho trước một tỉ lệ thức khác, ta có thể đặt giá trị của mỗi tỉ số ở tỉ lệ thức đã cho bằng k, rồi tính giá trị của mỗi tỉ số ở tỉ lệ thức phải chứng minh theo k (cách 2). Cũng có thể dùng các tính chất của tỉ lệ thức như hoán vị các số hạng, tính chất dãy tỉ số bằng nhau, tính chất của đẳng thức... để biến đổi từ tỉ lệ thức đã cho đến tỉ lệ thức phải chứng minh (cách 3, cách 4).

Ví dụ 8

Cho tỉ lệ thức $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$. Biết rằng xy = 90. Tính x và y.

Giải :

Cách 1. Hiển nhiên $x \neq 0$. Nhân cả hai vế của $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ với x, ta có $\frac{x^2}{2} = \frac{xy}{5}$

nên $\frac{x^2}{2} = \frac{90}{5} = 18$ suy ra $x^2 = 36$. Do đó $x = \pm 6$.

Vậy $x_1 = 6, y_1 = 15$; $x_2 = -6$; $y_2 = -15$.

Cách 2. Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = k$ thì $x = 2k$, $y = 5k$. Thay các giá trị này vào $xy = 90$ được $10k^2 = 90 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 3$. Suy ra kết quả như trên.

Chú ý : Cần tránh sai lầm áp dụng "tương tự" tính chất dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{xy}{2.5} \text{ (!)}$$

Bài tập

53. Tìm số hữu tỉ x trong tỉ lệ thức :

a) $0{,}4 : x = x : 0{,}9$;

b) $13\frac{1}{3} : 1\frac{1}{3} = 26 : (2x - 1)$;

c) $0{,}2 : 1\frac{1}{5} = \frac{2}{3} : (6x + 7)$;

d) $\frac{37 - x}{x + 13} = \frac{3}{7}$.

54. Cho tỉ lệ thức $\frac{3x - y}{x + y} = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$.

55. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng ta có các tỉ lệ thức sau (giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa) :

a) $\frac{2a + 3b}{2a - 3b} = \frac{2c + 3d}{2c - 3d}$;

b) $\frac{ab}{cd} = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2}$;

c) $\left(\frac{a + b}{c + d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$.

56. Chứng minh rằng ta có tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nếu có một trong các đẳng thức sau (giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa) :

a) $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$.

b) $(a + b + c + d)(a - b - c + d) = (a - b + c - d)(a + b - c - d)$.

57. Cho tỉ lệ thức $\frac{a + b + c}{a + b - c} = \frac{a - b + c}{a - b - c}$ trong đó $b \neq 0$. Chứng minh rằng $c = 0$.

58. Cho tỉ lệ thức $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$. Chứng minh rằng a = c hoặc a + b + c + d = 0.

59. Có thể lập được một tỉ lệ thức từ bốn trong các số sau không (mỗi số chỉ chọn một lần) ? Nếu có thì lập được bao nhiêu tỉ lệ thức ?

a) 3, 4, 5, 6, 7 ; b) 1, 2, 4, 8, 16 ; c) 1, 3, 9, 27, 81, 243.

60. Cho bốn số 2, 4, 8, 16. Tìm số hữu tỉ x cùng với ba trong bốn số trên lập được thành một tỉ lệ thức.

~ ***Bài tập :*** 107, 229.

§5. TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Nếu có n tỉ số bằng nhau (n ≥ 2) : $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ thì

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} = \frac{a_1 - a_2 + a_3 + \dots - a_n}{b_1 - b_2 + b_3 + \dots - b_n} = \dots$$

(nếu đặt dấu "–" trước số hạng trên của tỉ số nào thì cũng đặt dấu "–" trước số hạng dưới của tỉ số đó).

Ta gọi tính chất này là tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

Tính chất dãy tỉ số bằng nhau cho ta một khả năng rộng rãi để từ một số tỉ số bằng nhau cho trước, ta lập được những tỉ số mới bằng các tỉ số đã cho, trong đó số hạng trên hoặc số hạng dưới của nó có dạng thuận lợi nhằm sử dụng các dữ kiện của bài toán.

Ví dụ 9

Tìm các số x, y, z biết rằng : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$, $\frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và 2x + 3y – z = 186.

Giải :

Từ giả thiết ta có : $\frac{x}{15} = \frac{y}{20}$, $\frac{y}{20} = \frac{z}{28}$. Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{2x + 3y - z}{30 + 60 - 28} = \frac{186}{62} = 3.$$

Suy ra x = 45, y = 60, z = 84.

Ví dụ 10

Ví dụ 10

Tìm các số x, y, z, biết rằng :

$$\frac{y+z+1}{x}=\frac{x+z+2}{y}=\frac{x+y-3}{z}=\frac{1}{x+y+z}.$$

Giải : Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{y+z+1}{x}=\frac{x+z+2}{y}=\frac{x+y-3}{z}=\frac{1}{x+y+z}=$$

$$=\frac{(y+z+1)+(x+z+2)+(x+y-3)}{x+y+z}=$$

$$=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2$$ (vì $x+y+z\neq 0$). Do đó $x+y+z=0,5$.

Thay kết quả này vào đề bài ta được :

$$\frac{0,5-x+1}{x}=\frac{0,5-y+2}{y}=\frac{0,5-z-3}{z}=2$$

tức là $$\frac{1,5-x}{x}=\frac{2,5-y}{y}=\frac{-2,5-z}{z}=2.$$

Vậy $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{5}{6},\ z=\frac{-5}{6}.$

Bài tập

61. Tìm các số x, y, z, biết rằng :

a) $\frac{x}{10}=\frac{y}{6}=\frac{z}{21}$ và $5x+y-2z=28$;

b) $3x=2y,\ 7y=5z,\ x-y+z=32$;

c) $\frac{x}{3}=\frac{y}{4},\ \frac{y}{3}=\frac{z}{5},\ 2x-3y+z=6$;

d) $\frac{2x}{3}=\frac{3y}{4}=\frac{4z}{5}$ và $x+y+z=49$;

e) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ và $2x+3y-z=50$;

g) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$ và $xyz=810$.

62. Tìm x, biết rằng $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$.

63. Tìm phân số $\frac{a}{b}$ biết rằng nếu cộng thêm cùng một số khác 0 vào tử và mẫu thì giá trị của phân số đó không đổi.

64. Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$.

65. Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Chứng minh rằng a = b = c.

66. Vì sao tỉ số của hai hỗn số dạng $a\frac{1}{b}$ và $b\frac{1}{a}$ luôn luôn bằng phân số $\frac{a}{b}$?

(Chẳng hạn $3\frac{1}{5} : 5\frac{1}{3} = \frac{3}{5}$).

67. Cho ba tỉ số bằng nhau là $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$, $\frac{c}{a+b}$.

Tìm giá trị của mỗi tỉ số đó.

~ ***Ví dụ :*** 16 đến 20.

Bài tập : 106, 108 đến 111, 113 đến 123, 272, 276.

§6. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

Xem chuyên đề cùng tên ở phần *Chuyên đề*.

~ ***Ví dụ :*** 21, 22.

Bài tập : 124 đến 132.

§7. SỐ VÔ TỈ. CĂN BẬC HAI. SỐ THỰC

Mọi số hữu tỉ đều biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn đều biểu diễn một số hữu tỉ.

Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Tập hợp các số thực **R** bao gồm tập hợp số hữu tỉ **Q** và tập hợp số vô tỉ **I**.

Cho số a không âm. Căn bậc hai của a là số x mà $x^2 = a$. Căn bậc hai không âm của a kí hiệu là $\sqrt{a}$.

Nếu n là số tự nhiên mà không là số chính phương thì $\sqrt{n}$ là số vô tỉ.

Ví dụ 11

Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{15}$ là số vô tỉ.

b) Nếu số tự nhiên a không phải là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.

Giải :

a) *Cách 1*. Giả sử $\sqrt{15}$ là số hữu tỉ, như vậy $\sqrt{15}$ có thể viết được dưới dạng :

$$\sqrt{15} = \frac{m}{n} \text{ với } m, n \in \mathbf{N}, (m, n) = 1.$$

Suy ra $m^2 = 15n^2$ (1), do đó $m^2 \vdots 3$. Ta lại có 3 là số nguyên tố nên $m \vdots 3$ (2).

Đặt $m = 3k$ ($k \in \mathbf{N}$). Thay vào (1) ta được $9k^2 = 15n^2$ nên $3k^2 = 5n^2$ suy ra $5n^2 \vdots 3$.

Do $(5, 3) = 1$ nên $n^2 \vdots 3$, do đó $n \vdots 3$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra m và n cùng chia hết cho 3, trái với $(m, n) = 1$.

Như vậy $\sqrt{15}$ không là số hữu tỉ, do đó $\sqrt{15}$ là số vô tỉ.

Cách 2. Giả sử $\sqrt{15}$ là số hữu tỉ thì nó viết được dưới dạng :

$$\sqrt{15} = \frac{m}{n} \text{ với } m, n \in \mathbf{N}, (m, n) = 1.$$

Do 15 không là số chính phương nên $\frac{m}{n}$ không là số tự nhiên, do đó $n > 1$.

Ta có $m^2 = 15n^2$. Gọi p là ước nguyên tố nào đó của n, thế thì $m^2 \vdots p$, do đó $m \vdots p$. Như vậy p là ước nguyên tố của m và n, trái với $(m, n) = 1$.

Vậy $\sqrt{15}$ phải là số vô tỉ.

b) Giải tương tự như cách 2 của câu a.

Bài tập

68. Tính :

a) $\sqrt{0,36}+\sqrt{0,49}$;

b) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}-\sqrt{\dfrac{25}{36}}$.

69. Tìm x, biết :

a) $x^2=81$;

b) $(x-1)^2=\dfrac{9}{16}$;

c) $x-2\sqrt{x}=0$;

d) $x=\sqrt{x}$.

70. Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Chứng minh rằng với $x=\dfrac{16}{9}$ và $x=\dfrac{25}{9}$ thì A có giá trị là số nguyên.

71. Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$. Tìm số nguyên x để A có giá trị là một số nguyên.

72. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{2}$ là số vô tỉ ;

b) $5-\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

73. a) Có hai số vô tỉ nào mà tích là một số hữu tỉ hay không ?

b) Có hai số vô tỉ dương nào mà tổng là một số hữu tỉ hay không ?

74. Kí hiệu [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (xem chú thích ở bài tập 4). Tính giá trị của tổng :

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+[\sqrt{4}]+\ldots+[\sqrt{35}].$$

75. Cho các số thực a và b sao cho các tập hợp $\{a^2+a\ ;\ b\}$ và $\{b^2+b\ ;\ b\}$ bằng nhau. Chứng minh rằng a = b.

~ ***Bài tập :*** 144 đến 147.

Chương II

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

§8. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

Trong toán học và trong thực tiễn, ta thường gặp những đại lượng thay đổi phụ thuộc vào sự thay đổi của đại lượng khác.

Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x bởi công thức y = ax, với a là một hằng số khác 0 thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ a.

Nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận thì tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Ví dụ 12

Hai con gà trong 1,5 ngày đẻ 2 quả trứng. Hỏi bốn con gà trong 1,5 tuần đẻ bao nhiêu quả trứng ?

Giải : Số gà tăng gấp 2 lần, số ngày tăng gấp 7 lần (1 tuần = 7 ngày) nên số trứng đẻ được tăng gấp 2 . 7 lần.

Số trứng phải tìm là 2 . 2 . 7 = 28 (quả).

Bài tập

76. Viết công thức biểu thị sự phụ thuộc giữa :

a) Chu vi C của hình vuông và cạnh x của nó ;

b) Chu vi C của đường tròn và bán kính R của nó.

77. a) Một hình chữ nhật có một cạnh bằng 5cm. Viết công thức biểu thị sự phụ thuộc giữa diện tích S (cm^2) của hình chữ nhật và cạnh kia x (cm) của nó.

b) Một hình tam giác có đáy bằng 4cm. Viết công thức biểu thị sự phụ thuộc giữa diện tích S (cm^2) của hình tam giác và chiều cao h (cm) của nó.

78. Viết công thức cho tương ứng một số hữu tỉ x với số đối của nó.

79. Một công nhân tiện 30 đinh ốc cần 45 phút. Hỏi trong 1 giờ 15 phút, người đó tiện được bao nhiêu đinh ốc ?

80. Biết rằng a công nhân làm trong b ngày được c dụng cụ. Tính xem b công nhân làm trong bao nhiêu ngày được a dụng cụ ?

81. 10 chàng trai câu được 10 con cá trong 5 phút. Hỏi 50 chàng trai câu được 50 con cá trong bao nhiêu phút ?

82. Một con ngựa ăn hết một xe cỏ trong 4 ngày. Một con dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày. Một con cừu ăn hết một xe cỏ trong 12 ngày. Hỏi cả ba con ăn hết một xe cỏ trong bao lâu ?

83. Một hình chữ nhật lớn được chia thành bốn hình chữ nhật nhỏ như ở hình 1 với các diện tích (tính bằng m^2) được cho trong hình. Diện tích x của hình chữ nhật còn lại bằng : A) $72m^2$; B) 49 m^2 ; C) 81 m^2 ; D) 90 m^2.

36	28
x	63

Hình 1

Hãy chọn câu trả lời đúng.

84*. Có ba chiếc đồng hồ có kim. Chiếc thứ nhất là một đồng hồ chết ; chiếc thứ hai là một đồng hồ treo tường, mỗi ngày chậm một phút ; chiếc thứ ba là một đồng hồ đeo tay, mỗi giờ chậm một phút. Hỏi chiếc đồng hồ nào chỉ giờ đúng nhiều lần nhất ?

§9. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x bởi công thức $y = \frac{a}{x}$, với a là một hằng số khác 0 thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a.

Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch thì tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}.$$

Ví dụ 13

Để làm một công việc, người ta cần huy động 40 người làm trong 12 giờ. Nếu số người tăng thêm 8 người thì thời gian hoàn thành giảm được mấy giờ ?

Giải : Gọi thời gian hoàn thành công việc sau khi đã bổ sung thêm người là x giờ. Ta có :

Số người	Thời gian (giờ)
40	12
48	x

Do khối lượng công việc không đổi nên số người làm việc và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do đó :

$$\frac{40}{48} = \frac{x}{12}. \quad \text{Suy ra } x = \frac{12 \cdot 40}{48} = 10.$$

Thời gian hoàn thành công việc là 10 giờ, giảm được :

$$12 - 10 = 2 \text{ (giờ)}.$$

Bài tập

85. a) Một hình chữ nhật có diện tích $12cm^2$. Viết công thức biểu thị sự phụ thuộc giữa một cạnh có độ dài y (cm) và cạnh kia có độ dài x (cm) của hình chữ nhật.

b) Một tam giác có diện tích $10cm^2$. Viết công thức biểu thị sự phụ thuộc giữa một cạnh có độ dài y (cm) và đường cao tương ứng có độ dài x (cm) của tam giác đó.

86. Viết công thức cho tương ứng một số hữu tỉ x khác 0 với số nghịch đảo của nó.

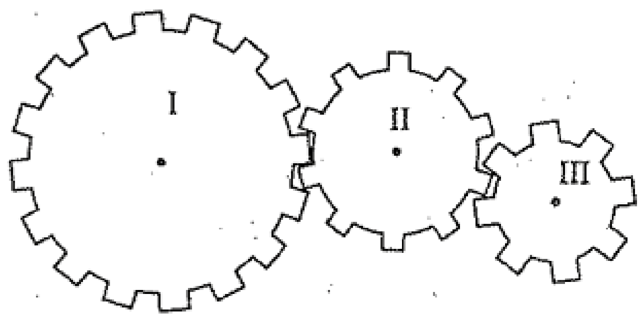
87. Người thợ thứ nhất làm một dụng cụ cần 12 phút, người thợ thứ hai làm một dụng cụ chỉ cần 8 phút. Hỏi trong thời gian người thứ nhất làm được 48 dụng cụ thì người thứ hai làm được bao nhiêu dụng cụ ?

88. Một bánh xe răng cưa có 75 răng, mỗi phút quay 56 vòng. Một bánh xe khác có 35 răng ăn khớp với các răng của bánh xe trên thì trong một phút quay được bao nhiêu vòng ?

89. Đĩa xe đạp có 48 răng, còn líp (gắn vào bánh sau của xe đạp) có 18 răng. Khi bánh xe đạp quay một vòng thì đùi đĩa quay đi một góc bao nhiêu độ ?

90. Trong một hệ thống bánh xe răng cưa chuyển động khớp với nhau, ba bánh xe I, II, III có số răng theo thứ tự bằng 15, 10, 8 răng (h.2). Vận tốc quay của ba bánh xe đó (tính theo vòng/phút) theo thứ tự tỉ lệ với :

A) 15 ; 10 ; 8 ;



Hình 2

B) 8 ; 10 ; 15 ;

C) 8 ; 12 ; 15 ;

D) 10 ; 15 ; 20.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

91. Tuấn và Hùng đều uống hai viên vitamin C mỗi ngày, còn Dũng uống một viên mỗi ngày. Số thuốc đủ dùng cho cả ba người trong 30 ngày. Nếu Dũng cũng uống hai viên mỗi ngày thì số thuốc ấy dùng hết trong bao lâu ?

92. Có ba máy, mỗi máy làm 4 giờ trong mỗi ngày thì sau 9 ngày làm xong công việc. Hỏi cần bao nhiêu máy, mỗi máy làm 6 giờ trong mỗi ngày để 3 ngày làm xong công việc ấy ?

93. Cho hai đại lượng I và II tỉ lệ nghịch với nhau có giá trị dương. Nếu giá trị của đại lượng I tăng thêm 10% thì giá trị tương ứng của đại lượng II giảm đi :

A) 10% ; B) $90\frac{10}{11}\%$; C) 9% ; D) $9\frac{1}{11}\%$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

§10. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số.

Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức...

Đồ thị của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng (x ; y) trên mặt phẳng toạ độ.

Ví dụ 14

Cho $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = -3x$, $h(x) = x^2$, $k(x) = x^3$.

a) Tính $f(-1)$; $g\left(\frac{1}{2}\right)$; $h(a)$; $k(2a)$.

b) Tính $f(-2) + g(3) + h(0)$.

c) Tính x_1, x_2, x_3, x_4, biết rằng $f(x_1) = \frac{1}{2}$; $g(x_2) = 3$; $h(x_3) = 9$; $k(x_4) = -8$.

d) Vì sao hàm số $f(x)$ có tính chất $f(-x) = -f(x)$? Trong các hàm số còn lại, hàm số nào cũng có tính chất tương tự như trên ?

Giải :

a) $f(-1) = \frac{4}{-1} = -4$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = -3.\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$; $h(a) = a^2$; $k(2a) = (2a)^3 = 8a^3$.

b) $f(-2) + g(3) + h(0) = \frac{4}{-2} + (-3).3 + 0^2 = -2 - 9 + 0 = -11$.

c) $f(x_1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{x_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 8$;

$g(x_2) = 3 \Rightarrow -3x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = -1$;

$h(x_3) = 9 \Rightarrow x_3^2 = 9 \Rightarrow x_3 = \pm 3$;

$k(x_4) = -8 \Rightarrow x_4^3 = -8 \Rightarrow x_4 = -2$.

d) $f(-x) = \frac{4}{-x}$; $-f(x) = -\frac{4}{x}$. Vậy $f(-x) = -f(x)$.

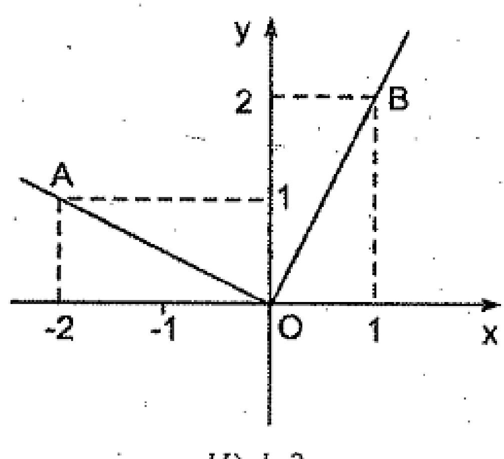
Các hàm số $g(x)$, $k(x)$ cũng có tính chất $g(-x) = -g(x)$, $k(-x) = -k(x)$.

Hàm số $h(x)$ không có tính chất đó mà có tính chất $h(-x) = h(x)$.

Ví dụ 15

Vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \begin{cases} 2x \text{ với } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x \text{ với } x < 0. \end{cases}$$



Hình 3

Giải :

Với $x \geq 0$ thì $y = 2x$.

Với $x < 0$ thì $y = -\frac{1}{2}x$.

Đồ thị của hàm số gồm hai tia OA, OB trong đó $A(-2 ; 1)$ và $B(1 ; 2)$ như trên hình 3.

Bài tập

Hàm số

94. Viết công thức cho tương ứng giữa :

a) Diện tích S của hình vuông và cạnh x của nó ;

b) Diện tích S của hình tròn và bán kính R của nó.

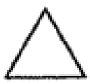
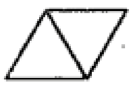
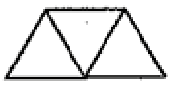
95. Giầy cỡ 36 ứng với khoảng cách d từ gót chân đến mũi ngón chân là 23cm. Khi khoảng cách d tăng (hay giảm) $\frac{2}{3}$cm thì cỡ giầy tăng (hay giảm) 1 số.

Hãy điền số thích hợp vào các ô trống trong bảng sau :

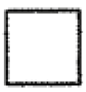
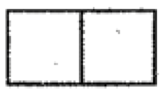
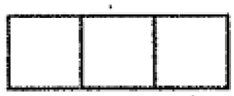
d(cm)	19		23			25
Cỡ giầy		33	36	37	38	

96. Cho các hàm số $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -2x$, $f_3(x) = 1$, $f_4(x) = 5$, $f_5(x) = \frac{1}{x}$, $f_6(x) = x^2$. Trong các hàm số trên, hàm số nào có tính chất $f(-x) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $f(x_1x_2) = f(x_1) . f(x_2)$?

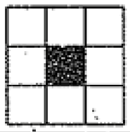
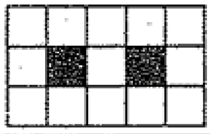
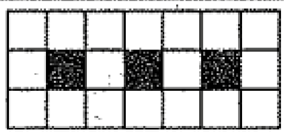
97. Viết công thức cho tương ứng giữa số que diêm (y) và số tam giác tạo thành (x) được nêu trong bảng sau :

Hình vẽ				...
Số tam giác (x)	1	2	3	...
Số que diêm (y)	3	5	7	...

98. Viết công thức cho tương ứng giữa số que diêm (y) và số hình vuông tạo thành (x) được nêu trong bảng sau :

Hình vẽ				...
Số hình vuông (x)	1	2	3	...
Số que diêm (y)	4	7	10	...

99. Viết công thức cho tương ứng giữa số hình vuông trắng (y) và số hình vuông đen (x) được nêu trong bảng sau :

Hình vẽ				...
Số hình vuông đen (x)	1	2	3	...
Số hình vuông trắng (y)	8	13	18	...

Đồ thị hàm số y = ax

100. Xác định hệ số a, biết rằng đồ thị của hàm số $y = ax$ đi qua điểm $A(6 ; -2)$. Điểm $B(-9 ; 3)$, điểm $C(7 ; -2)$ có thuộc đồ thị của hàm số không ? Tìm trên đồ thị của hàm số điểm D có hoành độ bằng -4, điểm E có tung độ bằng 2.

101. Vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = \begin{cases} 2x \text{ với } x \geq 0 \\ x \text{ với } x < 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 2x \text{ với } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x \text{ với } x < 0 \end{cases}$

102. Cho biểu thức 4x. Hãy lí luận để chứng tỏ rằng biểu thức đó không có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.

Đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}$

103. Xác định hệ số a, biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}$ đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; -8\right)$.

Điểm $B(1 ; 4)$, điểm $C(-2 ; 2)$ có thuộc đồ thị của hàm số không ? Tìm trên đồ thị điểm D có hoành độ bằng 6, điểm E có tung độ bằng 4.

104. Vẽ đồ thị các hàm số $y = \frac{1}{x}$ và $y = 1$ trên cùng hệ trục toạ độ xOy rồi dùng đồ thị để tìm các giá trị của x sao cho $\frac{1}{x} < 1$.

105. Hãy dùng đồ thị để chứng tỏ rằng biểu thức $\frac{5}{x}$ không có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.

~ ***Ví dụ :*** 44 đến 46.

Bài tập : 165, 166.

CHUYÊN ĐỀ

CHIA TỈ LỆ

Trong các bài toán về chia một số thành các phần tỉ lệ thuận hoặc tỉ lệ nghịch với các số cho trước, cần chú ý rằng :

1) x, y, z tỉ lệ thuận với a, b, c $\Leftrightarrow x : y : z = a : b : c$ (tức là $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$).

2) x, y, z tỉ lệ nghịch với m, n, p $\Leftrightarrow x : y : z = \frac{1}{m} : \frac{1}{n} : \frac{1}{p}$.

Ví dụ 16(5)

Hai xe ô tô cùng khởi hành một lúc từ hai địa điểm A và B. Xe thứ nhất đi quãng đường AB hết 4 giờ 15 phút, xe thứ hai đi quãng đường BA hết 3 giờ 45 phút. Đến chỗ gặp nhau, xe thứ hai đi được quãng đường dài hơn quãng đường xe thứ nhất đã đi là 20 km. Tính quãng đường AB.

Giải : Cùng đi một quãng đường AB, vận tốc của hai xe tỉ lệ nghịch với thời gian hai xe đi trên quãng đường đó. Do đó, tỉ số vận tốc của xe thứ nhất so với xe thứ hai bằng :

$$3\frac{3}{4} : 4\frac{1}{4} = 15 : 17.$$

Cùng đi một thời gian từ chỗ khởi hành đến chỗ gặp nhau, quãng đường hai xe đi được (gọi là s_1 và s_2) tỉ lệ thuận với vận tốc của hai xe. Do đó $s_1 : s_2 = 15 : 17$. Mặt khác $s_2 - s_1 = 20$.

Ta có : $$\frac{s_1}{15} = \frac{s_2}{17} = \frac{s_2 - s_1}{17 - 15} = \frac{20}{2} = 10.$$

Vậy $s_1 = 150$, $s_2 = 170$. Quãng đường AB là 320 km.

Ví dụ 17(5)

Để đi từ A đến B có thể dùng các phương tiện : máy bay, ô tô, xe lửa. Vận tốc của máy bay, ô tô, xe lửa tỉ lệ với 6 ; 2 ; 1. Biết rằng thời gian đi từ A đến B bằng máy bay ít hơn so với đi bằng ô tô là 6 giờ. Hỏi thời gian xe lửa đi quãng đường AB là bao lâu ?

Giải : Gọi t_1, t_2, t_3 (giờ) theo thứ tự là thời gian máy bay, ô tô, xe lửa đi từ A đến B. Cùng đi một quãng đường, thời gian tỉ lệ nghịch với vận tốc nên :

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} : 1 = 1 : 3 : 6. \text{ Ta lại có } t_2 - t_1 = 6.$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{t_1}{1} = \frac{t_2}{3} = \frac{t_3}{6} = \frac{t_2 - t_1}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3. \text{ Do đó } t_3 = 18.$$

Thời gian xe lửa đi quãng đường AB là 18 giờ.

Ví dụ 18(5)

Ba kho A, B, C chứa một số gạo. Người ta nhập vào kho A thêm $\frac{1}{7}$ số gạo của kho đó, xuất ở kho B đi $\frac{1}{9}$ số gạo của kho đó, xuất ở kho C đi $\frac{2}{7}$ số gạo của kho đó. Khi đó số gạo của ba kho bằng nhau. Tính số gạo ở mỗi kho lúc đầu, biết rằng kho B chứa nhiều hơn kho A là 20 tạ gạo.

Giải : Gọi số gạo lúc đầu ở mỗi kho A, B, C theo thứ tự là a, b, c (tạ). Ta có :

$$\frac{8}{7}a = \frac{8}{9}b = \frac{5}{7}c \ (1) \text{ và } b - a = 20 \ (2).$$

Chia cả ba tỉ số của (1) cho 40 (BCNN của 8 và 5) ta được :

$$\frac{a}{35} = \frac{b}{45} = \frac{c}{56} = \frac{b-a}{45-35} = \frac{20}{10} = 2.$$

Từ đó : $a = 70$, $b = 90$, $c = 112$.

Số gạo ở mỗi kho A, B, C lúc đầu theo thứ tự là : 70 tạ, 90 tạ, 112 tạ.

Ví dụ 19(5)

Ba đội công nhân I, II, III phải vận chuyển tổng cộng 1530 kg hàng từ kho theo thứ tự đến ba địa điểm cách kho 1500m, 2000m, 3000m. Hãy phân chia số hàng cho mỗi đội sao cho khối lượng hàng tỉ lệ nghịch với khoảng cách cần chuyển.

Giải : Để chia 1530 kg thành ba phần tỉ lệ nghịch với 1500 ; 2000 ; 3000, ta chia nó thành ba phần tỉ lệ thuận với $\frac{1}{1500}$; $\frac{1}{2000}$; $\frac{1}{3000}$ tức là tỉ lệ thuận với 4 ; 3 ; 2 (bằng cách nhân mỗi phân số với 6000, là BCNN của 1500, 2000, 3000).

Gọi x, y, z (kg) theo thứ tự là số hàng của đội I, II, III phải vận chuyển. Ta có :

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x+y+z}{4+3+2} = \frac{1530}{9} = 170.$$

Từ đó : $x = 680$, $y = 510$, $z = 340$.

Số hàng của đội I, II, III phải vận chuyển theo thứ tự là : 680 kg, 510 kg, 340 kg.

Ví dụ 20(5)

Ba xí nghiệp cùng xây dựng chung một cái cầu hết 38 triệu đồng. Xí nghiệp I có 40 xe ở cách cầu 1,5km, xí nghiệp II có 20 xe ở cách cầu 3km, xí nghiệp III có 30 xe ở cách cầu 1km.

Hỏi mỗi xí nghiệp phải trả cho việc xây dựng cầu bao nhiêu tiền, biết rằng số tiền phải trả tỉ lệ thuận với số xe và tỉ lệ nghịch với khoảng cách từ xí nghiệp đến cầu ?

Giải : Gọi x, y, z (triệu đồng) theo thứ tự là số tiền mỗi xí nghiệp I, II, III phải trả. Ta có :

$$x + y + z = 38\ ;$$

$$x : y : z = \frac{40}{1{,}5} : \frac{20}{3} : \frac{30}{1} = 8 : 2 : 9.$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{2} = \frac{z}{9} = \frac{x+y+z}{8+2+9} = \frac{38}{19} = 2.$$

Mỗi xí nghiệp I, II, III theo thứ tự phải trả : 16 triệu đồng, 4 triệu đồng, 18 triệu đồng.

Bài tập

106(5). a) Tính thời gian từ lúc hai kim đồng hồ gặp nhau lần trước đến lúc chúng gặp nhau lần tiếp theo.

b) Trong một ngày, hai kim đồng hồ tạo với nhau góc vuông bao nhiêu lần ?

107(4). Một ống dài được kéo bởi một máy kéo trên đường. Tuấn chạy dọc từ đầu ống đến cuối ống theo hướng chuyển động của máy kéo thì đếm được 140 bước. Sau đó Tuấn quay lại chạy dọc ống theo chiều ngược lại thì đếm được 20 bước. Biết rằng mỗi bước chạy của Tuấn dài 1m. Hãy tính độ dài của ống.

108(5). Năm lớp 7A, 7B, 7C, 7D, 7E nhận chăm sóc vườn trường có diện tích $300m^2$. Lớp 7A nhận 15% diện tích vườn, lớp 7B nhận $\frac{1}{5}$ diện tích còn lại.

Diện tích còn lại của vườn sau khi hai lớp trên nhận được đem chia cho ba lớp 7C, 7D, 7E tỉ lệ với $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{16}$. Tính diện tích vườn giao cho mỗi lớp.

109(5). Ba công nhân được thưởng 100000 đồng, số tiền thưởng được phân chia tỉ lệ với mức sản xuất của mỗi người. Biết mức sản xuất của người thứ nhất so với mức sản xuất của người thứ hai bằng 5 : 3, mức sản xuất của người thứ ba bằng 25% tổng số mức sản xuất của hai người kia. Tính số tiền mỗi người được thưởng.

110(5). Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 7 ; 6 ; 5. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ với 6 ; 5 ; 4. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là $6m^3$ đất. Tính số đất đã phân chia cho mỗi đội.

111(5). Trong một đợt lao động, ba khối 7, 8, 9 chuyển được $912m^3$ đất. Trung bình mỗi học sinh khối 7, 8, 9 theo thứ tự làm được $1,2m^3$; $1,4m^3$; $1,6m^3$. Số học sinh khối 7 và khối 8 tỉ lệ với 1 và 3, số học sinh khối 8 và khối 9 tỉ lệ với 4 và 5. Tính số học sinh của mỗi khối.

112(5). Ba tổ công nhân có mức sản xuất tỉ lệ với 5 ; 4 ; 3. Tổ I tăng năng suất 10%, tổ II tăng năng suất 20%, tổ III tăng năng suất 10%. Do đó trong cùng một thời gian, tổ I làm được nhiều hơn tổ II là 7 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ đã làm được trong thời gian đó.

113(5). Tìm ba số tự nhiên, biết rằng BCNN của chúng bằng 3150, tỉ số của số thứ nhất và số thứ hai là 5 : 9, tỉ số của số thứ nhất và số thứ ba là 10 : 7.

114(5). Ba tấm vải theo thứ tự giá 120 000 đồng, 192 000 đồng và 144 000 đồng. Tấm thứ nhất và tấm thứ hai có cùng chiều dài, tấm thứ hai và tấm thứ ba có cùng chiều rộng. Tổng của ba chiều dài là 110m, tổng của ba chiều rộng là 2,1m. Tính kích thước của mỗi tấm vải, biết rằng giá 1 m^2 của ba tấm vải bằng nhau.

115(5). Có ba gói tiền : gói thứ nhất gồm toàn tờ 500 đồng, gói thứ hai gồm toàn tờ 2000 đồng, gói thứ ba gồm toàn tờ 5000 đồng. Biết rằng tổng số tờ giấy bạc của ba gói là 540 tờ và số tiền ở các gói bằng nhau. Tính số tờ giấy bạc mỗi loại.

116(5). Ba công nhân tiện được tất cả 860 dụng cụ trong cùng một thời gian. Để tiện một dụng cụ, người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 6 phút, người thứ ba cần 9 phút. Tính số dụng cụ mỗi người tiện được.

117(5). Ba em bé : Ánh 5 tuổi, Bích 6 tuổi, Châu 10 tuổi được bà chia cho 42 chiếc kẹo. Số kẹo được chia tỉ lệ nghịch với số tuổi của mỗi em. Hỏi mỗi em được chia bao nhiêu chiếc kẹo ?

118(5). Tìm ba phân số, biết rằng tổng của chúng bằng $3\frac{3}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3 ; 4 ; 5, các mẫu của chúng tỉ lệ với 5 ; 1 ; 2.

119(5). Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 72 và các chữ số của nó nếu xếp từ nhỏ đến lớn thì tỉ lệ với 1 ; 2 ; 3.

120(5). Độ dài ba cạnh của một tam giác tỉ lệ với 2 ; 3 ; 4. Ba chiều cao tương ứng với ba cạnh đó tỉ lệ với ba số nào ?

121(5). Ba đường cao của tam giác ABC có độ dài bằng 4, 12, x. Biết rằng x là một số tự nhiên. Tìm x (cho biết mỗi cạnh của tam giác nhỏ hơn tổng hai cạnh kia và lớn hơn hiệu của chúng).

122(5). Cho tam giác ABC. Có góc ngoài của tam giác tại A, B, C tỉ lệ với 4 ; 5 ; 6. Các góc trong tương ứng tỉ lệ với các số nào ?

123(5). Tìm hai số khác 0 biết rằng tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ với 5 ; 1 ; 12.

SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

I – Viết phân số dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn

Ví dụ 21(6)

Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân :

a) $\frac{7}{25}$; $\frac{3}{40}$;   b) $\frac{7}{33}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{7}{22}$.

Giải :

a) *Cách 1.* Chia tử cho mẫu :

$$\frac{7}{25} = 0,28 \ ; \quad \frac{3}{40} = 0,075.$$

Cách 2. Phân tích mẫu ra thừa số rồi bổ sung các thừa số phụ để mẫu là lũy thừa của 10 :

$$\frac{7}{25} = \frac{7}{5^2} = \frac{7.2^2}{5^2.2^2} = \frac{28}{100} = 0,28 \ ;$$

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3.5} = \frac{3.5^2}{2^3.5^3} = \frac{75}{1000} = 0,075.$$

b) $\frac{7}{33} = 0{,}2121\ldots$; $\frac{1}{7} = 0{,}1428571428\ldots$; $\frac{7}{22} = 0{,}31818\ldots$

Nhận xét : Qua ví dụ trên ta thấy :

1. Nếu một phân số tối giản mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

2. Nếu một phân số tối giản mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì không viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn. Phân số đó viết thành số thập phân vô hạn, trong đó có những nhóm chữ số được lặp lại, nhóm chữ số đó gọi là *chu kì*, số thập phân vô hạn đó gọi là *tuần hoàn*. Số thập phân có nguồn gốc từ phân số nếu vô hạn thì phải tuần hoàn. Chẳng hạn khi chia 1 cho 7, ta được số thập phân vô hạn, số dư trong phép chia này chỉ có thể là 1, 2, 3, 4, 5, 6, nên nhiều nhất đến số dư thứ bảy, số dư phải lặp lại, do đó các nhóm chữ số ở thương cũng lặp lại, và số thập phân vô hạn phải tuần hoàn. Ta có :

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$$

3. Để viết gọn số thập phân vô hạn tuần hoàn, người ta đặt chu kì trong dấu ngoặc. Chẳng hạn :

$$\frac{7}{33} = 0{,}2121\ldots = 0{,}(21)\ ;\ \frac{7}{22} = 0{,}31818\ldots = 0{,}3(18).$$

Số $\frac{7}{33}$ cũng có thể viết dưới dạng 0,(2121) hoặc 0,2(12). So với cách viết 0,(21) có chu kì 21 thì cách viết thứ hai có chu kì lớn hơn, cách viết thứ ba có chữ số thập phân liền trước chu kì và chữ số cuối cùng của chu kì bằng nhau, ta không chọn những cách viết này.

4. Số thập phân vô hạn tuần hoàn gọi là *đơn* nếu chu kì bắt đầu ngay sau dấu phẩy, ví dụ 0,(21) ; gọi là *tạp* nếu chu kì không bắt đầu ngay sau dấu phẩy, phần thập phân đứng trước chu kì gọi là *phần bất thường*, ví dụ 0, 3(18) có chu kì là 18 và phần bất thường là 3.

II – Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số

Để viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,(21) ; 0,3(18) dưới dạng phân số, ta phải tính các tổng có vô số số hạng :

$$0{,}212121\ldots = \frac{21}{10^2} + \frac{21}{10^4} + \frac{21}{10^6} + \ldots\ ; \qquad 0{,}31818\ldots = \frac{3}{10} + \frac{18}{10^3} + \frac{18}{10^5} + \ldots$$

Các phép tính này sẽ được nghiên cứu ở lớp trên khi học về tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn.

Người ta đã chứng minh được các quy tắc sau :

Muốn viết phần thập phân của số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn dưới dạng phân số, ta lấy chu kì làm tử, còn mẫu là một số gồm các chữ số 9, số chữ số 9 bằng số chữ số của chu kì. Ví dụ :

$$0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}\ ; \quad 0,(21) = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}.$$

Muốn viết phần thập phân của số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp dưới dạng phân số, ta lấy số gồm phần bất thường và chu kì trừ đi phần bất thường làm tử, còn mẫu là một số gồm các chữ số 9 kèm theo các chữ số 0, số chữ số 9 bằng số chữ số của chu kì, số chữ số 0 bằng số chữ số của phần bất thường. Chẳng hạn :

$$5,1(6) = 5\frac{16-1}{90} = 5\frac{1}{6}\ ; \quad 0,3(18) = \frac{318-3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}.$$

Ta có thể đưa ra một cách minh hoạ các quy tắc trên. Gọi $x = 0,2121...$ thì :

$$\begin{array}{rl} 100\,x = & 21,2121... \\ -\qquad x = & 0,2121... \\ \hline 99\,x = & 21 \end{array}$$

$$\text{nên } x = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}.$$

Gọi $y = 0,3181818...$ thì :

$$\begin{array}{rl} 1000y = & 318,1818... \\ -\qquad 10y = & 3,1818... \\ \hline 990\,y = & 318 - 3 \end{array}$$

$$\text{nên } y = \frac{318-3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}.$$

Tuy nhiên, các minh hoạ nói trên không phải là các cách chứng minh chặt chẽ vì ở đây ta đã áp dụng các quy tắc tính của số thập phân hữu hạn vào các số vô hạn mà chưa chứng minh rằng điều đó có được phép hay không.

III – Điều kiện để phân số viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn hay tạp

Xét quy tắc viết số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn dưới dạng phân số :

$$0,(21) = \frac{21}{99} = \frac{7}{33},$$

tổng quát :

$$\overline{0,(a_1a_2...a_n)} = \frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{n}}.$$ Mẫu $\underbrace{99...9}_{n}$ không chia hết cho 2, không chia hết cho 5 nên đến khi phân số tối giản, mẫu không chứa thừa số nguyên tố 2 và 5.

Xét quy tắc viết số thập phân tuần hoàn tạp dưới dạng phân số :

$$0,3(18) = \frac{318-3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22},$$

tổng quát :

$$\overline{0,b_1b_2...b_k(a_1a_2...a_n)} = \frac{\overline{b_1b_2...b_ka_1a_2...a_n} - \overline{b_1b_2...b_k}}{\underbrace{99...9}_{n}\underbrace{00...0}_{k}}.$$ Mẫu $\underbrace{99...9}_{n}\underbrace{00...0}_{k}$ tận cùng bằng 0 mà tử tận cùng khác 0 (vì theo quy định viết chu kì ta có $b_k \neq a_n$) nên đến khi phân số tối giản, mẫu vẫn chứa thừa số 2, hoặc 5, hoặc cả 2 và 5.

Từ đó ta suy ra : *Một phân số tối giản mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì viết được thành số thập phân vô hạn tuần hoàn.* Đối với các phân số đó, nếu mẫu không có ước nguyên tố 2 và 5 thì viết được thành số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn, nếu mẫu có một trong các ước nguyên tố 2 và 5 thì viết được thành số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp.

Ví dụ 22(6)

Với mọi số tự nhiên $n \neq 0$, khi viết các phân số sau dưới dạng số thập phân, ta được số thập phân hữu hạn hay vô hạn ? Nếu là số thập phân vô hạn thì số đó là số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn hay tạp ?

a) $\dfrac{3n^2+3n}{12n}$; b) $\dfrac{6n+1}{12n}$.

Giải :

a) $\dfrac{3n^2+3n}{12n} = \dfrac{3n(n+1)}{12n} = \dfrac{n+1}{4}$, đổi ra số thập phân hữu hạn.

b) Tử $6n + 1$ không chia hết cho 3, mẫu chia hết cho 3 nên đến khi phân số tối giản, mẫu vẫn có ước là 3, do đó phân số đổi thành số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Tử $6n + 1$ là số lẻ, mẫu $12n$ là số chẵn nên đến khi phân số tối giản, mẫu vẫn có ước là 2, do đó số thập phân vô hạn tuần hoàn này là tạp.

Bài tập

124(6). Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân :

$$\frac{35}{56};\quad \frac{10}{15};\quad \frac{5}{11};\quad \frac{2}{13};\quad \frac{15}{82};\quad \frac{13}{22};\quad \frac{1}{60};\quad \frac{5}{24}.$$

125(6). Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số : 0,(27) ; 0,(703) ; 0,(571428) ; 2,01(6) ; 0,1(63) ; 2,41(3) ; 0,88(63).

126(6). Tìm các phân số tối giản có mẫu khác 1, biết rằng tích của tử và mẫu bằng 1260 và phân số này có thể viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

127(6). Cho số x = 0,12345... 998999 trong đó ở bên phải dấu phẩy ta viết các số từ 1 đến 999 liên tiếp nhau. Chữ số thứ 2003 ở bên phải dấu phẩy là chữ số :

A) 0 ; B) 3 ; C) 4 ; D) 7.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

128(6). Thay các chữ cái bởi các chữ số thích hợp :

a) $1 : \overline{0,abc} = a + b + c$;

b) $1 : \overline{0,0abc} = a + b + c + d$;

c) $\overline{0,x(y)} - \overline{0,y(x)} = 8 \cdot 0,0(1)$, biết rằng $x + y = 9$.

129(6). Thay các dấu * bởi các chữ số thích hợp :

$$\begin{array}{r|l}
\,\,* & *\,* \\ \cline{2-2}
-\quad *\,* & *,*\,*\,* \\ \cline{1-1}
\,\,* & \\
-\quad *\,* & \\ \cline{1-1}
\, & \\
-\quad *\,* & \\ \cline{1-1}
\, & \\
-\quad *\,* & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

130(6). Khi viết các phân số sau dưới dạng số thập phân, ta được số thập phân hữu hạn, hay vô hạn tuần hoàn đơn, hay vô hạn tuần hoàn tạp :

a) $\dfrac{35n+3}{70}$ $(n \in N)$; b) $\dfrac{10987654321}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ $(n \in N)$?

131*(6). Cho $A = \dfrac{1}{1,00...01}$ (số chia có 99 chữ số 0 sau dấy phảy). Tính A với 300 chữ số thập phân.

132*(6). Cho A là số lẻ không tận cùng bằng 5. Chứng minh rằng tồn tại một bội của A gồm toàn chữ số 9.

BẤT ĐẲNG THỨC

I – ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

Định nghĩa. $a > b$ nếu $a - b$ là số dương.

Tính chất. Cần chú ý đến các tính chất sau của bất đẳng thức :

1. Cộng cùng một số vào hai vế của bất đẳng thức :

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c.$$

2. Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương :

$$a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > bc.$$

3. Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số âm và đổi chiều bất đẳng thức :

$$a > b,\ c < 0 \Rightarrow ac < bc.$$

II – KHI NÀO MỘT BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ DƯƠNG HOẶC GIÁ TRỊ ÂM ?

Dạng 1. Biểu thức có dạng tổng, hiệu

Ví dụ 23(1)

Tìm các giá trị của x, sao cho :

a) Biểu thức $A = 2x - 1$ có giá trị dương ;

b) Biểu thức $B = 8 - 2x$ có giá trị âm.

Giải :

a) $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$. Với mọi $x > \dfrac{1}{2}$ thì $A > 0$.

b) $8 - 2x < 0 \Leftrightarrow 8 < 2x \Leftrightarrow 4 < x \Leftrightarrow x > 4$. Với mọi $x > 4$ thì $B < 0$.

Chú ý : Ta gọi $x = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm của nhị thức $2x - 1$; $x = 4$ là nghiệm của nhị thức $8 - 2x$. Đối với nhị thức bậc nhất $ax + b$ $(a \neq 0)$, nghiệm của nhị thức là $-\dfrac{b}{a}$. Người ta chứng minh được :

Với $x > -\frac{b}{a}$ thì nhị thức cùng dấu với hệ số a, còn với $x < -\frac{b}{a}$ thì nhị thức trái dấu với hệ số a.

Dạng 2. Biểu thức đưa về dạng tích

Ví dụ 24(1)

Tìm các giá trị của x để biểu thức $A = (x - 1)(x + 3)$ có giá trị âm.

Giải : $A < 0$ khi các thừa số $x - 1$ và $x + 3$ trái dấu.

Chú ý rằng $x - 1 < x + 3$ nên $A < 0$ xảy ra khi $x - 1 < 0$ và $x + 3 > 0$. Giải $x - 1 < 0$ được $x < 1$, giải $x + 3 > 0$ được $x > -3$.

Vậy nếu $-3 < x < 1$ thì $A < 0$.

Ví dụ 25(3)

Khi nào thì biểu thức $B = x^2 - 3x$ có giá trị dương ?

Giải : Biến đổi B thành một tích : $B = x(x - 3)$.

Cách 1. $B > 0$ khi các thừa số x và $x - 3$ cùng dấu. Chú ý rằng $x - 3 < x$ nên $B > 0$ xảy ra khi : số nhỏ dương (khi đó số lớn cũng dương), hoặc số lớn âm (khi đó số nhỏ cũng âm).

$$B > 0 \Leftrightarrow x - 3 > 0 \text{ hoặc } x < 0$$
$$\Leftrightarrow x > 3 \text{ hoặc } x < 0.$$

Cách 2. Chú ý rằng $x = 0$ và $x = 3$ làm cho các thừa số x và $x - 3$ bằng 0, do đó ta xét ba khoảng giá trị của x :

a) Với $x < 0$ thì hai thừa số đều âm, do đó $B > 0$.

b) Với $0 < x < 3$ thì hai thừa số trái dấu, do đó $B < 0$.

c) Với $x > 3$ thì hai thừa số đều dương, do đó $B > 0$.

$B > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 3$.

Có thể viết các kết quả trên trong một bảng xét dấu :

x		0		3	
x	–	0	+		+
x – 3	–		–	0	+
x(x – 3)	+	0	–	0	+

Dạng 3. Biểu thức có dạng thương

Ví dụ 26(1)

Tìm các giá trị của x để biểu thức $A = \dfrac{x+3}{x-1}$ có giá trị âm.

Giải : Tương tự như ví dụ 24, ta được $-3 < x < 1$.

III – KHI NÀO A > B HOẶC A < B ?

Công việc này chính là tìm giá trị của biến để biểu thức A – B có giá trị dương hoặc giá trị âm.

Ví dụ 27(1)

Cho biểu thức $A = \dfrac{x+5}{x+8}$. Tìm các giá trị của x để $A > 1$.

Giải :

Biến đổi : $A = \dfrac{x+5}{x+8} = \dfrac{x+8-3}{x+8} = 1 - \dfrac{3}{x+8}$.

Do đó : $A > 1$ suy ra $\dfrac{3}{x+8} < 0$ nên $x + 8 < 0$ hay $x < -8$.

Vậy với $x < -8$ thì $A > 1$.

Ví dụ 28(1)

Với các giá trị nào của x thì $\dfrac{3}{4}x - 1 > \dfrac{1}{2}x + 5$ (1) ?

Giải : Xét hiệu hai vế : $\left(\dfrac{3}{4}x - 1\right) - \left(\dfrac{1}{2}x + 5\right) = \dfrac{1}{4}x - 6$.

Ta có $\dfrac{1}{4}x - 6 > 0$ nên $\dfrac{1}{4}x > 6$ suy ra $x > 24$.

Vậy với $x > 24$ thì xảy ra bất đẳng thức (1).

Ví dụ 29(1)

Với giá trị nào của x thì $a + x > a - x$? $a + x < a - x$?

Giải : Xét hiệu hai vế : $(a + x) - (a - x) = 2x$.

Như vậy, nếu $x > 0$ thì $(a + x) - (a - x) > 0$, do đó $a + x > a - x$; nếu $x < 0$ thì $(a + x) - (a - x) < 0$, do đó $a + x < a - x$.

Ví dụ 30(3)

So sánh a^2 và a, số nào lớn hơn ?

Giải :

Xét hiệu $a^2 - a = a(a - 1)$. Chú ý rằng $a = 0$ và $a = 1$ làm cho các thừa số a và $a - 1$ bằng 0.

Ta xét các trường hợp :

a) Nếu $a < 0$ thì a và $a - 1$ đều âm, do đó $a^2 - a > 0$ nên $a^2 > a$.

b) Nếu $0 < a < 1$ thì $a > 0$, $a - 1 < 0$, do đó $a^2 - a < 0$ nên $a^2 < a$.

c) Nếu $a > 1$ thì a và $a - 1$ đều dương, do đó $a^2 - a > 0$ nên $a^2 > a$.

d) Còn nếu $a = 0$ hoặc $a = 1$ thì $a^2 = a$.

Ví dụ 31(3)

Chứng minh rằng trong hai số dương :

a) Số nào lớn hơn thì có bình phương lớn hơn.

b) Số nào có bình phương lớn hơn thì số đó lớn hơn.

Giải :

a) Cho $x > y > 0$. Cần chứng minh $x^2 > y^2$.

Nhân hai vế của $x > y$ với số dương x được $x^2 > xy$ (1).

Nhân hai vế của $x > y$ với số dương y được $xy > y^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $x^2 > y^2$.

b) Cho $x > 0$, $y > 0$ và $x^2 > y^2$. Cần chứng minh $x > y$.

Giả sử $x < y$ thì theo câu a ta có $x^2 < y^2$, trái với giả thiết.

Giả sử $x = y$ thì $x^2 = y^2$, trái với giả thiết.

Vậy $x > y$.

IV – TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC

Một biểu thức có thể có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất. Chẳng hạn xét biểu thức x^2. Biểu thức này có giá trị dương khi $x \neq 0$, có giá trị bằng 0 khi $x = 0$, như vậy x^2 có giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x = 0$. Biểu thức này không có giá trị lớn nhất. Thật vậy, giả sử x^2 có giá trị lớn nhất là m tại x_1 thì x^2 cũng bằng m tại x_2 là số đối của x_1. Giả sử $x_1 > 0$, ta sẽ chứng tỏ rằng tồn tại giá trị x_3 mà $x_3^2 > m$. Ta chọn $x_3 > x_1 > 0$ khi đó $x_3^2 > x_1^2$. Mà $x_1^2 = m$ nên $x_3^2 > m$, trái với điều giả sử m là giá trị lớn nhất của biểu thức.

Muốn tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức f(x), ta phải thực hiện hai yêu cầu : chứng tỏ rằng $f(x) \geq m$ (m là hằng số) với mọi x rồi chỉ ra rằng dấu "=" được xảy ra.

Muốn tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức f(x), ta cần chứng tỏ rằng $f(x) \leq m$ (m là hằng số) với mọi x rồi chỉ ra rằng dấu "=" được xảy ra.

Nếu chỉ chứng minh được yêu cầu thứ nhất thì chưa đủ để kết luận về GTNN hoặc GTLN của biểu thức. Chẳng hạn ta có $(x^2 + 3)^2 \geq 0$. Muốn xảy ra dấu đẳng thức phải có $x^2 + 3 = 0$, điều này không xảy ra vì $x^2 + 3 \geq 3$ với mọi x. Như vậy mặc dù ta có $(x^2 + 3)^2 \geq 0$ nhưng số 0 không phải là GTNN của biểu thức $(x^2 + 3)^2$, GTNN của biểu thức này là 9 khi $x = 0$.

Ta lấy một ví dụ khác : xét biểu thức $x^2 + (x - 2)^2$. Ta cũng có $x^2 + (x - 2)^2 \geq 0$, nhưng dấu đẳng thức không xảy ra, GTNN của biểu thức này là 2 khi $x = 1$.(*)

Để chứng tỏ $f(x) \geq m$ (m là hằng số), ta thường dùng đến các bất đẳng thức :

$$x^2 \geq 0,\ |x| \geq 0.$$

Để chứng tỏ $f(x) \leq m$ (m là hằng số), ta thường dùng đến các bất đẳng thức :

$$-x^2 \leq 0,\ -|x| \leq 0.$$

Ví dụ 32(3)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2(x + 3)^2 - 5$.

Giải : Với mọi x ta có $(x + 3)^2 \geq 0$ suy ra $2(x + 3)^2 \geq 0$ do đó $2(x + 3)^2 - 5 \geq -5$.

GTNN của A bằng -5 khi và chỉ khi $x = -3$.

(*) Thật vậy $x^2 + (x - 2)^2 = x^2 + x^2 - 4x + 4 = 2(x^2 - 2x + 1) + 2 = 2(x - 1)^2 + 2 \geq 2$. Khi $x = 1$ thì giá trị của biểu thức bằng 2.

Chú ý : Có những biểu thức không có cả GTNN lẫn GTLN, chẳng hạn $A = 4x$, $B = \frac{5}{x}$ (xem các bài 102, 105).

Tuy nhiên nếu xét giá trị của biến trong một tập hợp hẹp hơn, biểu thức lại có thể có GTNN hoặc GTLN. Chẳng hạn, xét $x \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{Q}$ hoặc $x \in \mathbf{Z}$ thì biểu thức $x + 3$ không có GTNN, nhưng nếu xét $x \in \mathbf{N}$ thì biểu thức đó có GTNN bằng 3 với $x = 0$.

Ví dụ 33(1)

Với giá trị nguyên nào của x thì biểu thức $D = \frac{14-x}{4-x}$ có giá trị lớn nhất ? Tìm giá trị đó.

Giải : Biến đổi $D = \frac{4-x+10}{4-x} = 1 + \frac{10}{4-x}$.

D lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{4-x}$ lớn nhất.

Xét $x > 4$ thì $\frac{10}{4-x} < 0$. (1)

Xét $x < 4$ thì $\frac{10}{4-x} > 0$. Phân số $\frac{10}{4-x}$ có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất. Mẫu $4 - x$ là số nguyên dương, nhỏ nhất khi $4 - x = 1$ tức là $x = 3$. Khi đó

$$\frac{10}{4-x} = 10. \quad (2)$$

So sánh (1) và (2), ta thấy $\frac{10}{4-x}$ lớn nhất bằng 10. Vậy GTLN của D bằng 11 khi và chỉ khi $x = 3$.

Bài tập

133(3). Tìm x, sao cho :

a) $1 - 2x < 7$;

b) $(x - 1)(x - 2) > 0$;

c) $(x - 2)^2 (x + 1)(x - 4) < 0$;

d) $\frac{x^2(x-3)}{x-9} < 0$;

e) $\frac{5}{x} < 1$.

134(3). Tìm giá trị của x để :

a) $x > 2x$; b) $a + x < a$; c) $x^3 < x^2$.

135(1). Tìm các giá trị của x để :

a) $\dfrac{x+5}{x+3} < 1$; b) $\dfrac{x+3}{x+4} > 1$.

136(3). Tìm các số nguyên a, sao cho :

$$(a^2 - 1)(a^2 - 4)(a^2 - 7)(a^2 - 10) < 0.$$

137(3). Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $A = x^4 + 3x^2 + 2$; b) $B = (x^4 + 5)^2$; c) $C = (x - 1)^2 + (y + 2)^2$.

138(3). Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức :

a) $A = 5 - 3(2x - 1)^2$; b) $B = \dfrac{1}{2(x-1)^2 + 3}$; c) $C = \dfrac{x^2 + 8}{x^2 + 2}$.

139(1). Tìm các giá trị nguyên của x để các biểu thức sau có giá trị lớn nhất :

a) $A = \dfrac{1}{7 - x}$; b) $B = \dfrac{27 - 2x}{12 - x}$.

140(1). Tìm các giá trị nguyên của x để các biểu thức sau có giá trị nhỏ nhất :

a) $A = \dfrac{1}{x - 3}$; b) $B = \dfrac{7 - x}{x - 5}$; c) $C = \dfrac{5x - 19}{x - 4}$.

141*(1). Tìm số tự nhiên n để phân số $\dfrac{7n - 8}{2n - 3}$ có giá trị lớn nhất.

142(1). Tìm các số a, b, c không âm sao cho $a + 3c = 8$, $a + 2b = 9$ và tổng $a + b + c$ có giá trị lớn nhất.

143*(1). Cho 1989 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 1989. Đặt trước mỗi số dấu "+" hoặc "–" rồi cộng lại thì được tổng A. Tính giá trị không âm nhỏ nhất mà A có thể nhận được.

144(7). So sánh x và y, biết rằng :

a) $x = 2\sqrt{7}$; $y = 3\sqrt{3}$.

b) $x = 6\sqrt{2}$; $y = 5\sqrt{3}$.

c) $x = \sqrt{31} - \sqrt{13}$; $y = 6 - \sqrt{11}$.

145(7). Chứng minh rằng nếu $0 < a < 1$ thì $\sqrt{a} > a$.

146(7). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\sqrt{x} + 1$.

147(7). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{1}{\sqrt{x} + 3}$.

148(1). Kí hiệu [a] là phần nguyên của a (xem chú thích ở bài 4). Tìm x, biết rằng :

a) $2[x] + 1 = 5$; b) $([x] + 2)(3[x] - 1) = 0$.

149(1). Kí hiệu [a] là phần nguyên của a và {a} là phần lẻ của a (xem chú thích về các kí hiệu này ở các bài 4, 6). Tìm x và y, biết rằng :

a) $[x] + \{y\} = 1{,}5$ và $[y] + \{x\} = 3{,}2$;

b) $x + y = 3{,}2$ và $[x] + \{y\} = 4{,}7$.

150(1). Có tồn tại hay không một dãy gồm năm số, sao cho hai số liên tiếp nào cũng có tổng là số dương, còn tổng của cả năm số lại là số âm ?

151(3). Tìm các số nguyên a, b, c, sao cho

$$a^2 \leq b, \quad b^2 \leq c, \quad c^2 \leq a.$$

GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ

I – ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

Trên trục số, điểm 2 và –2 đều cách điểm gốc 2 đơn vị. Ta nói : giá trị tuyệt đối của 2 bằng 2, giá trị tuyệt đối của –2 cũng bằng 2.

Định nghĩa. Giá trị tuyệt đối của một số a, kí hiệu |a|, là số đo của khoảng cách từ điểm a đến điểm gốc trên trục số.

Ta thường sử dụng định nghĩa trên dưới dạng :

$$|a| = \begin{cases} a \text{ nếu } a \geq 0 \\ -a \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$$

Tính chất

Từ định nghĩa trên suy ra các tính chất sau :

1) Nếu $a = 0$ thì $|a| = 0$, nếu $a \neq 0$ thì $|a| > 0$.

Ta có : *Giá trị tuyệt đối của một số thì không âm* : $|a| \geq 0$.

2) Nếu $a \geq 0$ thì $|a| = a$, nếu $a < 0$ thì $|a| > a$.

Ta có : *Giá trị tuyệt đối của một số thì lớn hơn hoặc bằng số đó* : $|a| \geq a$.

Trong một số bài toán về giá trị tuyệt đối, ta còn dùng đến bất đẳng thức sau :

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Giá trị tuyệt đối của một tổng nhỏ hơn hoặc bằng tổng các giá trị tuyệt đối.

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $ab \geq 0$.

II – TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC

Ví dụ 34(3)

Tính giá trị của biểu thức $A = 3x^2 - 2x + 1$ với $|x| = \frac{1}{2}$.

Giải : $|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

Nếu $x = \frac{1}{2}$ thì $A = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2.\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} - 1 + 1 = \frac{3}{4}$;

Nếu $x = -\frac{1}{2}$ thì $A = 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2.\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4} + 1 + 1 = 2\frac{3}{4}$.

III – RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Ví dụ 35(2)

Rút gọn biểu thức $A = 3(2x-1) - |x - 5|$.

Giải : Với $x - 5 \geq 0$ thì $|x - 5| = x - 5$, với $x - 5 < 0$ thì $|x - 5| = -x + 5$.

Xét hai trường hợp ứng với hai khoảng giá trị của biến x :

a) Nếu $x \geq 5$ thì $A = 3(2x - 1) - (x - 5) = 5x + 2$;

b) Nếu $x < 5$ thì $A = 3(2x - 1) - (-x + 5) = 7x - 8$.

IV – TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN TRONG ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Ví dụ 36(2)

Tìm x, biết rằng $2|3x - 1| + 1 = 5$.

Giải : Ta có $|3x - 1| = 2$ nên $3x - 1 = \pm 2$. Xét hai trường hợp :

a) $3x - 1 = 2$, do đó $x = 1$.

b) $3x - 1 = -2$, do đó $x = \frac{-1}{3}$.

Ví dụ 37(2)

Tìm x, biết rằng $|x - 5| - x = 3$.

Giải :

a) Xét $x \geq 5$ ta có $x - 5 - x = 3$, loại.

b) Xét $x < 5$ ta có $5 - x - x = 3$ tức là $x = 1$, giá trị này thoả mãn $x < 5$.

Vậy $x = 1$.

Ví dụ 38(2)

Với giá trị nào của a và b, ta có đẳng thức

$$|a(b - 2)| = a(2 - b) ?$$

Giải : Chú ý rằng $|A| = |-A|$, ta biến đổi $|a(b - 2)|$ thành $|a(2 - b)|$ để đưa đẳng thức đã cho về dạng $|a(2 - b)| = a(2 - b)$ (1).

Ta biết rằng $|A| = A$ khi và chỉ khi $A \geq 0$, do đó (1) xảy ra khi và chỉ khi $a(2 - b) \geq 0$.

Có bốn trường hợp :

a) $a = 0$, b tùy ý ;

b) $b = 2$, a tuỳ ý ;

c) $a > 0$, $b < 2$;

d) $a < 0$, $b > 2$.

Ví dụ 39(2)

Tìm các số a và b, sao cho $\quad a + b = |a| - |b|. \quad (1)$

Giải : *Cách 1*. Xét bốn trường hợp :

a) $a \geq 0$, $b > 0$. Khi đó (1) trở thành

$a + b = a - b \Leftrightarrow b = -b$. Đẳng thức này không xảy ra vì vế trái dương, vế phải âm.

b) $a \geq 0$, $b \leq 0$. Khi đó (1) trở thành $a + b = a + b$. Đẳng thức này luôn luôn đúng. Vậy $a \geq 0$, $b \leq 0$ thoả mãn bài toán.

c) $a < 0$, $b > 0$. Khi đó (1) trở thành $a + b = -a - b \Leftrightarrow a = -b$. Vậy $a < 0$, $b = -a$ thoả mãn bài toán.

d) $a < 0$, $b \leq 0$. Khi đó (1) trở thành $a + b = -a + b \Leftrightarrow a = -a$. Đẳng thức này không xảy ra vì vế trái âm, vế phải dương.

Kết luận : Các giá trị của a và b phải tìm là $a \geq 0$, $b \leq 0$ hoặc $a < 0$, $b = -a$.

Cách 2. Xét hai trường hợp :

a) Trường hợp $b > 0$. Khi đó (1) trở thành $a + b = |a| - b$. Lại xét hai trường hợp :

Nếu $a \geq 0$ thì $a + b = a - b$ tức là $b = -b$. Đẳng thức này không xảy ra vì vế trái dương, vế phải âm.

Nếu $a < 0$ thì $a + b = -a - b$ tức là $a = -b$.

b) Trường hợp $b \leq 0$. Khi đó (1) trở thành $a + b = |a| + b \Leftrightarrow a = |a| \Leftrightarrow a \geq 0$.

Kết luận : $a \geq 0$, $b \leq 0$ hoặc $a < 0$, $b = -a$.

V – TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Ví dụ 40(2)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2|3x - 1| - 4$.

Giải : Với mọi x, ta có :

$$|3x - 1| \geq 0 \text{ suy ra } 2|3x - 1| \geq 0. \text{ Do đó } 2|3x - 1| - 4 \geq -4.$$

$A = -4$ khi và chỉ khi $3x - 1 = 0$, tức là $x = \dfrac{1}{3}$.

Vậy GTNN của A bằng -4 khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 41(2)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = 10 - 4|x - 2|$.

Giải : Với mọi x, ta có :

$$|x - 2| \geq 0 \text{ suy ra } -4|x - 2| \leq 0. \text{ Do đó } 10 - 4|x - 2| \leq 10.$$

$B = 10$ khi và chỉ khi $x - 2 = 0$, tức là $x = 2$.

Vậy GTLN của B bằng 10 khi và chỉ khi $x = 2$.

Ví dụ 42(2)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \dfrac{6}{|x| - 3}$ với x là số nguyên.

Giải : Xét $|x| > 3$ thì $C > 0$.

Xét $|x| < 3$ thì do $x \in \mathbf{Z}$ nên $|x|$ bằng 0 hoặc 1 hoặc 2, khi đó C bằng -2, hoặc -3 hoặc -6.

Vậy GTNN của C bằng -6 khi và chỉ khi $x = \pm 2$.

Ví dụ 43(2)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x - |x|$.

Giải :

Xét $x \geq 0$ thì $A = x - x = 0$. (1)

Xét $x < 0$ thì $A = x - (-x) = 2x < 0$. (2)

Từ (1) và (2) ta thấy $A \leq 0$.

Vậy GTLN của A bằng 0 khi và chỉ khi $x \geq 0$.

VI – HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Ví dụ 44(10)

Vẽ đồ thị hàm số $y = |x|$.

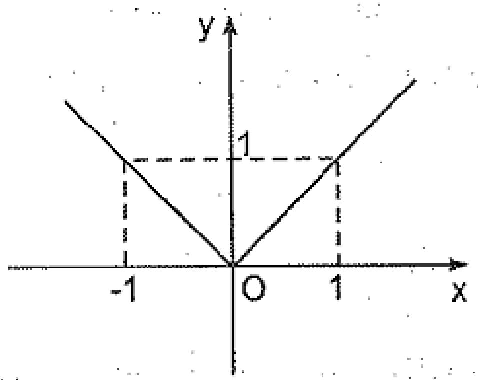
Giải : Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số :

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ với } x \geq 0 \\ -x \text{ với } x < 0. \end{cases}$$

Với $x \geq 0$ thì đồ thị hàm số $y = x$ là tia phân giác của góc phần tư I.

Với $x \leq 0$ thì đồ thị hàm số $y = -x$ là tia phân giác của góc phần tư II.

Đồ thị của hàm số $y = |x|$ gồm hai tia phân giác của các góc phần tư I và II như trên hình 4.



Hình 4

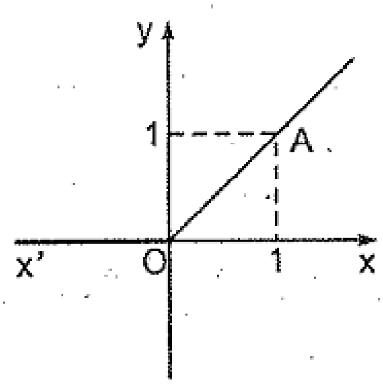
Ví dụ 45(10)

Vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{2}(x + |x|).$$

Giải :

Với $x \geq 0$ thì $y = x$. Với $x < 0$ thì $y = 0$.



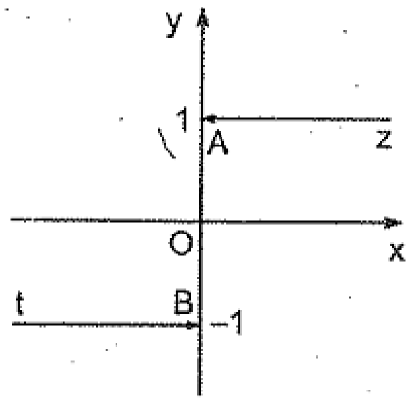
Hình 5

Đồ thị của hàm số gồm hai tia Ox' và OA như trên hình 5.

Ví dụ 46(10)

Vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{x}{|x|}.$$



Hình 6

Giải :

Với $x > 0$ thì $y = 1$.

Với $x < 0$ thì $y = -1$.

Đồ thị của hàm số gồm hai tia Az và Bt như trên hình 6 (ở đây dấu mũi tên dùng nói rằng hai điểm A và B không thuộc đồ thị).

Bài tập

152(2). Tìm tất cả các số a thoả mãn một trong các điều kiện sau :

a) $a = |a|$; b) $a < |a|$;

c) $a > |a|$; d) $|a| = -a$; e) $a \le |a|$.

153(2). Bổ sung thêm các điều kiện để các khẳng định sau là đúng :

a) $|a| = |b| \Rightarrow a = b$; b) $a > b \Rightarrow |a| > |b|$.

154(3). Cho $|x| = |y|$ và $x < 0$, $y > 0$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai ?

a) $x^2y > 0$; b) $x + y = 0$; c) $xy < 0$;

d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$; e) $\frac{x}{y} + 1 = 0$.

155(3). Tìm giá trị của các biểu thức :

a) $A = 6x^3 - 3x^2 + 2|x| + 4$ với $x = \frac{-2}{3}$;

b) $B = 2|x| - 3|y|$ với $x = \frac{1}{2}$, $y = -3$;

c) $C = 2|x - 2| - 3|1 - x|$ với $x = 4$;

d) $D = \frac{5x^2 - 7x + 1}{3x - 1}$ với $|x| = \frac{1}{2}$.

156(1). Rút gọn các biểu thức :

a) $|a| + a$; b) $|a| - a$; c) $|a| . a$;

d) $|a| : a$; e) $3(x - 1) - 2|x + 3|$; g) $2|x - 3| - |4x - 1|$.

157(1). Tìm x trong các đẳng thức :

a) $|2x - 3| = 5$;
b) $|2x - 1| = |2x + 3|$;
c) $|x - 1| + 3x = 1$;
d) $|5x - 3| - x = 7$.

158(1). Tìm các số a và b thoả mãn một trong các điều kiện sau :

a) $a + b = |a| + |b|$;
b) $a + b = |b| - |a|$.

159(1). Có bao nhiêu cặp số nguyên (x ; y) thoả mãn một trong các điều kiện sau :

a) $|x| + |y| = 20$;
b) $|x| + |y| < 20$?

(Các cặp số (3 ; 4) và (4 ; 3) là hai cặp số khác nhau).

160(1). Điền vào chỗ trống (...) các dấu ≥, ≤, = để các khẳng định sau đúng với mọi a và b. Hãy phát biểu mỗi khẳng định đó thành một tính chất và chỉ rõ khi nào xảy ra dấu đẳng thức ?

a) $|a + b| \ldots |a| + |b|$;
b) $|a - b| \ldots |a| - |b|$ với $|a| \geq |b|$;
c) $|ab| \ldots |a| . |b|$;
d) $\left|\frac{a}{b}\right| \ldots \frac{|a|}{|b|}$.

161(3). Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $A = 2|3x-2| - 1$;
b) $B = 5|1-4x| - 1$;
c) $C = x^2 + 3|y - 2| - 1$;
d) $D = x + |x|$.

162(2). Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức :

a) $A = 5 - |2x - 1|$;
b) $B = \frac{1}{|x-2|+3}$.

163(2). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = \frac{x+2}{|x|}$ với x là số nguyên.

164(2). Cho $|a - c| < 3$, $|b - c| < 2$. Chứng minh rằng $|a - b| < 5$.

165(10). Vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = 2.|x|$;
b) $y = \frac{x^2}{|x|}$;
c) $y = \frac{1}{2}(x - |x|)$;
d) $y = \frac{1}{2}(|x| - x)$;
e) $y = \frac{1}{2}(3x + |x|)$.

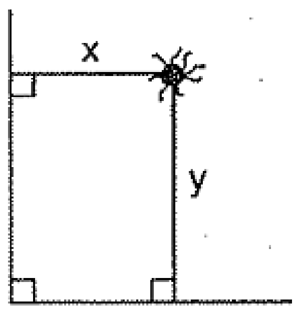
166(10). Vẽ đồ thị các hàm số $y = |x|$ và $y = 2$ rồi dùng đồ thị để tìm giá trị của x sao cho $|x| < 2$.

Bài đọc thêm

ĐỀ-CÁC VÀ MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

Năm 1619, một sĩ quan người Pháp 23 tuổi, trong một đêm không ngủ trên đường hành quân, đã nghĩ ra hệ trục toạ độ vuông góc, đặt cơ sở cho một ngành lớn của toán học là Hình học giải tích. Chàng sĩ quan đó là Rơ-nê Đề-các *(René Descartes)*.

Người ta kể lại rằng lúc đó Đề-các thấy một con nhện đang bò ở góc nhà (h.7). Đề-các gọi x là khoảng cách từ con nhện đến một mép trần, gọi y là khoảng cách từ con nhện đến mép trần bên cạnh, và nếu biết các độ dài x và y thì xác định được vị trí của con nhện. Đó chính là hệ trục toạ độ Đề-các vuông góc. Trên mặt phẳng toạ độ, mỗi điểm được biểu thị bởi một cặp số (x ; y), nhờ đó có thể dùng đại số để biểu thị các đường thẳng, đường tròn, và do đó có thể giải các bài toán hình học bằng phương pháp toạ độ.



Hình 7


Rơ-nê Đề-các

Đề-các sinh năm 1596 trong một gia đình quý tộc nhưng không giàu có. Cậu bé Đề-các mất mẹ lúc mới một tuổi. Do yếu sức khoẻ nên đến năm tám tuổi, cậu mới đến trường và được phép đến lớp muộn hơn các bạn.

Sau khi tốt nghiệp đại học năm 1616, Đề-các làm luật sư rồi tình nguyện tham gia quân đội Hà Lan năm 1617. Tuy nhiên, ông vẫn không ngừng nghiên cứu toán học và triết học. Từ năm 1620, ông ở I-ta-li-a và Đức trong 9 năm, sau đó trở về Pháp, rồi sống 29 năm ở Hà Lan. Ông mất tại Thuỵ Điển năm 1650, một năm sau khi nữ hoàng Thuỵ Điển 90 tuổi mời ông sang đó dạy triết học cho bà.

Đề-các là người đầu tiên biểu diễn số âm trên trục số vào bên trái điểm 0, và từ đó số âm mới có vị trí bình đẳng với số dương. Ông có nhiều đóng góp cho sự phát triển của môn Đại số : chấn chỉnh lại hệ thống các kí hiệu toán học ; đề nghị dùng các chữ cái x, y, z,... để chỉ các đại lượng biến thiên và các chữ cái a, b, c,... để chỉ các đại lượng không đổi. Ông là người đầu tiên viết các luỹ thừa như chúng ta dùng ngày nay a^2, b^3, c^4,... ; viết các phương trình dưới dạng vế phải bằng 0.

Các công trình của Đề-các giúp môn Đại số được hoàn chỉnh và ảnh hưởng sâu sắc đến sự phát triển của toán học, cơ học trong nhiều thế kỉ sau.

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

§1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

Định nghĩa. Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.

Tính chất. Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

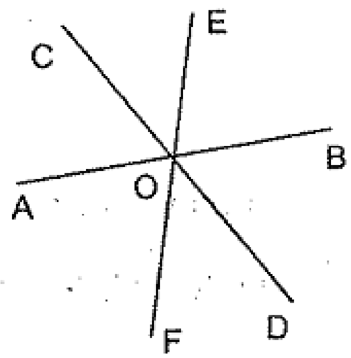
Ví dụ 1

Cho ba đường thẳng cắt nhau tại O như trên hình 8. Kể tên các cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt trên hình.

Giải : Có sáu cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt :

AOC và BOD, COE và DOF, EOB và FOA,

AOE và BOF, COB và DOA, EOD và FOC.



Hình 8

Chú ý : Có sáu tia chung gốc nên có $\frac{6 . 5}{2} = 15$ (góc), trong đó có ba góc bẹt, còn lại 12 góc nhỏ hơn góc bẹt. Mỗi góc trong 12 góc này đều có một góc đối đỉnh với nó, do đó trong hình 8 có 12 : 2 = 6 cặp góc đối đỉnh.

Bài tập

1. Cho hai góc đối đỉnh AOB và A'OB'. Gọi Ox là tia phân giác của góc AOB, Ox' là tia đối của tia Ox. Vì sao Ox' là tia phân giác của góc A'OB' ?

2. Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.

3*. Qua điểm O, vẽ năm đường thẳng phân biệt.

a) Có bao nhiêu góc trong hình vẽ ?

b) Trong các góc ấy, có bao nhiêu cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt ?

c) Xét các góc không có điểm trong chung, chứng tỏ tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng 36°, tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 36°.

~ ***Bài tập :*** 118.

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa 1. Hai đường thẳng vuông góc là hai đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông.

Định nghĩa 2. Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng ấy tại trung điểm của nó.

Ví dụ 2

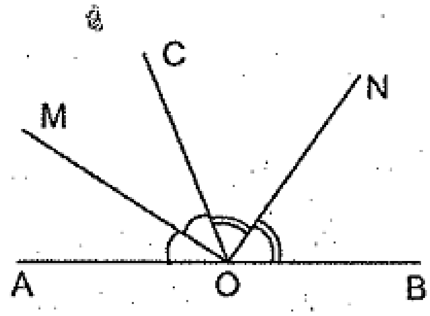
Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc kề bù vuông góc với nhau.

Giải : (h.9)

Gọi AOC và COB là hai góc kề bù, OM và ON theo thứ tự là các tia phân giác của hai góc ấy. Ta có

$$\widehat{MOC}+\widehat{CON}=\frac{\widehat{AOC}}{2}+\frac{\widehat{COB}}{2}=\frac{\widehat{AOC}+\widehat{COB}}{2}=$$

$$=\frac{180^{\circ}}{2}=90^{\circ}.$$



Hình 9

Ta thấy tia OC nằm giữa hai tia OM và ON nên $\widehat{MOC}+\widehat{CON}=\widehat{MON}$.

Do đó $\widehat{MON}=90^{\circ}$. Vậy $OM \perp ON$.

Bài tập

4. Cho hai góc kề bù AOC và COB. Gọi OM là tia phân giác của góc AOC. Kẻ tia ON vuông góc với OM (tia ON nằm trong góc BOC). Tia ON là tia phân giác của góc nào ? Vì sao ?

5. Ở miền trong góc tù xOy, vẽ các tia Oz, Ot sao cho Oz vuông góc với Ox, Ot vuông góc với Oy.

Chứng tỏ rằng :

a) $\widehat{xOt}=\widehat{yOz}$; b) $\widehat{xOy}+\widehat{zOt}=180^{\circ}$.

6. Ở miền ngoài góc tù xOy, vẽ các tia Oz, Ot sao cho Oz vuông góc với Ox, Ot vuông góc với Oy. Gọi Om, On là tia phân giác của các góc xOy, zOt. Chứng tỏ rằng Om, On là hai tia đối nhau.

~ **Bài tập :** 119.

§3. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

Để nhận ra hai đường thẳng song song, ta xét các góc tạo bởi hai đường thẳng ấy với một đường thẳng thứ ba (cát tuyến). Nếu hai góc so le trong bằng nhau, hoặc hai góc đồng vị bằng nhau, hoặc hai góc trong cùng phía bù nhau thì hai đường thẳng song song.

Hai đường thẳng cũng song song với nhau nếu chúng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba.

Ví dụ 3

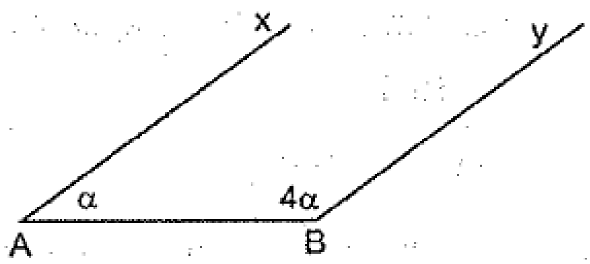
Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tia Ax và By trong đó $\widehat{BAx} = \alpha$, $\widehat{ABy} = 4\alpha$. Tính α để cho Ax song song với By.

Giải : (h.10)

Ta biết rằng nếu hai góc trong cùng phía bù nhau thì hai đường thẳng song song.

$\widehat{BAx} + \widehat{ABy} = \alpha + 4\alpha = 5\alpha$.

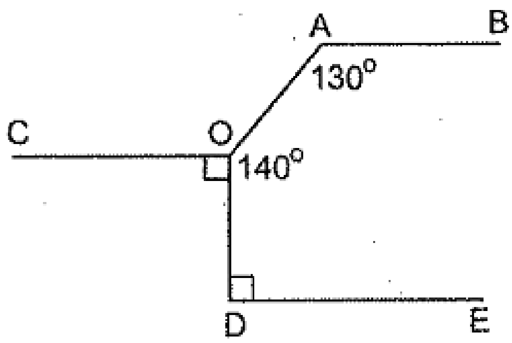
Nếu $5\alpha = 180^\circ$, tức là $\alpha = 36^\circ$ thì Ax // By.



Hình 10

Bài tập

7. Trên hình 11 có các đường thẳng nào song song với OC ? Vì sao ?



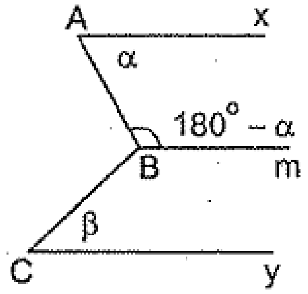
Hình 11

8. Cho $\widehat{xOy} = \alpha$, điểm A nằm trên Oy. Qua A vẽ tia Am. Tính số đo góc OAm để Am song song với Ox.

9. Trên hình 12 : $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{C} = \beta$, $\widehat{ABC} = \alpha + \beta$, $\widehat{ABm} = 180^o - \alpha$. Chứng tỏ rằng :

a) Ax song song với Bm.

b) Cy song song với Bm.



Hình 12

§4. TIÊN ĐỀ Ơ-CLIT. TÍNH CHẤT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Khi vẽ đường thẳng qua điểm A và song song với đường thẳng a, một vấn đề được đặt ra : Qua điểm A nằm ngoài đường thẳng a, có bao nhiêu đường thẳng song song với a ? Ta thừa nhận tiên đề sau : Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng ấy. Đó là tiên đề Ơ-clit.

Với tiên đề Ơ-clit, ta chứng minh được : Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

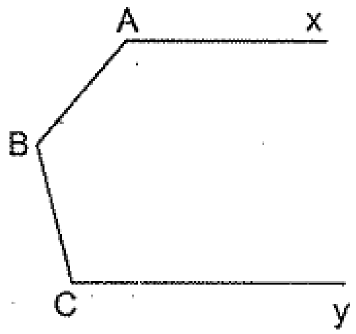
Từ tiên đề Ơ-clit, ta cũng chứng minh được các tính chất của hai đường thẳng song song : Nếu hai đường thẳng song song bị cắt bởi một cát tuyến thì hai góc so le trong bằng nhau, hai góc đồng vị bằng nhau, hai góc trong cùng phía bù nhau.

Ví dụ 4

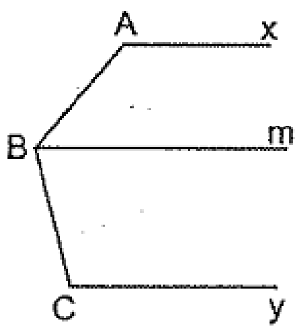
Cho hình 13.

a) Cho biết Ax // Cy. Hãy tính $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$.

b) Cho biết $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360^o$. Chứng tỏ rằng Ax // Cy.



Hình 13



Hình 14

Giải : (h.14)

a) Kẻ Bm // Ax. Ta có $\widehat{ABm} + \widehat{A} = 180^o$. (1)

Do Bm // Ax và Cy // Ax nên Bm // Cy.

$$Bm \parallel Cy \Rightarrow \widehat{CBm} + \widehat{C} = 180^\circ. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABm} + \widehat{A} + \widehat{CBm} + \widehat{C} = 360^\circ.$

Do đó $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360^\circ.$

b) Ta có $\widehat{ABm} + \widehat{A} = 180^\circ$

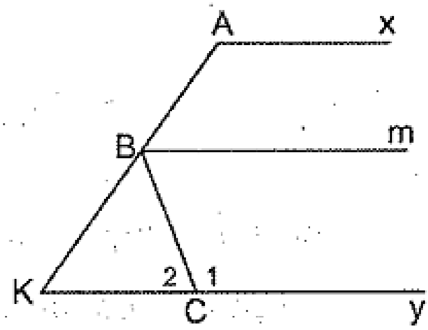
và $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360^\circ$

nên $\widehat{CBm} + \widehat{C} = 180^\circ.$

Hai góc trong cùng phía $\widehat{CBm}$ và $\widehat{C}$ bù nhau nên Bm // Cy.

Ta có Ax // Bm và Cy // Bm nên Ax // Cy.

Chú ý : Với kiến thức về tổng ba góc của một tam giác (§5), có thể giải các câu a và b bằng cách vẽ giao điểm K của AB và Cy (h.15). Ta có $\widehat{ABC}$ là góc ngoài của Δ BKC nên $\widehat{ABC} = \widehat{K} + \widehat{C}_2$.



Hình 15

Do đó

$$\widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{C}_1 = \widehat{A} + \widehat{K} + \widehat{C}_2 + \widehat{C}_1 = \widehat{A} + \widehat{K} + 180^\circ.$$

a) Nếu Ax // Cy thì $\widehat{A} + \widehat{K} = 180^\circ$. Do đó

$$\widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{C}_1 = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$

b) Nếu $\widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{C}_1 = 360^\circ$ thì $\widehat{A} + \widehat{K} = 180^\circ$, do đó Ax // Cy.

Bài tập

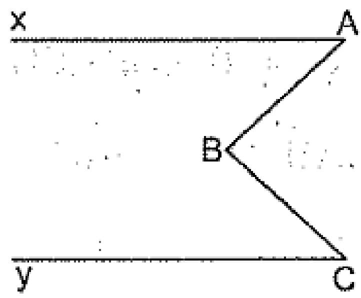
10. Cho hình 16.

a) Cho biết Ax // Cy.

So sánh $\widehat{ABC}$ với $\widehat{A} + \widehat{C}$.

b) Cho biết $\widehat{ABC} = \widehat{A} + \widehat{C}$.

Chứng tỏ rằng Ax // Cy.



Hình 16

11. Tam giác ABC có tia phân giác của góc B cắt AC ở D. Qua A kẻ đường thẳng song song với BD, đường thẳng này cắt đường thẳng BC ở E. Hãy chứng tỏ rằng $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$.

12. Chứng tỏ rằng nếu hai đường thẳng song song thì các tia phân giác của mỗi cặp góc đồng vị song song với nhau.

13*. Cho năm đường thẳng trên mặt phẳng trong đó không có hai đường thẳng nào song song. Chứng tỏ rằng trong năm đường thẳng đó, tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc nhỏ hơn hoặc bằng 36^o.

Chương II

TAM GIÁC

§5. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

Định lí. Tổng ba góc của một tam giác bằng 180^o.

Từ định lí trên, ta suy ra :

– Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

– Góc ngoài của một tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^o$. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$)(*). Các tia phân giác của các góc BAH và C cắt nhau ở K. Chứng minh rằng AK vuông góc với CK.

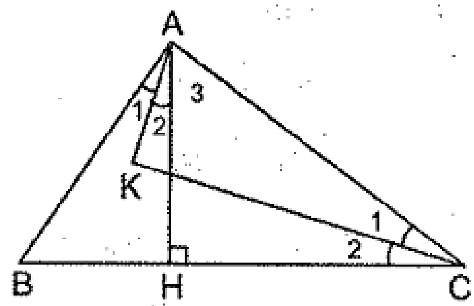
Giải : (h.17)

Δ AHC có $\widehat{H} = 90^o$ nên $\widehat{ACH} + \widehat{A}_3 = 90^o$ (1)

Ta lại có $\widehat{BAH} + \widehat{A}_3 = \widehat{BAC} = 90^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ACH} = \widehat{BAH}$.

Ta có $\widehat{C}_1 = \frac{1}{2}\widehat{ACH}$ và $\widehat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{BAH}$ nên $\widehat{C}_1 = \widehat{A}_1$.



Hình 17

(*) Từ đây, khi nói $AH \perp BC$ mà không chú thích gì thêm, ta hiểu là H thuộc đường thẳng BC.

Do đó $\qquad \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{C}_1 = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{A}_1 = 90^\circ$.

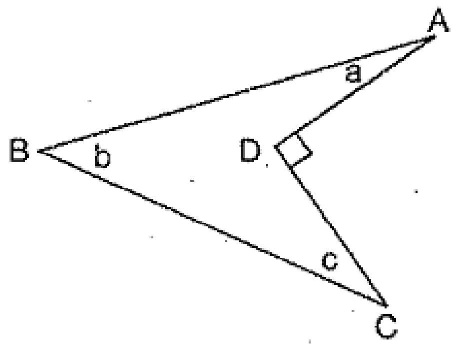
Tam giác AKC có $\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{C}_1 = 90^\circ$ nên $\widehat{AKC} = 90^\circ$. Vậy $AK \perp CK$.

Bài tập

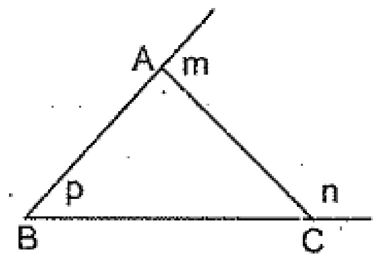
14. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = \alpha$. Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau ở I. Các tia phân giác của các góc ngoài đỉnh B và C cắt nhau ở K. Tia phân giác của góc B cắt tia phân giác của góc ngoài đỉnh C ở E. Tính số đo các góc BIC, BKC, BEC theo α.

15. a) Tính $a + b + c$ trên hình 18,

b) Tính $m + n - p$ trên hình 19.



Hình 18



Hình 19

16. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Tia phân giác của góc ngoài đỉnh A cắt đường thẳng CB ở E. Tính góc AEB theo các góc B và C của tam giác ABC.

17. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$, tia phân giác của góc A cắt BC ở D.

a) Tính $\widehat{ADC}$, $\widehat{ADB}$.

b) Vẽ AH vuông góc với BC, tính $\widehat{HAD}$.

18. Cho hai tấm gương đặt tạo với nhau thành một góc xOy. Một tia sáng chiếu tới gương thứ nhất tại A thuộc tia Ox, phản xạ rồi chiếu tới gương thứ hai tại B thuộc tia Oy, rồi phản xạ theo một tia song song với tia ban đầu (nhưng có hướng ngược lại). Biết rằng góc tạo bởi tia chiếu tới với mặt gương bằng góc tạo bởi tia phản xạ với mặt gương. Tính góc xOy tạo bởi hai tấm gương.

19. Tìm mối liên hệ giữa hai góc B và C của tam giác ABC biết rằng góc tạo bởi tia phân giác của góc B với cạnh đối diện bằng góc tạo bởi tia phân giác của góc C với cạnh đối diện.

20*. Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau ở E. Các tia phân giác của các góc ACE và DBE cắt nhau ở K. Chứng minh rằng

$$\widehat{BKC} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BDC}}{2}.$$

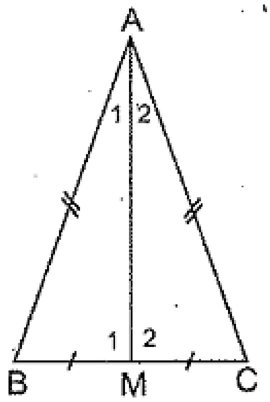
~ **Bài tập :** 71.

§6. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC CẠNH - CẠNH - CẠNH

Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 40^o$, AB = AC. Gọi M là trung điểm của BC. Tính các góc của mỗi tam giác AMB, AMC.



Hình 20

Giải : (h.20)

ΔAMB và ΔAMC có :

AB = AC (giả thiết)

MB = MC (giả thiết)

AM : cạnh chung.

Do đó $\Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c), suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $\widehat{B} = \widehat{C}$, $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

Ta lại có $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 40^o$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 20^o$,

$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^o$ nên $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^o$.

Suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = 180^o - 20^o - 90^o = 70^o$.

Bài tập

21. Cho tam giác ABC. Vẽ cung tâm A có bán kính bằng BC, vẽ cung tâm C có bán kính bằng AB, chúng cắt nhau ở M (M và B nằm khác phía đối với AC). Chứng minh rằng AM // BC.

22. Cho tam giác ABC. Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc với AB (D và C nằm khác phía đối với AB), AD = AB. Vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AC (E và B nằm khác phía đối với AC), AE = AC. Biết rằng DE = BC. Tính $\widehat{BAC}$.

23. Cho đoạn thẳng AB, điểm C cách đều hai điểm A và B, điểm D cách đều hai điểm A và B (C và D nằm khác phía đối với AB).

a) Chứng minh rằng tia CD là tia phân giác của góc ACB.

b) Kết quả ở câu a có đúng không nếu C và D nằm cùng phía đối với AB ?

§7. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC CẠNH - GÓC - CẠNH

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Ví dụ 7

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} < 90^{o}$. Trên nửa mặt phẳng có chứa A bờ BC, vẽ tia Bx vuông góc với BC, trên tia đó lấy điểm D sao cho BD = BC. Trên nửa mặt phẳng có chứa C bờ AB, vẽ tia By vuông góc với BA, trên tia đó lấy điểm E sao cho BE = BA. Chứng minh rằng :

a) DA = EC.

b) $DA \perp EC$.

Giải : (h. 21)

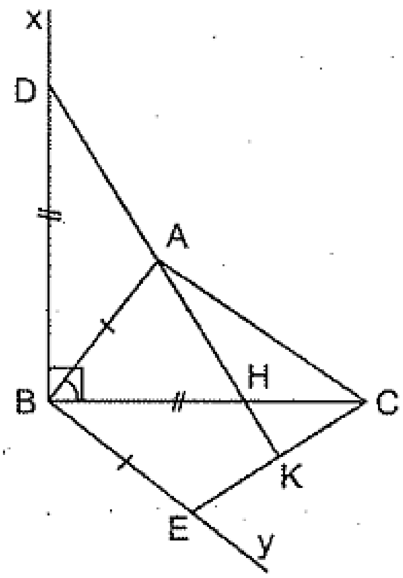
a) ΔABD và ΔEBC có :

$AB = BE$

$\widehat{ABD} = \widehat{EBC}$ (cùng bằng $90^{o} - \widehat{ABC}$)

$BD = BC$.

Do đó $\Delta ABD = \Delta EBC$ (c.g.c), suy ra DA = EC.



Hình 21

b) Gọi giao điểm của DA với BC và EC theo thứ tự là H và K.

Ta có $\Delta ABD = \Delta EBC$ (câu a)

Suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{ECB}$. Do đó $\widehat{BDH} = \widehat{KCH}$.

ΔDBH và ΔCKH có :

$$\widehat{BDH} = \widehat{KCH},\ \widehat{DHB} = \widehat{CHK} \text{ nên } \widehat{DBH} = \widehat{CKH}.$$

Do $\widehat{DBH} = 90^{o}$ nên $\widehat{CKH} = 90^{o}$. Vậy $DA \perp EC$.

Bài tập

24. Trên các cạnh Ox và Oy của góc xOy, lấy các điểm A và B sao cho OA = OB. Tia phân giác của góc xOy cắt AB ở C. Chứng minh rằng :

a) C là trung điểm của AB.

b) AB vuông góc với OC.

25. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^{\circ}$, M là trung điểm của AC. Trên tia đối của tia MB lấy điểm K sao cho MK = MB. Chứng minh rằng :

a) KC vuông góc với AC.

b) AK song song với BC.

26. Cho tam giác ABC, D là trung điểm của AC, E là trung điểm của AB. Trên tia đối của tia DB lấy điểm N sao cho DN = DB. Trên tia đối của tia EC, lấy điểm M sao cho EM = EC. Chứng minh rằng A là trung điểm của MN.

27. Cho điểm A nằm trong góc nhọn xOy. Vẽ AH vuông góc với Ox, trên tia đối của tia HA lấy điểm B sao cho HB = HA. Vẽ AK vuông góc với Oy, trên tia đối của tia KA lấy điểm C sao cho KC = KA. Chứng minh rằng :

a) OB = OC.

b) Biết $\widehat{xOy} = \alpha$, tính $\widehat{BOC}$.

28. Tam giác ABC có AC > AB, tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Trên AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Chứng minh rằng AD vuông góc với BE.

29. Cho m là đường trung trực của đoạn thẳng AB, C là điểm thuộc m. Gọi Cx là tia đối của tia CA, Cn là tia phân giác của góc BCx. Chứng minh rằng Cn vuông góc với m.

30. Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn thẳng. Lấy các điểm E trên đoạn thẳng AD, F trên đoạn thẳng BC sao cho AE = BF. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

31. Cho đoạn thẳng AB. Vẽ về hai phía của AB các đoạn thẳng AC và BD vuông góc với AB sao cho AC = BD. Chứng minh rằng $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.

32. Cho tam giác ABC, kẻ BD vuông góc với AC, kẻ CE vuông góc với AB. Trên tia đối của tia BD, lấy điểm H sao cho BH = AC. Trên tia đối của tia CE, lấy điểm K sao cho CK = AB. Chứng minh rằng AH = AK.

33*. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên nửa mặt phẳng không chứa C có bờ AB, vẽ tia Ax vuông góc với AB, trên tia đó lấy điểm D sao cho AD = AB. Trên nửa mặt phẳng không chứa B có bờ AC, vẽ tia Ay vuông góc với AC, trên tia đó lấy điểm E sao cho AE = AC. Chứng minh rằng :

a) $AM = \dfrac{DE}{2}$.

b) $AM \perp DE$.

~ ***Ví dụ :*** 13.

Bài tập : 73.

§8. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC GÓC - CẠNH - GÓC

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Từ trường hợp bằng nhau góc - cạnh - góc nói trên, ta suy ra : Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Ví dụ 8

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở M, tia phân giác của góc C cắt AB ở N. Chứng minh rằng BN + CM = BC.

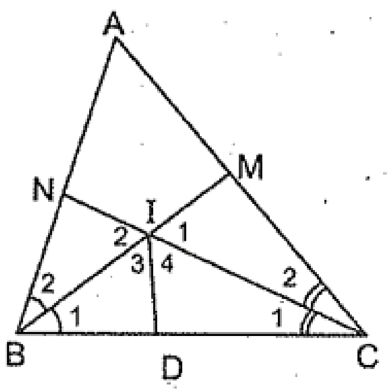
Giải : (h.22)

Gọi I là giao điểm của BM và CN. Ta có $\widehat{A} = 60^\circ$

suy ra $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Do đó $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

Vì vậy $\widehat{I}_1 = 60^\circ$, $\widehat{I}_2 = 60^\circ$.



Hình 22

Kẻ tia phân giác của góc BIC, cắt BC ở D. Tam giác BIC có $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 120^\circ$ nên $\widehat{BIC} = 120^\circ$. Do đó $\widehat{I}_3 = \widehat{I}_4 = 60^\circ$.

ΔBIN và ΔBID có

$\widehat{B}_2 = \widehat{B}_1$

BI : cạnh chung

$\widehat{I}_2 = \widehat{I}_3 = 60^\circ$.

Do đó $\Delta BIN = \Delta BID$ (g.c.g), suy ra $BN = BD$. (1)

Chứng minh tương tự, $\Delta CIM = \Delta CID$ (g.c.g) suy ra $CM = CD$. (2)

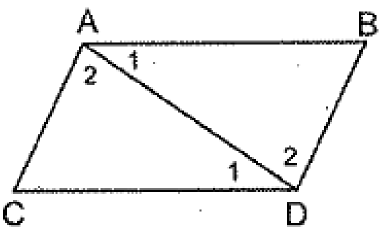
Từ (1) và (2) suy ra : $BN + CM = BD + CD = BC$.

Ví dụ 9

Chứng minh rằng : Hai đoạn thẳng song song chắn giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau.

Giải :

Xét hai đoạn thẳng AB, CD song song thoả mãn điều kiện AC // BD (h.23). Ta phải chứng minh $AB = CD$.



Hình 23

Kẻ đoạn thẳng AD. Xét ΔABD và ΔDCA :

$\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (so le trong, AB // CD)

AD : cạnh chung

$\widehat{D_2} = \widehat{A_2}$ (so le trong, AC // BD).

Do đó $\Delta ABD = \Delta DCA$ (g.c.g), suy ra $AB = CD$.

Bài tập

34. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Trên các cạnh AB và AC lấy các điểm D và E sao cho $AD = AE$. Gọi K là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng :

a) $BE = CD$. b) $\Delta KBD = \Delta KCE$.

35. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^o$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D, tia phân giác của góc C cắt AB ở E. Các tia phân giác đó cắt nhau ở I. Chứng minh rằng $ID = IE$.

36. Cho đoạn thẳng AB, O là trung điểm của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tia Ax và By vuông góc với AB. Gọi C là một điểm thuộc tia Ax. Đường vuông góc với OC tại O cắt tia By ở D. Chứng minh rằng $CD = AC + BD$.

37. Trên cạnh BC của tam giác ABC, lấy các điểm E và F sao cho $BE = CF$. Qua E và F, vẽ các đường thẳng song song với BA, chúng cắt cạnh AC theo thứ tự ở G và H. Chứng minh rằng $EG + FH = AB$.

38. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^o$, $AB = AC$. Qua A vẽ đường thẳng d sao cho B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Kẻ BH và CK vuông góc với d. Chứng minh rằng :

a) $AH = CK$. b) $HK = BH + CK$.

39*. Cho tam giác ABC. Vẽ đoạn thẳng AD bằng và vuông góc với AB (D và C nằm khác phía đối với AB). Vẽ đoạn thẳng AE bằng và vuông góc với AC (E và B nằm khác phía đối với AC). Vẽ AH vuông góc với BC. Đường thẳng HA cắt DE ở K. Chứng minh rằng DK = KE.

~ ***Ví dụ :*** 29, 34, 35.

Bài tập : 68, 69, 149 đến 155.

§9. TAM GIÁC CÂN

Ngoài tam giác vuông đã được giới thiệu ở §7, mục này giới thiệu một số dạng tam giác đặc biệt : tam giác cân (tam giác có hai cạnh bằng nhau), tam giác đều (tam giác có ba cạnh bằng nhau), tam giác vuông (tam giác có một góc vuông).

Cần chú ý đến tính chất về góc của tam giác cân : Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Các dấu hiệu nhận biết tam giác cân :

– Tam giác có hai cạnh bằng nhau là tam giác cân (định nghĩa).

– Tam giác có hai góc bằng nhau là tam giác cân.

Các dấu hiệu nhận biết tam giác đều :

– Tam giác có ba cạnh bằng nhau là tam giác đều (định nghĩa).

– Tam giác có ba góc bằng nhau là tam giác đều.

– Tam giác cân có một góc bằng 60° là tam giác đều.

Ví dụ 10

Chứng minh rằng :

a) Nếu tam giác vuông có một góc bằng 30° thì cạnh đối diện với góc ấy bằng nửa cạnh huyền.

b) Nếu tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh ấy bằng 30°.

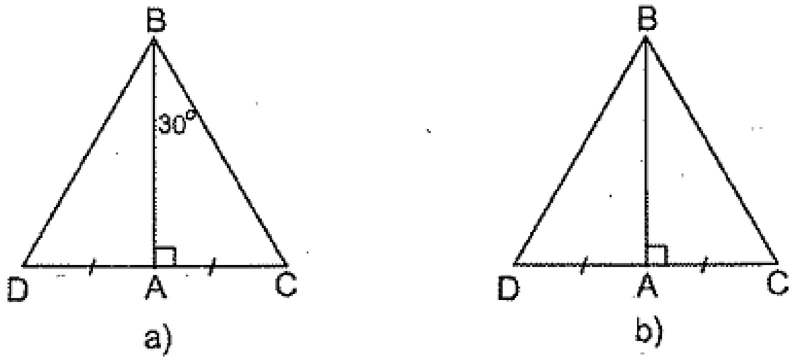
Giải :

a) Xét ΔABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^{\circ}$ (h.24a)

Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho AD = AC.

$\Delta ABD = \Delta ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = BC$, $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} = 30^o$.

Tam giác BDC cân tại B có $\widehat{DBC} = 60^o$ nên là tam giác đều, do đó $DC = BC$. Suy ra $AC = \dfrac{1}{2}BC$.



Hình 24

b) Xét ΔABC vuông tại A có $AC = \dfrac{1}{2}$ BC (h.24b)

Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

$\Delta ABD = \Delta ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = BC$.

Do $AC = \dfrac{1}{2}BC$, $AC = \dfrac{1}{2}DC$ nên $BC = DC$.

Tam giác BDC có $BD = BC = DC$ nên là tam giác đều, do đó $\widehat{C} = 60^o$. Suy ra $\widehat{ABC} = 30^o$.

Bài tập

40. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} < 90^o$, kẻ BD vuông góc với AC. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE = AD$. Chứng minh rằng :

a) DE song song với BC.

b) CE vuông góc với AB.

41. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC, lấy các điểm D và E sao cho $BD = BA$, $CE = CA$. Tính $\widehat{DAE}$.

42. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng :

a) Nếu $AM = \dfrac{BC}{2}$ thì $\widehat{A} = 90^o$.

b) Nếu $AM > \frac{BC}{2}$ thì $\widehat{A} < 90^o$.

c) Nếu $AM < \frac{BC}{2}$ thì $\widehat{A} > 90^o$.

43. Tam giác ABC có $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho AD = AB. Tính $\widehat{CBD}$ theo α.

44. Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, CB. Chứng minh rằng tam giác MEF là tam giác đều.

45. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 120^o$, BC = 6cm. Đường vuông góc với AB tại A cắt BC ở D. Tính độ dài BD.

46. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^o$. Trên tia phân giác của góc A, lấy điểm E sao cho AE = AB + AC. Chứng minh rằng tam giác BCE là tam giác đều.

47*. Ở miền trong góc nhọn xOy, vẽ tia Oz sao cho $\widehat{xOz} = \frac{1}{2}\widehat{yOz}$. Qua điểm A thuộc tia Oy, vẽ AH vuông góc với Ox, cắt Oz ở B. Trên tia Bz lấy điểm D sao cho BD = OA. Chứng minh rằng tam giác AOD là tam giác cân.

48*. Cho $\widehat{xOz} = 120^o$, Oy là tia phân giác của góc xOz, Ot là tia phân giác của góc xOy, M là điểm thuộc miền trong của góc yOz. Vẽ $MA \perp Ox$, vẽ $MB \perp Oy$, vẽ $MC \perp Ot$. Tính độ dài OC theo MA và MB.

49*. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 140^o$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, kẻ tia Cx sao cho $\widehat{ACx} = 110^o$. Gọi D là giao điểm của các tia Cx và BA. Chứng minh rằng AD = BC.

50*. Cho tam giác ABC có các góc nhỏ hơn 120^o. Vẽ ở phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD, ACE. Gọi M là giao điểm của DC và BE. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{BMC} = 120^o$. b) $\widehat{AMB} = 120^o$.

51*. Cho tam giác cân ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 50^o$. Gọi K là điểm trong tam giác sao cho $\widehat{KBC} = 10^o$, $\widehat{KCB} = 30^o$. Chứng minh rằng tam giác ABK là tam giác cân và tính số đo góc BAK.

52*. Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 3AB. Trên AC lấy các điểm D và E sao cho AD = DE = EC. Chứng minh rằng $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 45^o$.

53*. Cho tam giác cân ABC có $\widehat{A} = 100^o$, tia phân giác của góc B cắt AC ở D. Chứng minh rằng BC = BD + AD.

~ ***Ví dụ :*** 14 đến 16, 27, 30 đến 32, 36.

Bài tập : 65 đến 67, 72, 74 đến 76, 120, 125, 128, 129, 134, 137 đến 145, 148, 162 đến 168, 173.

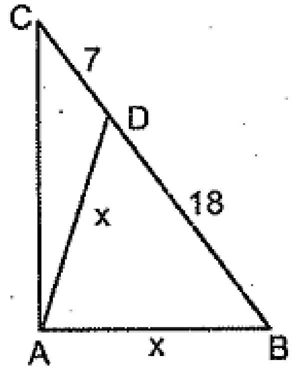
§10. ĐỊNH LÍ PY-TA-GO

Tính chất về cạnh của tam giác vuông được thể hiện trong định lí Py-ta-go : Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

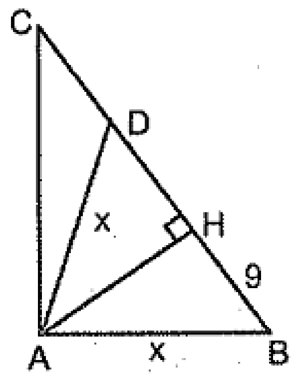
Định lí Py-ta-go đảo cho ta một cách nhận biết tam giác vuông : Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

Ví dụ 11

Tính độ dài x trên hình 25 biết rằng CD = 7, DB = 18, $\widehat{BAC} = 90^o$.



Hình 25



Hình 26

Giải :

Kẻ AH ⊥ BD (h.26). Dễ chứng minh : BH = HD = 9.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔAHB vuông tại H, ta có :

$$AH^2 = AB^2 - HB^2 = x^2 - 9^2 = x^2 - 81. \qquad (1)$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔAHC vuông tại H, ta có :

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = (25^2 - x^2) - 16^2 = 369 - x^2. \qquad (2)$$

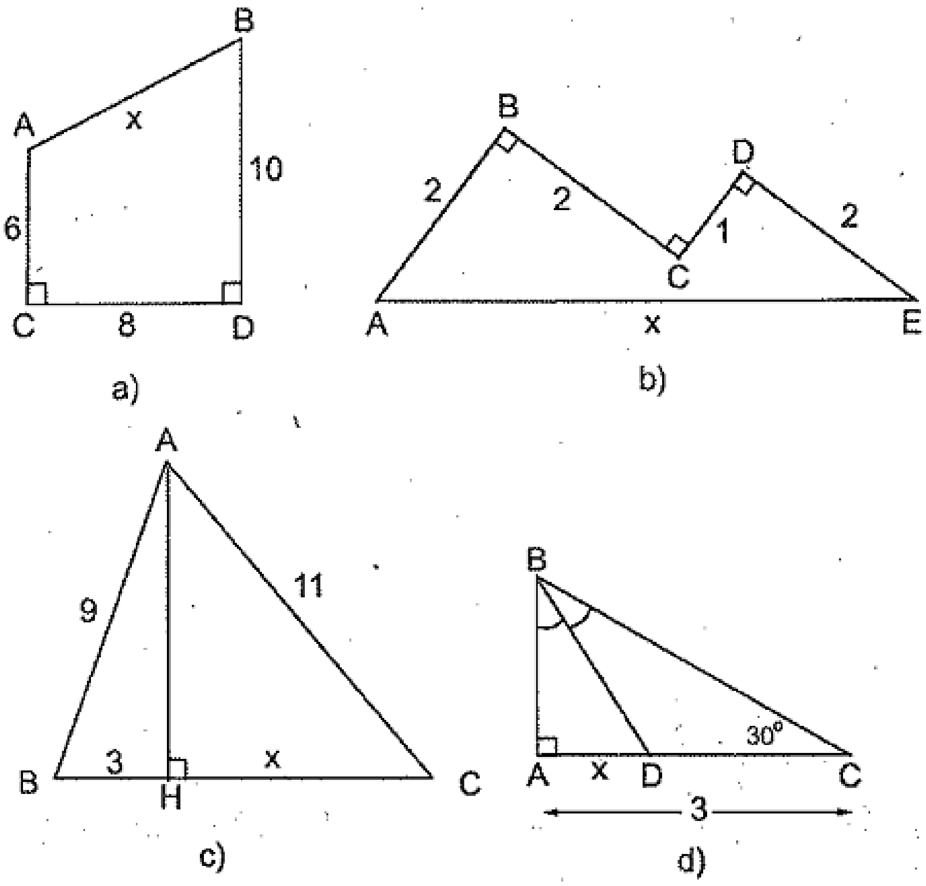
Từ (1) và (2) ta có :

$$x^2 - 81 = 369 - x^2.$$

Do đó : $\quad 2x^2 = 450 \Rightarrow x^2 = 225 = 15^2 \Rightarrow x = 15.$

Bài tập

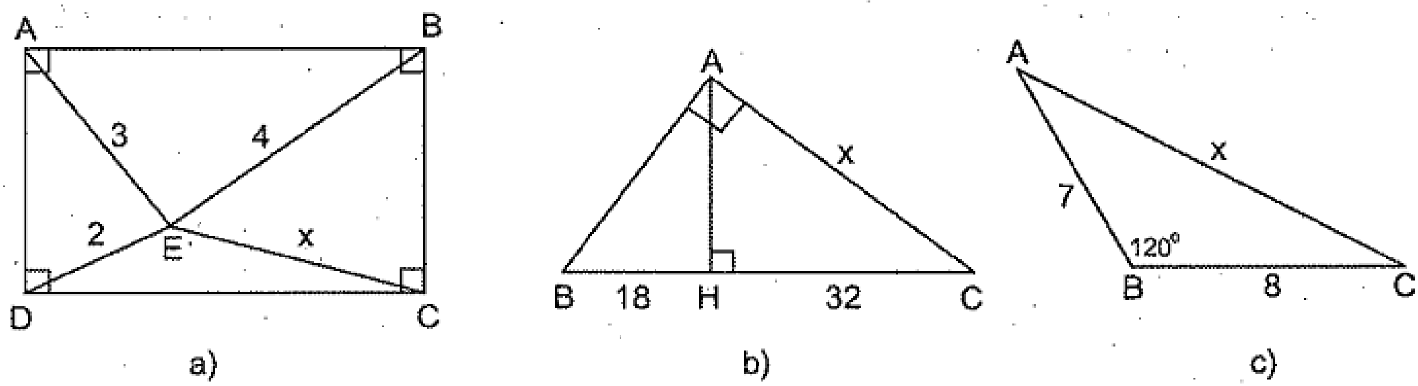
54. Tính độ dài x trên hình 27 :



Hình 27

55. Tam giác ABC vuông tại A có BC = 26cm, AB : AC = 5 : 12. Tính các độ dài AB, AC.

56. Tính độ dài x trên hình 28 :



Hình 28

57. Tam giác ABC có AB = 16cm, AC = 14cm, $\widehat{B} = 60^o$. Độ dài BC bằng :

A) 12cm ; B) 10cm ; C) 6cm ; D) 10cm hoặc 6cm.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

58*. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 30^o$, BC = 2cm. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{CBD} = 60^o$. Tính độ dài AD.

59. Cho các số : 5, 9, 12, 13, 15, 16, 20. Hãy chọn ra các bộ ba số là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

60. Vẽ về một phía của đoạn thẳng AB = 5cm các tia Ax, By vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm D sao cho AD = 5cm. Trên tia By lấy điểm E sao cho BE = 1cm. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C sao cho AC = 2cm. Góc DCE có là góc vuông hay không ?

~ ***Ví dụ :*** 23.

Bài tập : 146, 147.

§11. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Ngoài các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông suy từ các trường hợp bằng nhau cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc và trường hợp cạnh huyền - góc nhọn, đối với tam giác vuông còn có trường hợp bằng nhau cạnh huyền - cạnh góc vuông :

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Ví dụ 12

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) và các điểm M thuộc cạnh AC, H thuộc cạnh BC sao cho MH vuông góc với BC và MH = HB. Chứng minh rằng AH là tia phân giác của góc A.

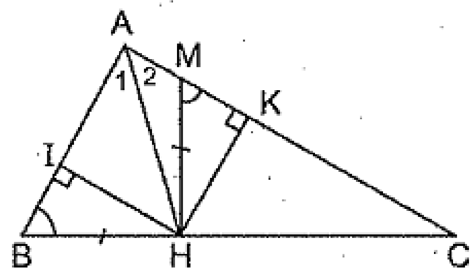
Giải : (h.29)

Kẻ HI ⊥ AB, HK ⊥ AC.

Ta có $\widehat{HMK} = \widehat{B}$ (cùng phụ với $\widehat{C}$).

Δ HKM và Δ HIB có :

$\widehat{K} = \widehat{I} = 90^o$



Hình 29

$HM = HB$ (giả thiết)

$\widehat{HMK} = \widehat{B}$ (chứng minh trên)

Do đó $\Delta HKM = \Delta HIB$ (cạnh huyền - góc nhọn), suy ra $HK = HI$.

ΔHIA và ΔHKA có :

$\widehat{I} = \widehat{K} = 90^\circ$

HA : cạnh chung

$HI = HK$ (chứng minh trên)

Do đó $\Delta HIA = \Delta HKA$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông), suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Do đó AH là tia phân giác của góc A.

Bài tập

61. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} < 90^\circ$. Kẻ BD vuông góc với AC, kẻ CE vuông góc với AB. Gọi K là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng AK là tia phân giác của góc A.

62. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC và AM là tia phân giác của góc A. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

63. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Một đường thẳng d bất kì luôn đi qua A. Kẻ BH và CK vuông góc với đường thẳng d. Chứng minh rằng tổng $BH^2 + CK^2$ có giá trị không đổi.

64. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Tia phân giác của góc B cắt AC ở D. Kẻ DH vuông góc với BC. Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt tia DH ở K. Chứng minh rằng :

a) $BA = BH$;

b) $\widehat{DBK} = 45^\circ$.

~ ***Ví dụ :*** 26.

Bài tập : 70.

CHUYÊN ĐỀ

MỆNH ĐỀ THUẬN, ĐẢO, PHẢN, PHẢN ĐẢO

I – BỐN LOẠI MỆNH ĐỀ

Gọi α và β là số đo của hai góc so le trong tạo bởi hai đường thẳng AB và CD với một cát tuyến (đường thẳng thứ ba cắt hai đường thẳng trên). Xét bốn mệnh đề sau :

1. Nếu $\alpha = \beta$ thì AB // CD (*có* P $\Rightarrow$ *có* Q)

2. Nếu AB // CD thì $\alpha = \beta$ (*có* Q $\Rightarrow$ *có* P)

3. Nếu $\alpha \neq \beta$ thì AB $\not\parallel$ CD (*không* P $\Rightarrow$ *không* Q)

4. Nếu AB $\not\parallel$ CD thì $\alpha \neq \beta$ (*không* Q $\Rightarrow$ *không* P)

Nếu gọi mệnh đề 1 là *mệnh đề thuận* thì mệnh đề 2 là *mệnh đề đảo,* mệnh đề 3 là *mệnh đề phản*, mệnh đề 4 là *mệnh đề phản đảo*.

II – QUAN HỆ GIỮA BỐN LOẠI MỆNH ĐỀ

Mệnh đề thuận và mệnh đề phản đảo bao giờ cũng hoặc cùng đúng hoặc cùng sai. Ta nói rằng hai mệnh đó đó *tương đương*, tức là từ mệnh đề này suy ra được mệnh đề kia và ngược lại.

Chứng minh :

– Bước 1 (chứng minh nếu *có* P $\Rightarrow$ *có* Q thì suy ra *không* Q $\Rightarrow$ *không* P).

Thật vậy nếu *không* Q $\Rightarrow$ *có* P thì theo giả thiết, *có* P $\Rightarrow$ *có* Q. Ta được đồng thời *có* Q *và không* Q, mâu thuẫn.

– Bước 2 (chứng minh nếu *không* Q $\Rightarrow$ *không* P thì suy ra *có* P $\Rightarrow$ *có* Q)

Thật vậy, nếu *có* P $\Rightarrow$ *không* Q thì theo giả thiết, *không* Q $\Rightarrow$ *không* P. Ta được đồng thời *có* P *và không* P, mâu thuẫn.

Như vậy, cặp mệnh đề thuận và phản đảo là tương đương. Cũng chứng minh tương tự, cặp mệnh đề đảo và phản là tương đương.

Do sự tương đương này, có thể chứng minh một định lí bằng cách chứng minh mệnh đề tương đương với nó (xem *Phương pháp phản chứng).*

Trong ví dụ ở mục I, các mệnh đề thuận và phản đảo cùng đúng, các mệnh đề đảo và phản cùng đúng, chúng được gọi là các định lí.

Trong ví dụ dưới đây, các mệnh đề thuận và phản đảo cùng đúng, được gọi là định lí thuận, định lí phản đảo, còn các mệnh đề đảo và phản cùng sai, chúng không phải là các định lí.

– Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau : đúng.

– Hai góc bằng nhau thì đối đỉnh : sai.

– Hai góc không đối đỉnh thì không bằng nhau : sai.

– Hai góc không bằng nhau thì không đối đỉnh : đúng.

III – CÁCH LẬP MỆNH ĐỀ ĐẢO

Một trong các cách đào sâu, khai thác một định lí là xét mệnh đề đảo của nó. Vì thế cần biết cách lập mệnh đề đảo của một mệnh đề cho trước.

1. Mệnh đề thuận dạng *Nếu có* A *thì có* B, mệnh đề đảo là *Nếu có* B *thì có* A.

2. Mệnh đề thuận dạng *Nếu có* A *và có* B *thì có* C, có thể lập các mệnh đề đảo :

a) *Nếu có* C *thì có* A *và* B (đổi chỗ giả thiết và kết luận).

b) *Nếu có* A *và có* C *thì có* B (mệnh đề thuận và đảo đều có A là giả thiết chung).

c) *Nếu có* B *và có* C *thì có* A (mệnh đề thuận và đảo đều có B là giả thiết chung).

Một ví dụ. Cho tam giác ABC.

– Mệnh đề thuận : $\widehat{A} = 90^o,\ \widehat{B} = 30^o \Rightarrow AC = \dfrac{BC}{2}$ (xem ví dụ 10).

– Mệnh đề đảo 1 : $AC = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 90^o,\ \widehat{B} = 30^o$ (sai).

– Mệnh đề đảo 2 : $\widehat{A} = 90^o,\ AC = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 30^o$ (xem ví dụ 10).

– Mệnh đề đảo 3 : $\widehat{B} = 30^o,\ AC = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 90^o$ (xem ví dụ 23).

Một ví dụ khác. Cho tam giác ABC.

– Mệnh đề thuận : $AB = AC,\ \widehat{A} = 60^o \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

– Mệnh đề đảo : $\Delta\ ABC$ đều $\Rightarrow AB = AC,\ \widehat{A} = 60^o$ (đúng).

3. Mệnh đề thuận dạng *Nếu có* A, *có* B *và có* C *thì có* D, dạng *Nếu có* A, *có* B *thì có* C *và có* D..., có nhiều cách lập mệnh đề đảo bằng cách đổi chỗ giả thiết và kết luận cho nhau, hoặc giữ lại một phần giả thiết của mệnh đề thuận làm giả thiết chung (xem phần bài tập vận dụng).

Bài tập

Giải các bài toán sau (bài 65 – 67) và xét bài toán đảo của các bài toán đó (quy ước bài toán đảo là mệnh đề đảo đúng) :

65(9). Cạnh đáy của một tam giác cân thì song song với tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh đối diện.

66(9). Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho CE = BD. Gọi O là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC cân tại A thì OD = OE.

67*(9). Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{B} = 75^{\circ}$. Kẻ CH vuông góc với AB. Chứng minh rằng $CH = \frac{AB}{2}$.

ĐẶC BIỆT HOÁ

I – ĐẶC BIỆT HOÁ LÀ GÌ ?

Xét hai bài toán sau :

Bài toán 1. Nếu ΔABC có $\widehat{A} = \alpha$, các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau ở O thì $\widehat{BOC} = 90^{\circ} + \frac{\alpha}{2}$.

Bài toán 2. Nếu ΔABC vuông ở A, các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau ở O thì $\widehat{BOC} = 135^{\circ}$.

Bài toán 2 là trường hợp đặc biệt của bài toán 1 khi thay α bởi 90°. Đặc biệt hoá là chuyển từ trường hợp chung sang trường hợp riêng, sang trường hợp đặc biệt.

II – CÁC CÁCH ĐẶC BIỆT HOÁ

Người ta thường đặc biệt hoá bài toán bằng cách :

1. Thay biến số bởi hằng số, cho các số đo góc hoặc độ dài đoạn thẳng bằng các số cụ thể, chẳng hạn thay α bởi $\alpha = 90^{\circ}$.

2. Thay các điều kiện của bài toán bởi điều kiện hẹp hơn, chẳng hạn thay ΔABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$ bởi ΔABC vuông tại B.

3. Thay vị trí bất kì của một điểm, của một hình bằng vị trí đặc biệt của nó, chẳng hạn trong các điểm C thuộc đoạn thẳng AB, xét C trùng A, hoặc trùng B, hoặc là trung điểm của AB.

4. Bổ sung thêm các quan hệ mới vào bài toán, chẳng hạn trong các tam giác ABC, xét tam giác cân đáy BC (bổ sung thêm điều kiện AB = AC).

III – TÁC DỤNG CỦA ĐẶC BIỆT HOÁ

Ta biết rằng một tính chất đúng trong trường hợp chung thì cũng đúng trong trường hợp đặc biệt, một tính chất sai trong trường hợp đặc biệt thì cũng sai trong trường hợp chung. Do đó phương pháp đặc biệt hoá được dùng để :

1. Bác bỏ một mệnh đề

Ví dụ 13(7)

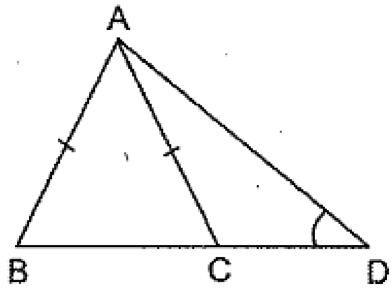
Xét mệnh đề : Nếu hai cạnh và một góc của tam giác này bằng hai cạnh và một góc của tam giác kia thì hai tam giác ấy bằng nhau.

Mệnh đề trên có đúng không ?

Giải : Mệnh đề trên không đúng.

Để bác bỏ mệnh đề trên chỉ cần nêu ra một trường hợp đặc biệt : tồn tại một hình thoả mãn giả thiết của mệnh đề nhưng không đúng với kết luận của mệnh đề ấy.

Chẳng hạn, vẽ ΔABC có AB = AC, rồi lấy điểm D trên tia đối của tia CB (h.30). Các tam giác ABD và ACD có cạnh AD chung, AB = AC, $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ nhưng hai tam giác ấy không bằng nhau.



Hình 30

2. Phát hiện một tính chất

Ví dụ 14(8)

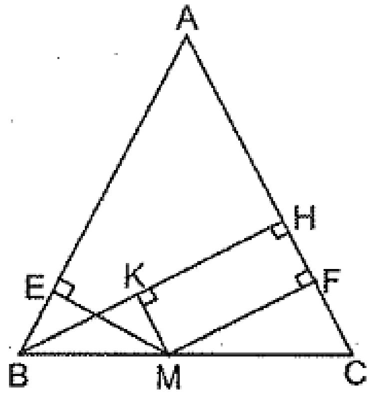
Cho tam giác ABC cân tại A. Qua điểm M bất kì trên đáy BC, kẻ ME vuông góc với AB, kẻ MF vuông góc với AC. Chứng minh rằng tổng ME + MF không đổi khi điểm M thay đổi vị trí trên cạnh BC.

Nhận xét : Ta xét vị trí đặc biệt của điểm M là M trùng với B. Khi đó đoạn thẳng ME "suy biến" thành điểm B, còn đoạn thẳng MF trở thành đoạn thẳng BH vuông góc với AC (h. 31), độ dài BH không đổi. Ta sẽ chứng minh rằng ME + MF = BH.

Giải : (h.31)

Kẻ $BH \perp AC$, $MK \perp BH$. Dễ dàng chứng minh

$$MF = KH \qquad (1)$$



Hình 31

$\Delta MBK = \Delta BME$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra

$$BK = ME \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có :

$$ME + MF = BK + KH = BH \text{ (không đổi).}$$

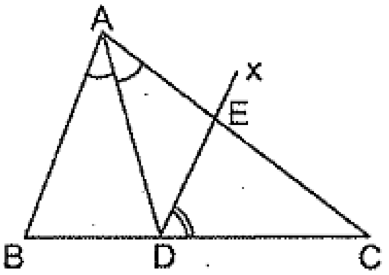
3. Đặt ra một bài toán mới

Một ví dụ. Cho tam giác ABC, $AC \geq AB$, tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Trên nửa mặt phẳng chứa A bờ BC, vẽ tia Dx sao cho $\widehat{CDx} = \widehat{BAC}$, tia này cắt CA ở E. Chứng minh rằng DB = DE (h.32).

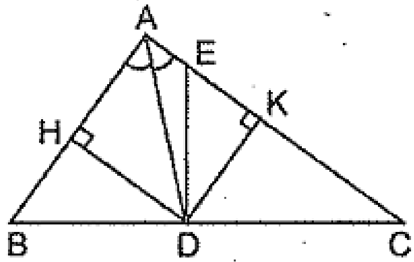
Đặc biệt hoá ví dụ trên khi $\widehat{BAC} = 90^{\circ}$, khi đó Dx vuông góc với BC, ta có bài toán mới sau đây :

Ví dụ 15(9)

Cho tam giác ABC vuông tại A, AC > AB, tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC ở E. Chứng minh rằng DB = DE.



Hình 32



Hình 33

Giải : (h.33)

Vẽ $DH \perp AB$, $DK \perp AC$. Ta có $\widehat{BDH} = \widehat{EDK}$ (cùng phụ với $\widehat{HDE}$). Ta lại có DH = DK. Do đó $\Delta BDH = \Delta EDK$ (g.c.g), suy ra DB = DE.

Các cách giải khác :

1. Trên tia AB lấy điểm F sao cho AF = AE, rồi chứng minh rằng DB và DE cùng bằng DF.

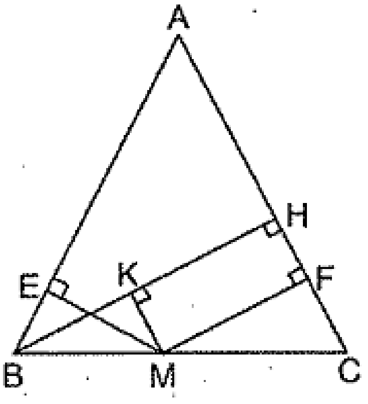
2. Trên tia AC lấy điểm N sao cho AN = AB, rồi chứng minh rằng DB và DE cùng bằng DN.

IV – CHÚ Ý

Ta cũng phân biệt *vị trí đặc biệt* và *vị trí giới hạn*. Một tính chất nào đó đúng trong trường hợp chung thì cũng đúng ở vị trí đặc biệt, nhưng có thể không đúng ở vị trí giới hạn. Tuy nhiên đôi khi ta cũng có thể xét vị trí giới hạn để dự đoán kết quả của bài toán.

Ví dụ 16(9)

Cho tam giác ABC cân tại A, M là điểm bất kì nằm giữa B và C. Các điểm E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC. Chứng minh rằng với mọi vị trí trên của điểm M, tổng ME + MF có giá trị không đổi (h.34).



Hình 34

Điểm M nằm trên đoạn thẳng BC nhưng không trùng B hoặc C (vì M nằm giữa B và C), ta gọi B và C là các vị trí giới hạn của điểm M, còn một trong các điểm nằm giữa B và C là vị trí đặc biệt của điểm M.

Mặc dù điểm M không thể trùng B nhưng ta vẫn có thể xét vị trí giới hạn của M là B để dự đoán kết quả. Khi đó đoạn thẳng ME "suy biến" thành điểm B, MF = BH (BH là đường vuông góc kẻ từ B đến cạnh bên AC) và ME + MF = BH (không đổi). Ta dự đoán ME + MF bằng BH.

Dự đoán này được khẳng định : Xem ví dụ 14.

Bài tập

Dùng phương pháp đặc biệt hoá để bác bỏ các mệnh đề sau (bài 68 – 70) :

68(8). Nếu một cạnh và hai góc của tam giác này bằng một cạnh và hai góc của tam giác kia thì hai tam giác ấy bằng nhau (!).

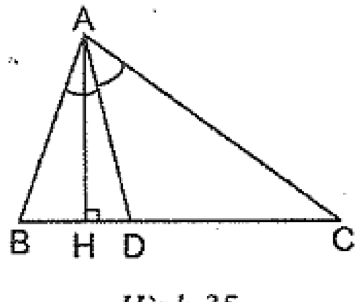
69(8). Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông ấy bằng nhau (!)

70(11). Nếu hai cạnh và đường cao ứng với cạnh còn lại của tam giác này tương ứng bằng hai cạnh và đường cao ứng với cạnh còn lại của tam giác kia thì hai tam giác ấy bằng nhau (!)

71(5). *Bằng cách đặc biệt hoá, chỉ ra chỗ sai trong cách giải bài toán sau :*

Cho tam giác ABC, AB < AC, tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Kẻ AH vuông góc với BC. Tính $\widehat{HAD}$ theo $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$.

Giải : (h.35)



Hình 35

Đặt $\widehat{BAC} = \widehat{A}$.

Ta có $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{BAH}$, $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{HAC}$

nên $$\widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{HAC} - \widehat{BAH} \qquad (1)$$

Mặt khác, $\widehat{DAH} = \dfrac{\widehat{A}}{2} - \widehat{BAH}$, $\widehat{DAH} = \widehat{HAC} - \dfrac{\widehat{A}}{2}$

nên $$2\widehat{DAH} = \left(\dfrac{\widehat{A}}{2} - \widehat{BAH}\right) + \left(\widehat{HAC} - \dfrac{\widehat{A}}{2}\right) = \widehat{HAC} - \widehat{BAH} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DAH} = \dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$.

72*(9). *Vận dụng phương pháp đặc biệt hoá để tìm cách giải bài toán sau :* Gọi O là điểm nằm trong tam giác đều ABC, các điểm H, I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ O đến BC, AC, AB. Chứng minh rằng tổng AK + BH + CI không phụ thuộc vào vị trí của điểm O trong tam giác.

73(7). Xét bài toán : Cho $\widehat{xOy} \le 90^o$, A là điểm nằm trong góc đó. Vẽ các điểm B và C sao cho Ox là đường trung trực của AB, Oy là đường trung trực của AC. Chứng minh rằng OB = OC, $\widehat{BOC} = 2\widehat{xOy}$.

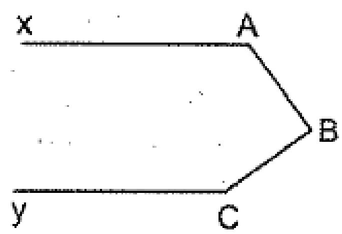
Hãy đặc biệt hoá bài toán trên khi $\widehat{xOy} = 90^o$ và nêu thành bài toán mới.

TỔNG QUÁT HOÁ

I – TỔNG QUÁT HOÁ LÀ GÌ ?

Quá trình ngược lại của đặc biệt hoá là tổng quát hoá, tức là chuyển từ trường hợp đặc biệt sang trường hợp tổng quát hơn.

Chẳng hạn : Trên hình 36 nếu $\widehat{A} = 130^o$, $\widehat{B} = 90^o$, $\widehat{C} = 140^o$ thì Ax // Cy. Bỏ các số đo của các góc A, B, C và thay bằng điều kiện "rộng hơn" là $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360^o$ ta vẫn có Ax // Cy, như vậy ta được bài toán tổng quát hơn.



Hình 36

II – CÁC CÁCH TỔNG QUÁT HOÁ

Người ta thường tổng quát hoá bài toán bằng cách :

1. Thay hằng số bởi biến số, chẳng hạn thay góc 50^o bởi góc α.

2. Thay các điều kiện trong bài toán bởi điều kiện "rộng hơn" (điều kiện cũ là một trường hợp riêng), chẳng hạn thay $\widehat{A} = 130^o$, $\widehat{B} = 90^o$, $\widehat{C} = 140^o$ bởi $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360^o$, thay ΔABC có $\widehat{B} = 90^o$ bởi ΔABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$.

3. Thay vị trí đặc biệt của một điểm, của một hình bởi vị trí bất kì của nó, chẳng hạn thay trung điểm của đoạn thẳng bởi điểm bất kì thuộc đoạn thẳng đó.

4. Bỏ bớt một điều kiện của giả thiết, chẳng hạn thay tam giác vuông bởi tam giác bất kì.

III – TÁC DỤNG CỦA TỔNG QUÁT HOÁ

Nếu bài toán tổng quát vẫn đúng, ta có bài toán "mạnh hơn" bài toán ban đầu, đúng với một lớp đối tượng rộng hơn so với bài toán ban đầu. Nhờ tổng quát hoá mà ta có thể đi đến công thức tổng quát, có thể sáng tạo ra các bài toán mới, các định lí mới.

Bài tập

Nêu và giải các bài toán tổng quát hơn các bài toán sau (bài 74 – 76) :

74(9). Cho tam giác đều ABC, M là trung điểm của BC. Vẽ ME song song với AB (E thuộc AC), vẽ MF song song với AC (F thuộc AB). Chứng minh rằng $\Delta BME = \Delta FMC$.

75(9). Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ ở phía ngoài tam giác ấy các tam giác BAD, CAE vuông cân tại A. Vẽ AH vuông góc với BC, đường thẳng HA cắt DE ở K. Chứng minh rằng K là trung điểm của DE.

76(9). Cho tam giác ABC vuông tại A, AC > AB, tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC ở E. Chứng minh rằng DB = DE (ví dụ 15).

Bài đọc thêm

Ơ-CLIT VÀ BỘ SÁCH CƠ BẢN

Hình học là một trong những môn học xuất hiện khá sớm. Hàng nghìn năm trước Công nguyên, con người đã phải đo đạc các thửa ruộng, đong thóc gạo sau khi thu hoạch, đã xây dựng những kim tự tháp khổng lồ. Môn hình học lúc đầu ra đời với ý nghĩa là một khoa học về đo đạc : danh từ *géométrie* (hình học) có nghĩa là phép đạc điền (*géo* : đất, *métrie* : đo). Nhưng rồi con người không phải chỉ cần đo đất, mà còn cần nghiên cứu nhiều tính chất hình học phức tạp hơn. Tuy nhiên, hình học chỉ trở thành một môn khoa học thực sự khi người ta nêu lên các tính chất hình học bằng con đường suy diễn chặt chẽ, chứ không phải chỉ bằng đo đạc trực tiếp.

Khoa học hình học gắn liền với tên tuổi nhà toán

học Hi Lạp vĩ đại *Ơ-clit (Euclide)*. Ơ-clit sinh ở A-ten, sống khoảng năm 330 – 275 trước Công nguyên, được hoàng đế Ptô-lê-mê I mời về làm việc ở A-lêc-xan-đri, một trung tâm khoa học lớn thời cổ trên bờ Địa Trung Hải.

Ơ-clit

Bằng cách chọn lọc, phân loại các kiến thức hình học đã có, bổ sung, khái quát và sắp xếp chúng lại thành một hệ thống chặt chẽ, dùng các tính chất trước để suy ra các tính chất sau, bộ sách *Cơ bản* đồ sộ của Ơ-clit đã đặt nền móng cho môn hình học cũng như cho toàn bộ toán học cổ đại. Bộ sách gồm 13 cuốn : sáu cuốn đầu gồm các kiến thức về hình học phẳng, ba cuốn tiếp theo có nội dung số học được trình bày dưới dạng hình học, cuốn thứ mười gồm các phép dựng hình có liên quan đến đại số, ba cuốn cuối cùng nói về hình học không gian. Trong cuốn thứ nhất, Ơ-clit đưa ra năm định đề :

1. Qua hai điểm bất kì, luôn luôn vẽ được một đường thẳng.

2. Đường thẳng có thể kéo dài ra vô hạn.

3. Với tâm bất kì và với bán kính bất kì, luôn luôn vẽ được một đường tròn.

4. Mọi góc vuông đều bằng nhau.

5. Nếu hai đường thẳng tạo thành với một đường thẳng thứ ba hai góc trong cùng phía có tổng nhỏ hơn 180° thì chúng sẽ cắt nhau về phía đó.

Và năm tiên đề :

1. Hai cái cùng bằng cái thứ ba thì bằng nhau.

2. Thêm những cái bằng nhau vào những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.

3. Bớt đi những cái bằng nhau từ những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.

4. Trùng nhau thì bằng nhau.

5. Toàn thể lớn hơn một phần.

Với các định đề và tiên đề đó, Ơ-clit đã chứng minh tất cả các tính chất hình học.

Một lần, hoàng đế Ptô-lê-mê I nói với ông :

– Không lẽ ta lại phải đọc đủ 13 quyển trong bộ sách của ngươi sao ? Liệu ta có thể đến với hình học bằng con đường nào ngắn hơn không ?

Nhà toán học đã trả lời :

– Tâu bệ hạ, trong khoa học không có con đường dành riêng cho các vị vua chúa, mà chỉ có con đường dành cho những người kiên trì, nhẫn nại.

Có lần nghe thấy một học trò phàn nàn rằng anh ta chẳng thấy lợi ích thiết thực của môn Hình học, Ơ-clit quay sang một người hầu và bảo :

– Hãy cho anh học trò này một đồng tiền vì anh ta muốn có ngay lợi nhuận từ những gì anh ta đã học được.

Con đường suy diễn hệ thống và chặt chẽ của bộ Cơ bản làm cho tập sách được chép tay và truyền đi các nước. Khi loài người biết in sách, bộ Cơ bản được dịch và in ra nhiều thứ tiếng. Cho đến đầu thế kỉ XX, chương trình hình học phổ thông của các nước trên thế giới hầu như lặp lại nội dung của bộ sách này. Vì thế môn hình học hiện nay chúng ta học được gọi là *hình học Ơ-clit*.

Tuy nhiên, các định đề và tiên đề của Ơ-clit còn quá ít, đặc biệt là không có các tiên đề về liên tục, nên trong nhiều chứng minh, ông phải dựa vào trực giác hoặc thừa nhận những điều mà ông không nêu lên thành tiên đề. Năm 1899, nhà toán học Đức Hin-be (*Hilbert*, 1862 - 1943) đã đưa ra một hệ tiên đề đầy đủ cho hình học Ơ-clit gồm 20 tiên đề, trong đó có 13 tiên đề về hình học phẳng và 7 tiên đề về hình học không gian, chia thành 5 nhóm (nhóm tiên đề về liên thuộc, về thứ tự, về bằng nhau, về liên tục, về song song) đồng thời chứng minh sự phi mâu thuẫn, sự đầy đủ và sự độc lập của các tiên đề ấy. Công trình của Hin-be mở ra một giai đoạn mới trong lịch sử của phương pháp tiên đề.

TIÊN ĐỀ Ơ-CLIT VÀ HÌNH HỌC PHI Ơ-CLIT

Trong các tiên đề của cuốn *Cơ bản* mà Ơ-clit nêu lên, có tiên đề thứ năm :

Nếu hai đường thẳng tạo thành với một đường thẳng thứ ba hai góc trong cùng phía có tổng nhỏ hơn 180^o thì chúng sẽ cắt nhau về phía đó.

Tiên đề này tương đương với một trong các mệnh đề sau :

1. Nếu hai đường thẳng song song cắt đường thẳng thứ ba thì chúng tạo thành các cặp góc trong cùng phía bù nhau.
2. Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.
3. Tổng các góc của một tam giác bằng 180^o.

Khác với các tiên đề còn lại, tiên đề thứ năm của Ơ-clit mà chúng ta gọi là *tiên đề Ơ-clit* hay *tiên đề về đường thẳng song song*, có vẻ không hiển nhiên lắm. Dường như có thể chứng minh được tiên đề này dựa vào các tiên đề đã có. Chính điều đó đã lôi cuốn nhiều nhà toán học tìm cách chứng minh nó trong suốt hai nghìn năm. Nhưng lần nào cũng vậy, để chứng minh tiên đề thứ năm, người ta lại phải thừa nhận một mệnh đề khác tương đương với tiên đề này.

Người đầu tiên đi theo con đường mới là nhà toán học Nga Ni-cô-lai I-va-nô-vích Lô-ba-sep-xki (1792 – 1856). Ông kết luận rằng tiên đề về đường thẳng song song không thể chứng minh được, tức là không thể suy ra được từ các tiên đề còn lại. Ông thừa nhận các tiên đề của Ơ-clit, trừ tiên đề về đường thẳng song song. Thay cho tiên đề ấy, ông đưa ra tiên đề sau : *Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, có ít nhất là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó.* Với hệ thống tiên đề này, ông đã xây dựng được cả một hệ thống hình học, được gọi là hình học phi Ơ-clit, trong đó tổng các góc của một tam giác nhỏ hơn 180^{o}. Lô-ba-sep-xki đã công bố các kết quả nghiên cứu của mình về hình học phi Ơ-clit vào năm 1826. Mặc dù Lô-ba-sep-xki giải thích rằng môn hình học mới này chỉ áp dụng được đối với những không gian khổng lồ, với khoảng cách cực lớn giữa các ngôi sao, nhưng vấn đề mà ông nêu ra quá mới lạ nên nhiều người không hiểu, thậm chí còn chế diễu ông, cho môn hình học của ông là vô lí, hoang đường.

Lô-ba-sep-xki

Thực ra, nhà toán học vĩ đại người Đức Gau-xơ (1777 – 1855) người được gọi là "vua của các nhà toán học" cũng đã có ý nghĩ là có thể có một hệ thống hình học khác với hình học Ơ-clit và năm 1818, ông đã đạt được những bước quan trọng trong việc nghiên cứu môn hình học mới này. Nhưng ông không công bố những kết quả nghiên cứu của mình, và cũng không phát biểu công khai gì về hình học Lô-ba-sep-xki. Vì sao vậy ? Gau-xơ hiểu rằng những ý kiến quá táo bạo, trái với những gì đã quen thuộc sẽ gặp phải sự phản ứng mạnh mẽ, rằng nếu công bố ý kiến của mình mà chưa được hoàn chỉnh thì sẽ mất uy tín đối với các nhà toán học đương thời. Ông tiếp tục tìm tòi thêm về hình học phi Ơ-clit nhưng không kịp thực hiện ý định của mình, ông mất năm 1855.

Một nhà toán học khác người Hung-ga-ri là I-a-nôs Bô-i-oi (1802 – 1860) nghiên cứu độc lập với Lô-ba-sep-xki, năm 1832 đã công bố công trình của mình về hình học phi Ơ-clit. Nhưng bi quan vì quan điểm của mình không được mọi người thừa nhận, ông không tiếp tục nghiên cứu về hình học phi Ơ-clit nữa, nhất là sau khi ông được đọc cuốn sách của Lô-ba-sep-xki dịch ra tiếng Đức năm 1840.

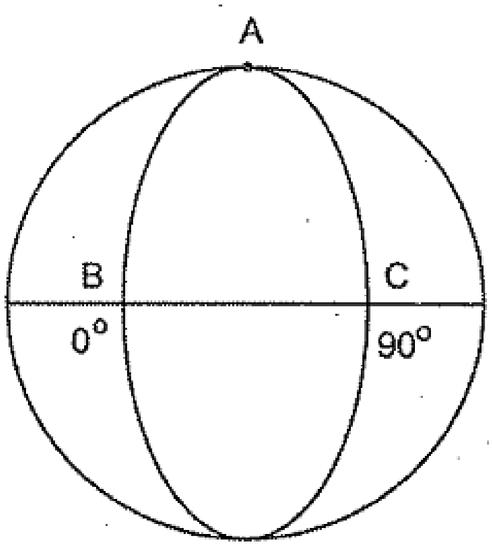
Còn Lô-ba-sep-xki, tuy bị công kích kịch liệt, vẫn không nhụt chí, ông tiếp tục nghiên cứu và hoàn thiện lí thuyết của mình trong suốt 30 năm nghiên cứu đơn độc.

Hình học Lô-ba-sep-xki không phải là hình học phi Ơ-clit duy nhất. Năm 1854, nhà toán học Đức Ri-man (1826 – 1866) đã đưa ra cách xây dựng nhiều thứ hình học phi Ơ-clit khác nhau, nhưng tư tưởng và phương pháp của Ri-man lúc đó còn ít được chú ý.

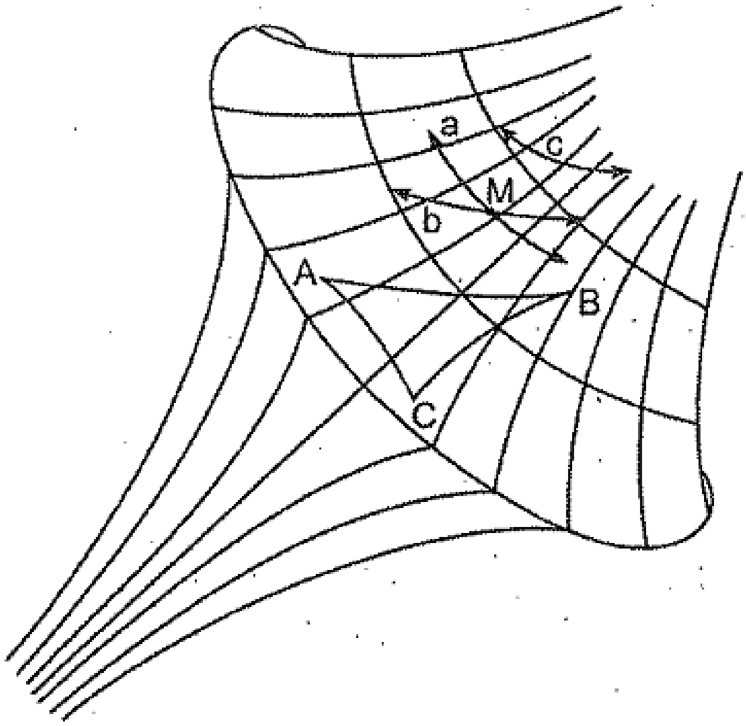
Sau khi Gau-xơ mất vài năm, người ta mới công bố các thư từ của Gau-xơ viết cho bạn bè, trong đó ông đánh giá cao công trình hình học phi Ơ-clit của Lô-ba-sep-xki. Uy tín của Gau-xơ làm cho thế giới toán học lại bắt đầu quan tâm tới hình học phi Ơ-clit.

Năm 1868, nhà toán học Ý Ben-tơ-ra-mi đã chứng minh được rằng hình học Lô-ba-sep-xki đúng trên các mặt có độ cong là hằng số âm (mặt có độ cong là hằng số dương là mặt cầu, hình học trên mặt đó là hình học cầu; hình học Ơ-clit thông thường là hình học trên mặt có độ cong bằng không).

Năm 1871, nhà toán học Đức Klai-nơ *(Klein)* đã xây dựng được một mô hình của hình học Lô-ba-sep-xki. Với mô hình ấy, ông đã chứng minh rằng hình học Lô-ba-sep-xki là phi mâu thuẫn. Môn hình học mà Lô-ba-sep-xki đã xây dựng chỉ bằng suy diễn lôgic thuần túy nay đã có một mô hình cụ thể. Đến đây kết thúc một vấn đề ám ảnh các nhà toán học trong suốt hai nghìn năm : rõ ràng là tiên đề về đường thẳng song song là không thể chứng minh được.



Hình 37



Hình 38

Ta hãy tưởng tượng một tam giác ABC trên Trái Đất có đỉnh A ở Bắc cực, đỉnh B là giao điểm của xích đạo với kinh tuyến gốc 0^o, đỉnh C là giao điểm của xích đạo với kinh tuyến 90^o (h.37). Ba góc của tam giác này đều bằng 90^o, và tổng ba góc của tam giác ấy bằng 270^o. Như vậy trên mặt cầu, mặt có độ cong là hằng số dương, tổng các góc của một tam giác lớn hơn 180^o. Còn trên mặt có độ cong là hằng số âm như hình 38, tổng các góc của tam giác ABC nhỏ hơn 180^o, đồng thời qua điểm

M trên mặt cong ấy, ta có cả đường thẳng a lẫn đường thẳng b cùng song song với đường thẳng c. Vũ trụ của chúng ta dưới sức hút của Mặt Trời và của các ngôi sao,

là một không gian cong như thế, điều đó đã được chứng minh bằng thuyết tương đối của Anh-xtanh, nhà vật lí học vĩ đại nhất thế kỉ XX. Những đo đạc chính xác về vật lí và thiên văn đã khẳng định hình học Lô-ba-sep-xki về mặt lí luận.

Chính trong thư gửi Gau-xơ, Lô-ba-sep-xki viết rằng môn hình học của ông có vẻ như là một nghịch lí, trái với quan niệm thông thường, nhưng ông không hề tìm thấy một sự mâu thuẫn nào trong môn hình học này. Trong thư, ông viết : "Chúng ta biết rất ít, hoặc thậm chí chưa biết gì về bản chất của không gian. Chúng ta không nên lẫn lộn cái khác thường với cái không thể có".

Có thể nói rằng hình học Ơ-clit là môn hình học của không gian và các khoảng cách trên mặt đất. Còn hình học phi Ơ-clit là môn hình học của không gian khổng lồ giữa các hành tinh, là hình học của vũ trụ, trong đó hình học Ơ-clit như một trường hợp đặc biệt.

Hình học phi Ơ-clit lúc đầu còn bị cho là kì quặc, hoang tưởng, nay đã trở nên quen thuộc, đặc biệt là với các nhà trắc địa, các nhà thiên văn, các nhà nghiên cứu vũ trụ.

LỜI GIẢI, CHỈ DẪN HOẶC ĐÁP SỐ

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I - SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

§1. Cộng, trừ, nhân, chia các số hữu tỉ

1. a) $\frac{18}{91} < \frac{18}{90} = \frac{1}{5} = \frac{23}{115} < \frac{23}{114}$. Do đó $\frac{-18}{91} > \frac{-23}{114}$.

b) $\frac{22}{35} = \frac{110}{175} > \frac{103}{175} > \frac{103}{177}$. Do đó $\frac{-22}{35} < \frac{-103}{177}$.

2. Trước hết ta xét phân số $\frac{9}{x}$ sao cho $\frac{11}{15} < \frac{9}{x} < \frac{11}{13}$. Biến đổi để tử của các phân số này bằng nhau :

$$\frac{99}{135} < \frac{99}{11x} < \frac{99}{117} \Rightarrow 135 > 11x > 117 \Rightarrow 12\frac{3}{11} > x > 10\frac{7}{11}.$$

Do đó x bằng 11 hoặc 12.

Suy ra : $\frac{-11}{13} < \frac{9}{-11} < \frac{-11}{15}$; $\frac{-11}{13} < \frac{9}{-12} < \frac{-11}{15}$.

3. a) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd} \Rightarrow ad < bc$.

b) Xét hiệu : $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$.

Xét hiệu : $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc+cd-ad-cd}{d(b+d)} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} > 0$.

4. a) -1 ; 3 ; -4 ; -5.

b) Bằng nhau.

c) Tổng bằng : 33 + 11 + 3 + 1 = 48 (đó chính là số thừa số 3 được chứa trong tích 1.2.3... 100).

d) Tổng bằng : 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47 (đó chính là số thừa số 2 được chứa trong tích 1. 2. 3... 50).

e) $[x] \le x$; $[x] \ge y$.

5. a) $\frac{-3}{20}$; b) $\frac{-1}{4}$.

c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{5}-\frac{4}{35}\right)+\frac{1}{41}=2\frac{1}{41}$.

d) $\frac{1}{100.99}-\left(\frac{1}{99.98}+\frac{1}{98.97}+...+\frac{1}{2.1}\right)$.

Biểu thức trong dấu ngoặc bằng :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}=1-\frac{1}{99}=\frac{98}{99}.$$

Kết quả bằng : $\frac{1}{9900}-\frac{98}{99}=\frac{-9799}{9900}$.

6. a) 1,4089 = 1 + 0,4089.

0,1398 = 0 + 0,1398.

−0,4771 = −1 + 0,5229.

−1,2592 = −2 + 0,7408.

b) Theo cách thứ nhất, tổng bằng : 1,5487 − 1,7363 = −0,1876.

Theo cách thứ hai, tổng bằng : −2 + 1,8124 = −0,1876.

c) Bằng nhau.

7. a) $A=\frac{3n+9}{n-4}=\frac{3(n-4)+21}{n-4}=3+\frac{21}{n-4}$.

Để A là số nguyên, n − 4 phải là ước của 21. Ta được :

n − 4	−21	−7	−3	−1	1	3	7	21
n	−17	−3	1	3	5	7	11	25
A	2	0	−4	−18	24	10	6	4

b) Biến đổi : $B = 3 + \frac{8}{2n-1}$.

$2n - 1$ là ước lẻ của 8.

Đáp số :

n	1	0
B	11	–5

8. $\frac{5}{x} = \frac{1}{8} - \frac{y}{4} = \frac{1-2y}{8}$.

$x(1 - 2y) = 40 \Rightarrow 1 - 2y$ là ước lẻ của 40.

Đáp số :

x	40	–40	8	–8
y	0	1	–2	3

9. Các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 20 gồm 39 số là :

$$-19, -18, ..., -1, 0, 1, ..., 18, 19. \qquad (1)$$

Giả sử 39 số nói trên viết thành dãy số sau :

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_{39}.$$

Cần tìm tổng :

$$S = (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + (a_3 - 3) + ... + (a_{39} - 39)$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{39}) - (1 + 2 + 3 + ... + 39).$$

Ta thấy tổng các số của dãy (1) bằng 0 nên $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{39} = 0$. Do đó :

$$S = -(1 + 2 + 3 + ... + 39) = -\frac{40 \,.\, 39}{2} = -780.$$

10. a) $\left(\frac{-19}{60} \cdot \frac{5}{19}\right) : \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{-4}{3}\right) = \frac{-1}{12} : \frac{-2}{5} = \frac{5}{24}$.

b) Chú ý rằng : $6{,}3 \,.\, 12 - 21 \,.\, 3{,}6 = 63 \,.\, 1{,}2 - 63 \,.\, 1{,}2 = 0$.

Do đó biểu thức bằng 0.

c) Biểu thức bằng :

$$\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{4 \,.\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right)} + \frac{3 \,.\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625}\right)}{4 \,.\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625}\right)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

11. a) -24 ; b) $= \dfrac{-1}{15}$; c) 3 hoặc $\dfrac{1}{3}$.

d) $\dfrac{x+1}{10}+\dfrac{x+1}{11}+\dfrac{x+1}{12}-\dfrac{x+1}{13}-\dfrac{x+1}{14}=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{14}\right)=0.$

Dễ thấy $\dfrac{1}{10}>\dfrac{1}{11}>\dfrac{1}{12}>\dfrac{1}{13}>\dfrac{1}{14}$ nên biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai khác 0. Do đó $x + 1 = 0$, vậy $x = -1$.

e) $\left(\dfrac{x+4}{2000}+1\right)+\left(\dfrac{x+3}{2001}+1\right)=\left(\dfrac{x+2}{2002}+1\right)+\left(\dfrac{x+1}{2003}+1\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+2004}{2000}+\dfrac{x+2004}{2001}=\dfrac{x+2004}{2002}+\dfrac{x+2004}{2003}$

$\Leftrightarrow (x+2004)\left(\dfrac{1}{2000}+\dfrac{1}{2001}-\dfrac{1}{2002}-\dfrac{1}{2003}\right)=0$

$\Leftrightarrow \qquad x + 2004 = 0$

$\Leftrightarrow \qquad x = -2004.$

12. Ta có :

$\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+...+\dfrac{99}{100!}$

$=\dfrac{2-1}{2!}+\dfrac{3-1}{3!}+\dfrac{4-1}{4!}+...+\dfrac{100-1}{100!}$

$=\dfrac{1}{1!}-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4!}+...+\dfrac{1}{99!}-\dfrac{1}{100!}$

$=1-\dfrac{1}{100!}<1.$

13. Ta có :

$\dfrac{1.2-1}{2!}+\dfrac{2.3-1}{3!}+\dfrac{3.4-1}{4!}+...+\dfrac{99.100-1}{100!}$

$=\dfrac{1.2}{2!}-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2.3}{3!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{3.4}{4!}-\dfrac{1}{4!}+...+\dfrac{99.100}{100!}-\dfrac{1}{100!}$

$$=\left(\frac{1.2}{2!}+\frac{2.3}{3!}+\frac{3.4}{4!}+...+\frac{99.100}{100!}\right)-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{100!}\right)$$

$$=\left(1+1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{98!}\right)-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{100!}\right)$$

$$=2-\frac{1}{99!}-\frac{1}{100!}<2.$$

14. a) Gọi bảy số đó là $a_1, a_2, a_3, ..., a_7$, hiển nhiên mỗi số trên khác 0. Ta có $a_1a_2 = a_2\,a_3 \Rightarrow a_1 = a_3$; tương tự $a_3 = a_5$, $a_5 = a_7$, $a_7 = a_2$, ... Vậy bảy số đều bằng nhau, mỗi số đều bằng 4 hoặc đều bằng –4.

b) Phải xét hai trường hợp :

– Nếu n lẻ thì $a_1 = a_3 = a_5 = ... = a_n = a_2 = a_4 = ... = a_{n-1}$.

Mỗi số đều bằng 4 hoặc đều bằng –4.

– Nếu n chẵn thì $a_1 = a_3 = a_5 = ... = a_{n-1}$; $a_2 = a_4 = a_6 = ... = a_n$. Ta có

$$a_1 = a_3 = ... = a_{n-1} = m \text{ (m tùy ý khác 0)},$$

$$a_2 = a_4 = ... = a_n = \frac{16}{m}.$$

15. Giả sử $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a-b}$ thì $\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{a-b}$ suy ra $(b - a)(a - b) = ab$. Vế trái có giá trị âm vì là tích của hai số đối nhau khác 0, vế phải có giá trị dương vì là tích của hai số dương. Vậy không tồn tại hai số dương a và b khác nhau mà $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a-b}$.

Chú ý : Ta cũng chứng minh được rằng không tồn tại hai số a và b khác 0, khác nhau mà $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a-b}$. Thật vậy, nếu $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a-b}$ thì $\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{a-b}$

$$\Rightarrow (b-a)(a-b) = ab \Rightarrow ab - b^2 - a^2 + ab = ab \Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2-\frac{ab}{2}-\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}=0 \quad \Rightarrow \quad a\left(a-\frac{b}{2}\right)-\frac{b}{2}\left(a-\frac{b}{2}\right)+\frac{3b^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow \left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}=0 \Rightarrow b=0,\ a=0.$$

Nhưng giá trị này làm cho biểu thức không có nghĩa.

16. Đặt $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + ... + \frac{1}{49.50}$.

Dễ thấy $A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$. Do đó :

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{49} + \frac{1}{50} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{50}\right)$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{49} + \frac{1}{50} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{25}\right)$$

$$= \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + ... + \frac{1}{50}.$$

17. Trước hết ta biến đổi A thành $\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + ... + \frac{1}{100}$ (cách giải tương tự như bài 16). Do đó :

$$A = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + ... + \frac{1}{75}\right) + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{77} + ... + \frac{1}{100}\right).$$

Ta có : $\frac{1}{51} > \frac{1}{52} > ... > \frac{1}{75}$, $\quad \frac{1}{76} > \frac{1}{77} > ... > \frac{1}{100}$ nên :

$$A > \frac{1}{75}.25 + \frac{1}{100}.25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} ;$$

$$A < \frac{1}{51}.25 + \frac{1}{76}.25 < \frac{1}{50}.25 + \frac{1}{75}.25 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Vậy $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

18. Từ $a - b = 2(a + b)$ suy ra $a - b = 2a + 2b$, do đó $a = -3b$, nên $\frac{a}{b} = -3$.

Từ $a - b = -3$ và $a + b = -1,5$ ta tính được : $a = -2,25$; $b = 0,75$.

19. Từ $a + b = ab \Rightarrow a = ab - b = b(a - 1) \Rightarrow a : b = a - 1$ (do $b \neq 0$).

Mặt khác, theo đề bài, $a : b = a + b$.

Suy ra $a - 1 = a + b \Rightarrow b = -1$.

Thay b = −1 vào a + b = ab được $a - 1 = -a \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Vậy $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$.

20. Đặt $x = \frac{a}{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$; $a, b \neq 0$; $(|a|, |b|) = 1$. Ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 + b^2 \;\vdots\; ab \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $b^2 \;\vdots\; a$, mà $(|a|, |b|) = 1$ nên $b \;\vdots\; a$. Cũng do $(|a|, |b|) = 1$ nên $a = \pm 1$.

Cũng chứng minh tương tự như trên, ta được $b = \pm 1$.

Do đó : $x = 1$ hoặc $x = -1$.

§3. Luỹ thừa của một số hữu tỉ

21. a) $7^4 . (7^2 + 7 - 1) = 7^4 . 55$ chia hết cho 55.

b) $2^{15} . 33$ chia hết cho 33 ;

c) $3^{26} . 5$ chia hết cho $3^4 . 5$.

22. a) bằng nhau ; b) đối nhau ; c) bằng nhau ; d) đối nhau.

23. a) b) Đúng.

c) d) Không. Chỉ bằng nhau nếu a = 0.

e) Đúng, vì hai số đối nhau thì bình phương của chúng bằng nhau.

g) Đúng, vì hai số đối nhau thì lập phương của chúng đối nhau.

24. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15} . \left(\frac{1}{4}\right)^{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} . \left(\frac{1}{2}\right)^{40} = \left(\frac{1}{2}\right)^{55}$.

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{25} : \left(\frac{1}{3}\right)^{30} = \left(\frac{1}{3}\right)^{50} : \left(\frac{1}{3}\right)^{30} = \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$.

c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{3} : \left(\frac{1}{8}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^{3} : \left(\frac{1}{2^3}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} : \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$.

d) $x^6 : x^6 = 1$ với $x \neq 0$.

25. Có sáu cách viết :

$$64^1 = 8^2 = (-8)^2 = 4^3 = 2^6 = (-2)^6.$$

26. $A = \dfrac{(2^2)^5 \cdot (3^2)^4 - 2 \cdot (2 \cdot 3)^9}{2^{10} \cdot 3^8 + (2 \cdot 3)^8 \cdot (2^2 \cdot 5)} = \dfrac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} =$

$$= \frac{2^{10} \cdot 3^8(1-3)}{2^{10} \cdot 3^8(1+5)} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}.$$

27. Với n chẵn thì $S_n = -\dfrac{n}{2}$ nên $S_{60} = -30$.

Với n lẻ thì $S_n = \dfrac{n+1}{2}$ nên $S_{35} = 18$. Vậy $S_{60} + S_{35} = -12$.

28. a) Với n chẵn thì $A = -4 \cdot \dfrac{n}{2} = -2n$.

Với n lẻ thì $A = 1 + \dfrac{4(n-1)}{2} = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.

b) Số hạng thứ n của dãy là $(-1)^{n-1}(4n-3)$.

Cũng có thể viết là $(-1)^{n+1}(4n-3)$.

29. a) $P = 0 \Leftrightarrow a = 0, c \neq 0$ hoặc $b = 0, c \neq 0$.

$P > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$, b và c cùng dấu.

$P < 0 \Leftrightarrow a \neq 0$, b và c trái dấu.

b) $Q = 0 \Leftrightarrow x = 0, y \neq 0, z \neq 0$.

$Q > 0 \Leftrightarrow$ Trong x, y, z hoặc cả ba số cùng dương hoặc có hai số âm và một số dương.

$Q < 0 \Leftrightarrow$ Trong x, y, z hoặc cả ba số cùng âm, hoặc có một số âm và hai số dương.

30. Nếu $b < 0$ thì $b^5 < 0$, do đó $|a| < 0$, vô lí.

Vậy $b > 0$, suy ra $a < 0$.

31. $2^4, 2^6, 2^0, 2^{-5}, 2^{-3}, 2^{-1}, 2^{-2}$.

32. a) 10^{-6} ; 2.10^{-6} ; b) 0,000 0001 ; 0,000 00 25.

33. a) $A = B$; b) $A = 0{,}0111$; $A = 11\ 100\ 000B$.

34. a) Chỉ cần so sánh $\left(\frac{1}{16}\right)^{100}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{500}$.

Cách 1. $\left(\frac{1}{16}\right)^{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{400} > \left(\frac{1}{2}\right)^{500}$.

Cách 2. $\left(\frac{1}{16}\right)^{100} > \left(\frac{1}{32}\right)^{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{500}$.

b) Trước hết ta so sánh 32^9 và 18^{13}. Ta có : $32^9 = 2^{45} < 2^{52} = 16^{13} < 18^{13}$.

Vậy $-32^9 > -18^{13}$, tức là $(-32)^9 > (-18)^{13}$.

35. $a = 16^{25}$, $b = 27^{25}$, $c = 25^{25}$. Vậy $a < c < b$.

36. Các câu a và c đúng.

Câu b sai. Ví dụ : $(-3)^2 > 0$.

Câu d sai. Ví dụ : $(-1)^2 > -1$.

Câu e sai. Ví dụ : $3^2 > 3$.

37. a) Nếu $a = 0$ thì m và n là các số tự nhiên khác 0 tuỳ ý.

Nếu $a = 1$ thì m và n là các số tự nhiên tuỳ ý.

Nếu $a = -1$ thì m và n là các số chẵn tuỳ ý hoặc các số lẻ tuỳ ý.

Nếu $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$ thì $m = n$.

b) Nếu $a > 1$ thì $m > n$. Nếu $0 < a < 1$ thì $m < n$.

38. a) $(2x - 1)^4 = 3^4 = (-3)^4$. Có hai trường hợp :

$2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

$2x - 1 = -3 \Leftrightarrow x = -1$.

b) $(x - 1)^5 = (-2)^5 \Leftrightarrow x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$.

c) $x = \frac{1}{2}$; $x = 1$; $x = 0$.

39. a) $5^x(1 + 5^2) = 650 \Leftrightarrow 5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2.$

b) $x = 4.$

40. a) $2^{x+1} . 3^y = 2^{2x} . 3^x \Leftrightarrow \dfrac{2^{2x}}{2^{x+1}} = \dfrac{3^y}{3^x} \Leftrightarrow 2^{x-1} = 3^{y-x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x - 1 = y - x = 0 \Leftrightarrow x = y = 1.$$

b) $x = 2y.$

c) Ta tìm được $x = 2y - 2$ và $3y = x + 8$. *Đáp số :* $x = 10, y = 6.$

41. a) Nhân từng vế ba đẳng thức được :

$(abc)^2 = \dfrac{9}{25}$, do đó $abc = \dfrac{\pm 3}{5}$. Có hai đáp số :

$$a = \frac{3}{4},\ b = \frac{4}{5},\ c = 1 \text{ và } a = \frac{-3}{4},\ b = \frac{-4}{5},\ c = -1.$$

b) Cộng từng vế ba đẳng thức được :

$$a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c) = 36.$$

Do đó $(a + b + c)^2 = 36$ nên $a + b + c = \pm 6.$

Có hai đáp số :

$$a = -2, b = 3, c = 5 \text{ và } a = 2, b = -3, c = -5.$$

c) Nhân từng vế ba đẳng thức được $(abc)^2 = 36\, abc.$

Nếu một trong các số a, b, c bằng 0 thì hai số còn lại cũng bằng 0.

Nếu cả ba số a, b, c khác 0 thì chia hai vế cho abc được $abc = 36$. Từ $abc = 36$ và $ab = c$, ta được $c^2 = 36$ nên $c = \pm 6$. Từ $abc = 36$ và $bc = 4a$ ta được $4a^2 = 36$ nên $a = \pm 3$. Từ $abc = 36$ và $ac = 9b$, ta được $9b^2 = 36$ nên $b = \pm 2.$

Nếu $c = 6$ thì a và b cùng dấu nên $a = 3, b = 2$, hoặc $a = -3, b = -2$. Nếu $c = -6$ thì a và b trái dấu nên $a = 3, b = -2$, hoặc $a = -3, b = 2.$

Tóm lại, có 5 bộ số (a ; b ; c) thoả mãn bài toán là :

$$(0 ; 0 ; 0),\quad (3 ; 2 ; 6),\quad (-3 ; -2 ; 6),\quad (3 ; -2 ; -6),\quad (-3 ; 2 ; -6).$$

42. Giả sử $a \neq b$, chẳng hạn $a < b$ (trường hợp $a > b$ chứng minh tương tự). Chú ý rằng nếu hai luỹ thừa bằng nhau có cơ số (là số tự nhiên) khác nhau thì luỹ thừa nào có cơ số nhỏ hơn sẽ có số mũ lớn hơn. Từ $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$ và $a < b$ suy $b > c$, $c < d$, $d > e$, $e < a$, $a > b$, mâu thuẫn. Do đó $a = b$.

Nếu $a = b = 1$ thì $c = d = e = 1$. Nếu $a = b \geq 2$ thì $b = c = d = e$. Vậy năm số a, b, c, d, e bằng nhau (*Chú ý :* Không xét $a = b = 0$ vì không có 0^0).

43. A là tích của 99 số âm. Do đó :

$$-A = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{100^2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2^2}\cdot\frac{8}{3^2}\cdot\frac{15}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{100^2} = \frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{2.4}{3^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{99.101}{100^2}.$$

Để dễ rút gọn, ta viết tử dưới dạng tích các số tự nhiên liên tiếp.

$$-A = \frac{1.2.3\ldots98.99}{2.3.4\ldots99.100}\cdot\frac{3.4.5\ldots100.101}{2.3.4\ldots99.100} =$$

$$= \frac{1}{100}\cdot\frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{1}{2}.$$

Do đó $A < -\frac{1}{2}$.

44. Ta có : $$A = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} - \ldots + 2^2 - 2$$

$$2A = 2^{101} - 2^{100} + 2^{99} + \ldots + 2^3 - 2^2$$

nên $3A = 2^{101} - 2$.

Vậy $A = \frac{2^{101} - 2}{3}$.

45. Cộng B với 3B, được $4B = 1 + 3^{101}$.

Đáp số : $B = \frac{1 + 3^{101}}{4}$.

46. Tính 3C, rồi trừ đi C, được $2C = 1 - \frac{1}{3^{99}}$. Vậy $C < \frac{1}{2}$.

47. Ta có :

$$\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\frac{7}{3^2.4^2}+...+\frac{19}{9^2.10^2}$$

$$=\frac{2^2-1^2}{1^2.2^2}+\frac{3^2-2^2}{2^2.3^2}+\frac{4^2-3^2}{3^2.4^2}+...+\frac{10^2-9^2}{9^2.10^2}$$

$$=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}$$

$$=1-\frac{1}{10^2}<1.$$

48. Đặt : $M=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+...+\frac{99}{3^{99}}+\frac{100}{3^{100}}$

nên $3M=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+...+\frac{99}{3^{98}}+\frac{100}{3^{99}}.$

Do đó $2M=3M-M=1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}+\frac{1}{3^{99}}\right)-\frac{100}{3^{100}}.$

Biểu thức trong dấu ngoặc nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ (xem bài 46) nên $2M<1+\frac{1}{2}.$

Suy ra $M<\frac{3}{4}.$

49. $2^m+2^n=2^{m+n}\Leftrightarrow 2^{m+n}-2^m-2^n=0$

$$\Leftrightarrow 2^m(2^n-1)-(2^n-1)=1\Leftrightarrow(2^n-1)(2^m-1)=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2^n-1=1\\2^m-1=1\end{cases}\Leftrightarrow m=n=1.$$

50. $$2^m-2^n=256=2^8\Rightarrow 2^n(2^{m-n}-1)=2^8 \qquad (1)$$

Dễ thấy $m\neq n$, ta xét hai trường hợp :

a) Nếu $m-n=1$ thì từ (1) ta có $2^n(2-1)=2^8$. Suy ra $n=8$, $m=9$.

b) Nếu $m - n \geq 2$ thì $2^{m-n} - 1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tích ra thừa số nguyên tố. Còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2. Mâu thuẫn.

Vậy $n = 8$, $m = 9$ là đáp số duy nhất.

51. a) Giả sử sáu số $d_1, d_2, d_3, c_1, c_2, c_3$, mỗi số bằng 1 hoặc -1, có tổng bằng 0 thì trong sáu số ấy phải có ba số bằng 1, ba số bằng -1.

Do đó $d_1d_2d_3c_1c_2c_3 = -1 \Rightarrow (d_1d_2d_3)^2 = -1$ (vì $d_1d_2d_3 = c_1c_2c_3$). Điều này vô lí.

Vậy không thể xảy ra $d_1 + d_2 + d_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$.

b) Kết luận của bài toán vẫn đúng trong trường hợp bảng vuông $n \times n$ có n là số lẻ.

Trong trường hợp n là số chẵn, đẳng thức

$d_1 + d_2 + ... + d_n + c_1 + c_2 + ... + c_n = 0$ có thể xảy ra. Bạn đọc tự tìm ví dụ đối với bảng vuông 4×4.

52. Xét n tích $x_1x_2, x_2x_3, ..., x_nx_1$, mỗi tích có giá trị bằng 1 hoặc -1 mà tổng của chúng bằng 0 nên số tích có giá trị 1 bằng số tích có giá trị -1, và đều bằng $\frac{n}{2}$. Vậy n chia hết cho 2.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng số tích có giá trị -1 cũng là số chẵn. Thật vậy, xét

$$A = (x_1x_2)(x_2x_3)...(x_{n-1}x_n)(x_nx_1).$$

Ta thấy $A = x_1^2.x_2^2...x_n^2$ nên $A = 1 > 0$, chứng tỏ số tích có giá trị -1 cũng là số chẵn, tức là $\frac{n}{2}$ là số chẵn, do đó n chia hết cho 4.

§4. Tỉ lệ thức

53. a) $x = \pm 0,6$; b) $x = 1,8$; c) $x = \frac{-1}{2}$.

d) Cộng 1 vào mỗi tỉ số ta được $\frac{50}{x+13} = \frac{10}{7}$.

Do đó $x + 13 = 35$. Vậy $x = 22$.

54. $\dfrac{3x-y}{x+y}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow 4(3x-y)=3(x+y)$.

$$\Rightarrow 12x-4y=3x+3y$$
$$\Rightarrow 12x-3x=4y+3y$$
$$\Rightarrow 9x=7y$$
$$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{7}{9}.$$

55. Có nhiều cách chứng minh tỉ lệ thức (xem ví dụ 7). Ở đây chỉ giới thiệu một cách giải :

Đặt $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ thì $a=bk$, $c=dk$.

a) $\dfrac{2a+3b}{2a-3b}=\dfrac{2bk+3b}{2bk-3b}=\dfrac{b(2k+3)}{b(2k-3)}=\dfrac{2k+3}{2k-3}$

$\dfrac{2c+3d}{2c-3d}=\dfrac{2dk+3d}{2dk-3d}=\dfrac{d(2k+3)}{d(2k-3)}=\dfrac{2k+3}{2k-3}$.

Do đó $\dfrac{2a+3b}{2a-3b}=\dfrac{2c+3d}{2c-3d}$.

b) c) Học sinh tự giải.

56. a) Từ giả thiết suy ra $(a+b)(c-d)=(a-b)(c+d)$.

Khai triển rồi rút gọn ta được $2ad=2bc$ nên $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

b) Giải tương tự như câu a.

57. Trừ 1 ở mỗi tỉ số, ta được $\dfrac{2c}{a+b-c}=\dfrac{2c}{a-b-c}$

Nếu $c \neq 0$ thì $a+b-c=a-b-c$ nên $b=-b$ do đó $b=0$, trái với đề bài.

58. Ta có $\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{b+c}{d+a}$.

Cộng 1 vào mỗi tỉ số ta được $\dfrac{a+b+c+d}{c+d}=\dfrac{a+b+c+d}{a+d}$

– Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì $c+d=a+d$ nên $a=c$.

– Nếu $a+b+c+d=0$ thì bài toán được chứng minh (xảy ra được $a+b+c+d=0$, chẳng hạn $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=-6$).

59. a) Không. Xét các tích hai số : 3 . 4 ; 3 . 5 ; 3 . 6 ; 3 . 7 ; 4 . 5 ; 4 . 6 ; 4 . 7 ; 5 . 6 ; 5 . 7 ; 6 . 7, không có hai tích nào bằng nhau.

b) Xét các tích hai số, có ba đẳng thức là 1 . 8 = 2 . 4 ; 1 . 16 = 2 . 8 ; 2 . 16 = 4 . 8. Mỗi đẳng thức cho ta bốn tỉ lệ thức. Tổng cộng có 12 tỉ lệ thức.

c) Có bảy đẳng thức giữa các cặp tích hai số, tổng cộng có 28 tỉ lệ thức.

60. Xét bốn trường hợp :

– Trường hợp 1 : Chọn x cùng với ba số 2, 4, 8 lập thành một tỉ lệ thức, ta có các đẳng thức :

$$x . 2 = 4 . 8 ;$$
$$x . 4 = 2 . 8 ;$$
$$x . 8 = 2 . 4.$$

Các trường hợp trên theo thứ tự cho ta : x = 16, x = 4, x = 1.

– Trường hợp 2 : Chọn x cùng với ba số 2, 4, 16 lập thành một tỉ lệ thức.

– Trường hợp 3 : Chọn x cùng với ba số 2, 8, 16 lập thành một tỉ lệ thức.

– Trường hợp 4 : Chọn x cùng với ba số 4, 8, 16 lập thành một tỉ lệ thức.

Các trường hợp 2, 3, 4 giải tương tự như trường hợp 1.

Tổng cộng ta tìm được tám giá trị của x là :

$$\frac{1}{2} ; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64.$$

§5. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

61. a) x = 20, y = 12, z = 42 ; b) x = 20, y = 30, z = 42 ;

c) x = 27, y = 36, z = 60 ; d) x = 18, y = 16, z = 15 ;

e) x = 11, y = 17, z = 23.

g) Từ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ suy ra $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{z}{5} = \frac{xyz}{30} = \frac{810}{30} = 27.$

Do đó $\frac{x}{2} = 3$. Vậy x = 6, y = 9, z = 15.

62. Cộng các số hạng trên và cộng các số hạng dưới của tỉ số thứ nhất và thứ ba rồi so sánh với tỉ số thứ hai. *Đáp số :* x = 5.

63. Gọi x là số thêm vào tử và mẫu của phân số $\frac{a}{b}$ $(x \neq 0)$, ta có

$$\frac{a}{b} = \frac{a+x}{b+x} = \frac{a+x-a}{b+x-b} = \frac{x}{x} = 1.$$

Vậy $\frac{a}{b} = 1$.

64. Mỗi tỉ số đã cho bằng $\frac{a+b+c}{b+c+d}$. Tích của ba tỉ số đã cho bằng $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3$, mặt khác tích đó cũng bằng $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$.

Vậy $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$.

65. Đặt $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = k$ thì $a = bk$, $b = ck$, $c = ak$.

Do đó $abc = bk \,.\, ck \,.\, ak = abck^3$.

Do a, b, c khác 0 nên $abc \neq 0$, suy ra $k^3 = 1$. Vậy $k = 1$.

Từ đó $a = b = c$.

66. Ta biết rằng $\frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b}$.

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}} = \frac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}} = \frac{a\frac{1}{b}}{b\frac{1}{a}}.$$

67. Nếu $a + b + c \neq 0$ thì theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}.$$

Nếu $a + b + c = 0$ thì $b + c = -a$, $c + a = -b$, $a + b = -c$ nên mỗi tỉ số $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ bằng -1.

§7. Số vô tỉ. Căn bậc hai. Số thực

68. a) 1,3 ; b) $\frac{-1}{6}$.

69. a) $x = \pm 9$; b) $x = \frac{7}{4}$ hoặc $x = \frac{1}{4}$;

c) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0$ nên $x = 0$ hoặc $x = 4$;

d) $x = 0$ hoặc $x = 1$.

70. Với $x = \frac{16}{9}$ thì $A = 7$. Với $x = \frac{25}{9}$ thì $A = 4$.

71. Biến đổi : $$A = \frac{\sqrt{x} - 3 + 4}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}.$$

Do A là số nguyên nên $\frac{4}{\sqrt{x} - 3}$ phải là số nguyên (1).

Khi x là số nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên (nếu x là số chính phương), hoặc là số vô tỉ (nếu x không là số chính phương).

Nếu $\sqrt{x}$ là số vô tỉ thì $\sqrt{x} - 3$ là số vô tỉ, trái với (1). Vậy $\sqrt{x}$ phải là số nguyên.

Từ (1) suy ra $\sqrt{x} - 3$ phải là ước của 4. Ta có

$\sqrt{x} - 3$	-4	-2	-1	1	2	4
$\sqrt{x}$	-1	1	2	4	5	7
x	không có	1	4	16	25	49

72. a) Giải tương tự ví dụ 11a.

b) Giả sử $5 - \sqrt{2}$ là số hữu tỉ thì $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, vô lí.

73. a) Có, chẳng hạn : $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

b) Có, chẳng hạn : $\sqrt{2} + (5 - \sqrt{2}) = 5$.

74. Theo định nghĩa phần nguyên của một số, với a là một số tự nhiên thì :

$$[\sqrt{n}] = a \Leftrightarrow a \leq \sqrt{n} < a + 1.$$

Do đó ta có :

Với $1 \le n \le 3$ thì $\sqrt{n} = 1$.

Với $4 \le n \le 8$ thì $\sqrt{n} = 2$.

Với $9 \le n \le 15$ thì $\sqrt{n} = 3$.

Với $16 \le n \le 24$ thì $\sqrt{n} = 4$.

Với $25 \le n \le 35$ thì $\sqrt{n} = 5$.

Vậy $\underbrace{[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]}_{3\text{ số}}+\underbrace{[\sqrt{4}]+...+[\sqrt{8}]}_{5\text{ số}}+\underbrace{[\sqrt{9}]+...+[\sqrt{15}]}_{7\text{ số}}+$

$+\underbrace{[\sqrt{16}]+...+[\sqrt{24}]}_{9\text{ số}}+\underbrace{[\sqrt{25}]+...+[\sqrt{35}]}_{11\text{ số}}$

$= 1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 5 + 3 \,.\, 7 + 4 \,.\, 9 + 5 \,.\, 11$

$= 3 + 10 + 21 + 36 + 55 = 125$.

75. Xét hai trường hợp :

a) Trường hợp $a = b$ (1) và $a^2 + a = b^2 + b$ (2).

Ta thấy nếu có (1) thì suy ra (2). Như vậy $a = b$.

b) Trường hợp $a^2 + a = b$ (3) và $b^2 + b = a$ (4).

Cộng (3) và (4) được : $a^2 + b^2 + a + b = a + b \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

Kết luận : Trong cả hai trường hợp, ta đều có $a = b$.

CHƯƠNG II - HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

§8. Đại lượng tỉ lệ thuận

76. a) $C = 4x$ $(x > 0)$; b) $C = 2\pi R$ $(R > 0)$.

77. a) $S = 5x$ $(x > 0)$; b) $S = 2h$ $(h > 0)$.

78. $y = -x$.

79. *Đáp số :* 50 đinh ốc.

80. Gọi số ngày phải tìm là x. Ta quy ước một công tương đương với một công nhân làm trong một ngày, ta có :

Làm ab công được c dụng cụ.

Làm bx công được a dụng cụ.

Từ $\frac{ab}{bx} = \frac{c}{a}$, ta tính được $x = \frac{a^2}{c}$.

81. Trong cùng một thời gian, khi số người tăng gấp 5 lần thì số cá câu được tăng gấp 5 lần. Vậy thời gian phải tìm vẫn là 5 phút.

82. *Cách 1* (dùng phân số) : Trong một ngày, một con ngựa ăn hết $\frac{1}{4}$ xe cỏ, một con dê ăn hết $\frac{1}{6}$ xe cỏ, một con cừu ăn hết $\frac{1}{12}$ xe cỏ, cả ba con ăn hết :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \text{ (xe cỏ).}$$

Vậy cả ba con ăn hết xe cỏ trong 2 ngày.

Cách 2 (dùng đại lượng tỉ lệ thuận) :

Trong 12 ngày (chọn số 12 là BCNN của 4, 6, 12), một con ngựa ăn hết 3 xe cỏ, một con dê ăn hết 2 xe cỏ, một con cừu ăn hết 1 xe cỏ, cả ba con ăn hết :

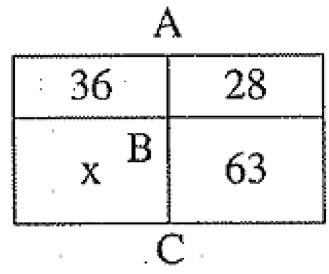
$$3 + 2 + 1 = 6 \text{ (xe cỏ).}$$

Vậy cả ba con ăn hết xe cỏ trong 12 : 6 = 2 (ngày).

83. (h.39) Nếu hai hình chữ nhật có cùng chiều dài thì tỉ số diện tích của chúng bằng tỉ số hai chiều rộng.

Do đó $\frac{36}{x} = \frac{28}{63}$ (vì cùng bằng $\frac{AB}{BC}$).

Suy ra x = 81. Vậy câu trả lời C là đúng.



Hình 39

84. Đồng hồ nào có khoảng thời gian giữa hai lần chỉ giờ đúng nhỏ nhất thì nó chỉ giờ đúng nhiều lần nhất.

Khoảng thời gian giữa hai lần chỉ giờ đúng của chiếc đồng hồ chết là 12 giờ. Khoảng thời gian giữa hai lần chỉ giờ đúng của đồng hồ treo tường và đeo tay là thời gian để mỗi đồng hồ đó chậm 12 giờ.

Đồng hồ treo tường chậm 1 phút trong 1 ngày nên chậm 12 giờ (tức 720 phút) sau 720 ngày.

Đồng hồ đeo tay chậm 1 phút trong 1 giờ nên chậm 12 giờ (tức 720 phút) sau 720 giờ.

Vậy chiếc đồng hồ chết chỉ giờ đúng nhiều lần nhất.

§9. Đại lượng tỉ lệ nghịch

85. a) $y = \frac{12}{x}$ $(x > 0)$; b) $y = \frac{20}{x}$ $(x > 0)$.

86. $y = \frac{1}{x}$.

87. *Đáp số :* 72 dụng cụ.

88. *Đáp số :* 120 vòng.

89.

Số răng	Số vòng
18	1
48	x

Số răng và số vòng quay là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên :

$$\frac{18}{48} = \frac{x}{1}.$$

Từ đó : $x = \frac{3}{8}$ (vòng).

Đùi đĩa quay một góc : $\frac{3}{8} \cdot 360^\circ = 135^\circ$.

90. Ba bánh xe cùng quay một số răng như nhau nên vận tốc quay của ba bánh xe I, II, III tỉ lệ nghịch với số răng của ba bánh xe đó.

Gọi vận tốc quay của các bánh xe I, II, III là a, b, c thì

$$15a = 10b = 8c \text{ nên } \frac{15a}{120} = \frac{10b}{120} = \frac{8c}{120} \text{ suy ra } \frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15}.$$

Vậy câu trả lời C là đúng.

91.

Số viên thuốc cả ba người uống một ngày	Thời gian hết thuốc
5 viên	30 ngày
6 viên	x ngày

Ta có $\frac{5}{6} = \frac{x}{30}$. Vậy x = 25.

Thời gian phải tìm : 25 ngày.

92.

Số giờ làm việc	Số máy cần dùng
9 . 4 = 36	3
3 . 6 = 18	x

Tìm được : x = 6.

93.

Đại lượng I	Đại lượng II
a	b
1,1a	x

$\frac{a}{1,1a} = \frac{x}{b}$ nên $x = \frac{ab}{1,1a} = \frac{10}{11}b$.

Giá trị của đại lượng II giảm đi $\frac{1}{11}$ hay $9\frac{1}{11}$ %. Vậy câu trả lời D là đúng.

§10. Hàm số và đồ thị của hàm số

94. a) $S = x^2$ $(x > 0)$; b) $S = \pi R^2$ $(R > 0)$.

95. Xem bảng dưới :

d (cm)	19	21	23	$23\frac{2}{3}$	$24\frac{1}{3}$	25
Cỡ giầy	30	33	36	37	38	39

96.

Hàm số	$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$	$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$	$f(x_1x_2) = f(x_1) . f(x_2)$
$f_1(x) = x$	không	có	có	có
$f_2(x) = -2x$	không	có	có	không

Hàm số	$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$	$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$	$f(x_1x_2) = f(x_1) . f(x_2)$
$f_3(x) = 1$	có	không	không	có
$f_4(x) = 5$	có	không	không	không
$f_5(x) = \frac{1}{x}$	không	có	không	có
$f_6(x) = x^2$	có	không	không	có

97. $y = 2x + 1$.

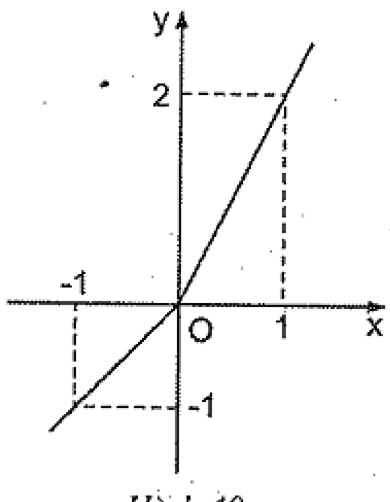
98. $y = 3x + 1$.

99. $y = 5x + 3$.

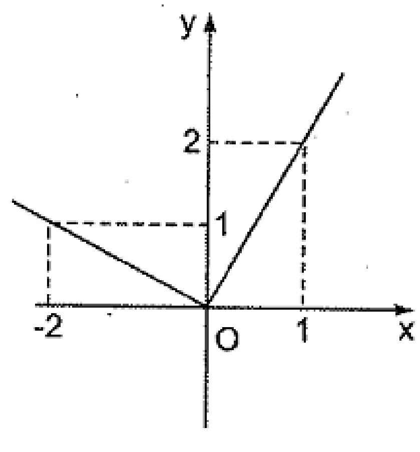
100. $a = -\frac{1}{3}$.

Điểm B thuộc đồ thị của hàm số, điểm C không thuộc đồ thị của hàm số, điểm D có toạ độ $(-4 ; \frac{4}{3})$, điểm E có toạ độ $(-6 ; 2)$.

101. Xem các hình 40, 41.



Hình 40



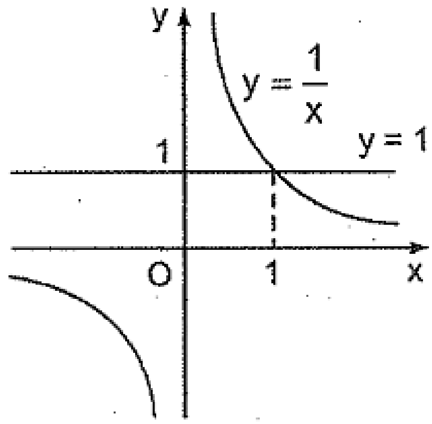
Hình 41

102. Giả sử 4x có giá trị lớn nhất là m tại $x = x_1$ thì $4x_1 = m$ trong đó m phải dương, do đó $x_1 > 0$. Ta sẽ chứng tỏ rằng biểu thức 4x có giá trị khác lớn hơn m. Chọn $x_2 > x_1 > 0$ thì $4x_2 > 4x_1$ nên $4x_2 > m$, mâu thuẫn. Vậy biểu thức 4x không có giá trị lớn nhất.

Bạn đọc tự chứng minh rằng biểu thức 4x cũng không có giá trị nhỏ nhất.

103. $a = -4$. Điểm B không thuộc đồ thị của hàm số, điểm C thuộc đồ thị của hàm số, điểm D có toạ độ $(6 ; -\frac{2}{3})$, điểm E có toạ độ $(-1 ; 4)$.

104. Các điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x}$ nằm phía dưới đường thẳng $y = 1$ có hoành độ thoả mãn điều kiện $\frac{1}{x} < 1$. Trên hình 42 ta tìm được $x < 0$ hoặc $x > 1$ là các giá trị phải tìm.



Hình 42

105. Đồ thị của hàm số $y = \frac{5}{x}$ có một nhánh chạy xa vô tận theo chiều dương của trục tung nên biểu thức $\frac{5}{x}$ không có giá trị lớn nhất.

Đồ thị của hàm số cũng có một nhánh chạy xa vô tận theo chiều âm của trục tung nên biểu thức cũng không có giá trị nhỏ nhất.

CHIA TỈ LỆ

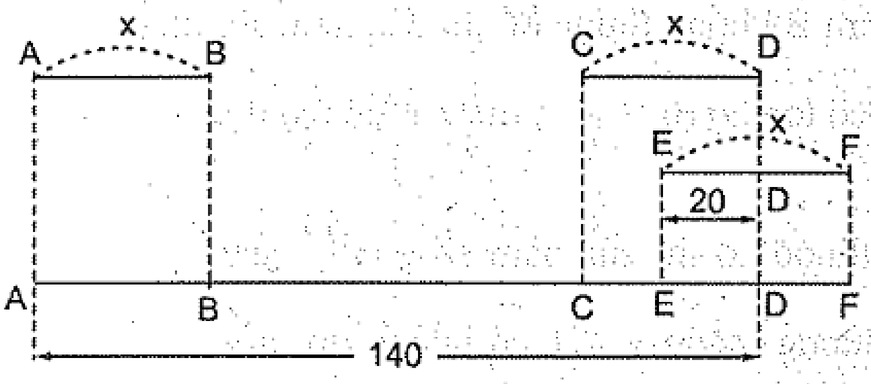
106. a) Gọi x và y theo thứ tự là số vòng kim phút và kim giờ quay được từ lúc hai kim gặp nhau lần trước đến lúc chúng gặp nhau lần tiếp theo.

Ta có : $x - y = 1$ (kim phút phải quay nhiều hơn kim giờ 1 vòng), $x : y = 12 : 1$ (kim phút quay nhanh gấp 12 lần kim giờ).

Từ đó $x = \frac{12}{11}$ (vòng). Thời gian phải tìm là $1\frac{1}{11}$ giờ.

b) Trong một ngày, hai kim đồng hồ gặp nhau $24 : \frac{12}{11} = 22$ (lần). Giữa hai lần hai kim gặp nhau, chúng tạo với nhau góc vuông 2 lần. Vậy trong một ngày, hai kim đồng hồ tạo với nhau góc vuông 44 lần.

107. Gọi AB là vị trí ống lúc Tuấn bắt đầu chạy từ đầu ống (tại A), CD là vị trí ống lúc Tuấn chạy đến cuối ống (tại D), EF là vị trí ống lúc Tuấn gặp đầu ống lần thứ hai (tại E). Như vậy Tuấn chạy AD mất 140 bước và chạy DE mất 20 bước (h.43).



Hình 43

Gọi chiều dài của ống là x(mét). Trong thời gian Tuấn chạy 140m, ống di chuyển được đoạn BD = 140 – x (m). Trong thời gian Tuấn chạy 20m, ống di chuyển được đoạn DF = x – 20 (m).

Ta có $\frac{140-x}{x-20}=\frac{140}{20}$. Từ đó x = 35.

Chiều dài của ống là 35m.

108. *Đáp số :* $45m^2$, $51m^2$, $96m^2$, $48m^2$, $60m^2$.

109. *Đáp số :* 50 000 đồng, 30 000 đồng, 20 000 đồng.

110. Đội I là đội làm nhiều hơn dự định : $\frac{6}{15}-\frac{7}{18}=\frac{1}{90}$ (số đất). Tổng số đất là $540m^3$. Số đất đã phân chia cho mỗi đội I, II, III là : $216m^3$, $180m^3$, $144m^3$.

111. *Đáp số :* Khối 7 có 80 học sinh, khối 8 có 240 học sinh, khối 9 có 300 học sinh.

112. Gọi x, y, z theo thứ tự là số sản phẩm của các tổ I, II, III đã làm. Ta có

$$x : y : z = (5 \,.\, 1,1) : (4 \,.\, 1,2) : (3 \,.\, 1,1) \text{ và } x - y = 7.$$

Đáp số : Tổ I làm 55 sản phẩm, tổ II làm 48 sản phẩm, tổ III làm 33 sản phẩm.

113. Gọi a, b, c theo thứ tự là ba số phải tìm. Ta có a : b = 5 : 9, a : c = 10 : 7, do đó a : b : c = 10 : 18 : 7.

Đặt $\frac{a}{10}=\frac{b}{18}=\frac{c}{7}=k$ ta có

$$\text{BCNN}(10k, 18k, 7k) = 3150$$

$$\Rightarrow 630k = 3150 \Rightarrow k = 5.$$

Các số phải tìm là 50 ; 90 ; 35.

114. Gọi a và b theo thứ tự là chiều rộng (tính bằng mét) của tấm thứ nhất và tấm thứ hai thì

$$a + b + b = 2{,}1 \qquad (1)$$

Hai tấm vải này cùng chiều dài nên :

$$a : b = 120\,000 : 192\,000 = 5 : 8 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra a = 0,5 (m), b = 0,8 (m).

Gọi c và d theo thứ tự là chiều dài (tính bằng mét) của tấm thứ hai và tấm thứ ba thì

$$c + c + d = 110 \qquad (3)$$

Hai tấm vải này cùng chiều rộng nên :

$$c : d = 192\,000 : 144\,000 = 4 : 3 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra c = 40 (m), d = 30 (m).

Vậy tấm thứ nhất dài 40m, rộng 0,5m ; tấm thứ hai dài 40m, rộng 0,8m ; tấm thứ ba dài 30m, rộng 0,8m.

115. Gọi x, y, z theo thứ tự là số tờ giấy bạc 500 đồng, 2000 đồng, 5000 đồng. Ta có : $x + y + z = 540$ và $500x = 2000y = 5000z$. Từ đó $x = 400$, $y = 100$, $z = 40$.

116. *Đáp số :* Người thứ nhất làm 360 dụng cụ, người thứ hai làm 300 dụng cụ, người thứ ba làm 200 dụng cụ.

117. *Đáp số :* Ánh được 18 chiếc, Bích được 15 chiếc, Châu được 9 chiếc.

118. Gọi các phân số phải tìm theo thứ tự là a, b, c. Ta có : $a + b + c = \dfrac{213}{70}$ và

$a : b : c = \dfrac{3}{5} : \dfrac{4}{1} : \dfrac{5}{2} = 6 : 40 : 25$. Do đó :

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{40} = \frac{c}{25} = \frac{a+b+c}{6+40+25} = \frac{213}{70} : 71 = \frac{3}{70}.$$

Từ đó $a = \dfrac{9}{35}$, $b = \dfrac{12}{7}$, $c = \dfrac{15}{14}$.

119. Gọi a, b, c là các chữ số của số phải tìm xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn, ta có :

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} \qquad (1)$$

Do số phải tìm là bội của 72 nên $a + b + c \,\vdots\, 9$. Do $3 \le a + b + c \le 27$ nên $a + b + c \in \{9 ; 18 ; 27\}$.

Từ (1) suy ra $a + b + c \vdots 6$, do đó $a + b + c = 18$.

Ta tìm được $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$.

Số phải tìm chia hết cho 2 nên chữ số tận cùng là 6. Xét hai số 396 và 936, chỉ có số 936 thoả mãn bài toán (chia hết cho 72).

Đáp số : 936.

120. Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là a, b, c, ba chiều cao tương ứng là x, y, z, diện tích của tam giác là S.

Ta có : $a = \frac{2S}{x}$, $b = \frac{2S}{y}$, $c = \frac{2S}{z}$.

Từ đó :

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{2S}{2x} = \frac{2S}{3y} = \frac{2S}{4z} \Rightarrow 2x = 3y = 4z \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}.$$

Vậy ba chiều cao tương ứng tỉ lệ với 6 ; 4 ; 3.

121. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tương ứng với các đường cao bằng 4, 12, x. Ta có :

$$4a = 12b = xc = 2S \text{ suy ra } a = \frac{S}{2},\ b = \frac{S}{6},\ c = \frac{2S}{x}.$$

Do $a - b < c < a + b$ nên

$$\frac{S}{2} - \frac{S}{6} < \frac{2S}{x} < \frac{S}{2} + \frac{S}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{6} < \frac{2}{x} < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2}{6} < \frac{2}{x} < \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3 < x < 6.$$

Do $x \in \mathbf{N}$ nên x bằng 4 hoặc 5.

122. Tính góc ngoài tại đỉnh A, B, C ta được 96°, 120°, 144°. Do đó các góc trong tại A, B, C là 84°, 60°, 36°, chúng tỉ lệ với 7 ; 5 ; 3.

123. Gọi hai số phải tìm là a và b ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $a > b$). Ta có :

$$\frac{a+b}{5} = \frac{a-b}{1} = \frac{ab}{12}.$$

Từ $a + b = 5(a - b)$ ta được $a = \frac{3}{2}b$, do đó $a - b = \frac{b}{2}$.

Từ $ab = 12(a - b) = 12.\frac{b}{2} = 6b$ ta được $a = 6$; $b = 4$.

SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN.
SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

124. $\frac{35}{56} = \frac{5}{8} = 0{,}625$; $\frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0{,}(6)$; $\frac{5}{11} = 0{,}(45)$; $\frac{2}{13} = 0{,}(153846)$;

$\frac{15}{82} = 0{,}1(82926)$; $\frac{13}{22} = 0{,}5\,(90)$; $\frac{1}{60} = 0{,}01(6)$; $\frac{5}{24} = 0{,}208(3)$.

125. $0{,}(27) = \frac{3}{11}$; $0{,}(703) = \frac{19}{27}$; $0{,}(571428) = \frac{4}{7}$; $2{,}01(6) = 2\frac{1}{60}$;

$0{,}1(63) = \frac{9}{55}$; $2{,}41(3) = 2\frac{31}{75}$; $0{,}88(63) = \frac{39}{44}$.

Chú ý : Các nhận xét sau giúp ta kiểm tra lại các kết quả tính toán. Xét phân số $\frac{a}{b}$ đổi thành số thập phân vô hạn tuần hoàn :

a) Nếu b không chia hết cho 3 thì tổng các chữ số của chu kì chia hết cho 9.

Chẳng hạn $\frac{15}{82} = 0{,}1(82926)$. Tổng các chữ số của chu kì bằng :

$$8 + 2 + 9 + 2 + 6 = 27, \text{ chia hết cho } 9.$$

b) Nếu b là số nguyên tố thì số chữ số của chu kì là ước của b – 1. Trong trường hợp chu kì có một số chẵn chữ số thì mỗi chữ số trong nửa sau của chu kì bằng hiệu của 9 và chữ số tương ứng trong nửa đầu của chu kì.

Chẳng hạn $\frac{2}{13} = 0{,}(153846)$. Chu kì có sáu chữ số (6 là ước của 12) trong đó

$$1 + 8 = 5 + 4 = 3 + 6 = 9.$$

126. Gọi phân số tối giản phải tìm là $\frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$.

Ta có : $ab = 1260 = 2^2 . 3^2 . 5 . 7$.

b không có ước nguyên tố 3 và 7, $b \neq 1$ nên $b \in \{4 ; 5 ; 20\}$.

Có ba đáp số :

$$\frac{315}{4} = 78{,}75 \; ; \quad \frac{252}{5} = 50{,}4 \; ; \quad \frac{63}{20} = 3{,}15.$$

127. Xét dãy 2003 chữ số đầu tiên sau dấu phẩy của x. Gọi chữ số thứ 2003 là a. Chia dãy trên thành ba nhóm :

$$\underbrace{123456789}_{\text{nhóm I}}\underbrace{1011...99}_{\text{nhóm II}}\underbrace{100101...x}_{\text{nhóm III}}.$$

Nhóm I có 9 chữ số, nhóm II có 180 chữ số, nhóm III có :

$$2003 - 9 - 180 = 1814 \text{ (chữ số)}.$$

Ta thấy 1814 chia 3 được 604 dư 2.

Số thứ 604 kể từ 100 là : $100 + 604 - 1 = 703$.

Hai chữ số tiếp theo số 703 là chữ số 7 và chữ số 0 (thuộc số 704).

Vậy a = 0, do đó câu trả lời A là đúng.

128. a) a + b + c là ước của 1000 và không quá 27.

Đáp số : $1 : 0,125 = 1 + 2 + 5$.

b) a + b + c + d là ước của 10 000 và $10 < a + b + c + d \le 36$.

Đáp số : $1 : 0,0625 = 6 + 2 + 5 + 3$.

c) Ta có $\dfrac{\overline{xy} - x}{90} - \dfrac{\overline{yx} - y}{90} = \dfrac{8}{90} \Rightarrow \overline{xy} - x - \overline{yx} + y = 8$

$$\Rightarrow 8(x - y) = 8 \Rightarrow x - y = 1.$$

Ta lại có x + y = 9. Do đó : x = 5, y = 4.

129. Xét phép trừ thứ hai : $\overline{***} - \overline{**} = *$ suy ra số bị trừ có dạng $\overline{10*}$, do đó bằng 100 (vì chữ số đơn vị của số bị trừ là chữ số 0 thêm vào để tìm các chữ số thập phân của thương).

$$\begin{array}{r|l} -\ *** & ab \\ \cline{2-2} mn & c,deg \\ \cline{1-1} 100 & \\ -\ \ **\ & \\ \cline{1-1} **0 & \\ -\ \ \ ** & \\ \cline{1-1} **0 & \\ -\ \ \ ** & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Đặt số chia, thương và tích riêng thứ nhất theo thứ tự là $\overline{ab}$; $\overline{c,deg}$; $\overline{mn}$.

Ta thấy $10 : \overline{ab} = \overline{0,deg}$ nên $10\,000 = \overline{ab} \,.\, \overline{deg}$.

Chú ý rằng $d \ne 0$ (vì nếu d = 0 thì $\overline{ab} \,.\, \overline{eg} < 10\,000$), $g \ne 0$ (vì nếu g = 0 thì thương đã dừng lại ở e), $\overline{deg}$ là ước của 10 000 và có ba chữ số. Suy ra $\overline{deg}$ bằng $5^3 = 125$ hoặc $5^4 = 625$. Tương ứng $\overline{ab}$ bằng 80 hoặc 16.

Trường hợp $\overline{ab} = 80$ thì $\overline{mn} = 80$, trái với $80 + 10 = ***$ (số bị chia), loại.

Trường hợp $\overline{ab} = 16$ thì c = 6, $\overline{mn} = 96$, số bị chia là $96 + 10 = 106$.

Ta có $106 : 16 = 6,625$ và

$$
\begin{array}{r|l}
106 & 16 \\
\cline{2-2}
-\ \ 96 & 6,625 \\
\cline{1-1}
100 & \\
-\ \ 96 & \\
\cline{1-1}
40 & \\
-\ \ 32 & \\
\cline{1-1}
80 & \\
-\ \ 80 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

130. a) b) Số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp.

131. $A = \dfrac{1}{1,\underbrace{0...0}_{99}1} = \dfrac{\overbrace{10...0}^{100}}{1\underbrace{0...0}_{99}1}$. Nhân cả tử và mẫu với $\underbrace{99...9}_{100}$, ta được $\dfrac{\overbrace{9...9}^{100}\overbrace{0...0}^{100}}{\underbrace{9...9}_{100}\underbrace{9...9}_{100}}$.

Theo quy tắc viết số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn thành phân số thì số $0,(\underbrace{9...9}_{100}\underbrace{0...0}_{100})$ viết thành phân số trên.

Vậy $A = 0,\underbrace{9...9}_{100}\underbrace{0...0}_{100}\underbrace{9...9}_{100}...$

132. Xét phân số $\dfrac{1}{A}$, mẫu A không chứa thừa số nguyên tố 2 và 5 nên $\dfrac{1}{A}$ viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn.

$$\frac{1}{A} = \frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{n}} \Rightarrow \underbrace{9...9}_{n} = A\,.\,\overline{a_1a_2...a_n} \Rightarrow \underbrace{99...9}_{n} \,\vdots\, A.$$

Chú ý : Ta cũng chứng minh được tồn tại một bội của A gồm toàn các chữ số 1.

Thật vậy, ta đã có $9.\underbrace{11...1}_{n} \,\vdots\, A$ (1). Ước chung của A và 9 chỉ có thể là 1, 3, 9.

Nếu $(A, 9) = 1$ thì từ (1) suy ra $\underbrace{11...1}_{n} \,\vdots\, A$.

Nếu $(A, 9) = 3$ thì đặt $A = 3B$, ta có $(B, 3) = 1$. Từ (1) suy ra

$$9.\underbrace{11...1}_{n} \,\vdots\, 3B \Rightarrow 3.\underbrace{11...1}_{n} \,\vdots\, B \Rightarrow \underbrace{11...1}_{n} \,\vdots\, B \Rightarrow \underbrace{11...1}_{3n} \,\vdots\, 3B = A.$$

Nếu (A, 9) = 9 thì đặt A = 9B. Từ (1) suy ra

$$9.\underbrace{11...1}_{n} \vdots 9B \Rightarrow \underbrace{11...1}_{n} \vdots B \Rightarrow \underbrace{11...1}_{9n} \vdots 9B = A.$$

Cũng có thể giải bài này bằng cách dùng nguyên lí Đi-rích-lê.

BẤT ĐẲNG THỨC

133. a) $x > -3$.

b) $x < 1$ hoặc $x > 2$.

c) $-1 < x < 2$ hoặc $2 < x < 4$.

d) $3 < x < 9$.

e) $\frac{5}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{5-x}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 5$.

134. a) $x < 0$.

b) $x < 0$.

c) $x < 1$ và $x \neq 0$.

135. a) $1 + \frac{2}{x+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x+3} < 0 \Leftrightarrow x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$.

b) $1 - \frac{1}{x+4} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} < 0 \Leftrightarrow x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -4$.

136. Tích của bốn số $a^2 - 10$, $a^2 - 7$, $a^2 - 4$, $a^2 - 1$ là số âm nên phải có một hoặc ba số âm. Ta có $a^2 - 10 < a^2 - 7 < a^2 - 4 < a^2 - 1$. Xét hai trường hợp :

a) Có một số âm, ba số dương :

$$a^2 - 10 < 0 < a^2 - 7 \Rightarrow 7 < a^2 < 10 \Rightarrow a^2 = 9 \text{ (do } a \in \mathbf{Z}) \Rightarrow a = \pm 3.$$

b) Có ba số âm, một số dương :

$a^2 - 4 < 0 < a^2 - 1 \Rightarrow 1 < a^2 < 4$. Do $a \in \mathbf{Z}$ nên không tồn tại số a.

Đáp số : $a = \pm 3$.

137. a) GTNN của A bằng 2 khi và chỉ khi $x = 0$.

b) GTNN của B bằng 25 khi và chỉ khi $x = 0$.

c) GTNN của C bằng 0 khi và chỉ khi $x = 1$, $y = -2$.

138. a) GTLN của A bằng 5 khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

b) GTLN của B bằng $\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi x = 1.

c) $C = \frac{x^2+8}{x^2+2} = 1 + \frac{6}{x^2+2}$.

GTLN của C bằng 4 khi và chỉ khi x = 0.

139. a) Xét x > 7 thì A < 0. (1)

Xét x < 7 thì mẫu 7 − x là số nguyên dương. Phân số A có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên

A lớn nhất ⇔ mẫu 7 − x nhỏ nhất ⇔ 7 − x = 1 ⇔ x = 6. Khi đó A = 1 (2)

So sánh (1) và (2), ta thấy GTLN của A bằng 1 khi và chỉ khi x = 6.

b) Biến đổi : $B = \frac{27-2x}{12-x} = \frac{2(12-x)+3}{12-x} = 2 + \frac{3}{12-x}$.

GTLN của B bằng 5 khi và chỉ khi x = 11.

140. a) Xét x > 3 thì A > 0.

Xét x < 3 thì A < 0. Vì A là số âm nên A nhỏ nhất khi số đối của nó (là $\frac{1}{3-x}$) lớn nhất.

Giải tương tự như bài 139, ta được : GTNN của A bằng −1 khi và chỉ khi x = 2.

b) $B = \frac{7-x}{x-5} = \frac{2-(x-5)}{x-5} = \frac{2}{x-5} - 1$.

GTNN của B bằng −3 khi và chỉ khi x = 4.

c) GTNN của C bằng 4 khi và chỉ khi x = 3.

141. Biến đổi $A = \frac{2(7n-8)}{2(2n-3)} = \frac{7(2n-3)+5}{2(2n-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2n-3)}$.

Đặt $B = \frac{5}{2(2n-3)}$ thì A lớn nhất khi và chỉ khi B lớn nhất. GTLN của A bằng 6 khi và chỉ khi n = 2.

142. Từ $a + 3c = 8$, $a + 2b = 9$ suy ra $2a + 2b + 3c = 17$. Do đó $2(a + b + c) + c = 17$. Để $a + b + c$ lớn nhất, phải có c nhỏ nhất, mà $c \geq 0$ nên $c = 0$, khi đó $a = 8$, $b = \frac{1}{2}$, GTLN của $a + b + c$ bằng 8,5.

143. Trước hết ta thấy tổng A là một số lẻ. Thật vậy nếu tách riêng số 1989 và ghép 1988 số hạng đầu thành từng cặp, mỗi cặp hai số thì ta được 994 cặp và số 1989.

$A = (* 1 * 2) + (* 3 * 4) + ... + (* 1987 * 1988) * 1989$, trong đó dấu * thay cho dấu "+" hoặc "−".

Giá trị của mỗi cặp là số lẻ nên tổng của hai cặp là số chẵn. Vì số cặp trong tổng A là số chẵn (994) nên tổng của 994 cặp là số chẵn, do đó A là số lẻ.

Số lẻ không âm nhỏ nhất là 1. Tổng A có thể nhận được giá trị này, chẳng hạn

$A = 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + ... + (1986 - 1987 - 1988 + 1989) = 1.$

144. a) $x^2 = (2\sqrt{7})^2 = 4 \cdot 7 = 28.$

$y^2 = (3\sqrt{3})^2 = 9 \cdot 3 = 27.$

$x^2 > y^2$ nên $x > y$ (chú ý rằng x, y đều dương).

b) $x < y$.

c) $\sqrt{31} < 6$, $\sqrt{11} < \sqrt{13}$ nên $\sqrt{31} + \sqrt{11} < 6 + \sqrt{13}$.

Vậy $\sqrt{31} - \sqrt{13} < 6 - \sqrt{11}$ tức là $x < y$.

145. $0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow a(a - 1) < 0 \Rightarrow a^2 - a < 0 \Rightarrow a > a^2 \Rightarrow \sqrt{a} > a.$

146. GTNN của $\sqrt{x} + 1$ bằng 1 khi và chỉ khi $x = 0$.

147. GTLN của $\frac{1}{\sqrt{x} + 3}$ bằng $\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x = 0$.

148. a) $[x] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3$.

b) $[x] = -2$ hoặc $[x] = \frac{1}{3}$ (loại).

Vậy $-2 \leq x < -1$.

149. Theo định nghĩa phần nguyên và phần lẻ của một số, $a \in \mathbf{Q}$ thì $[a] \in \mathbf{Z}$ và $0 \le \{a\} < 1$.

a) Xét $[x] + \{y\} = 1{,}5$ và chú ý rằng $0 \le \{y\} < 1$ nên $0{,}5 < [x] \le 1{,}5$. Do $[x] \in \mathbf{Z}$ nên $[x] = 1$ suy ra $\{y\} = 0{,}5$.

Xét $[y] + \{x\} = 3{,}2$ và chú ý rằng $0 \le \{x\} < 1$ nên $2{,}2 < [y] \le 3{,}2$. Do $[y] \in \mathbf{Z}$ nên $[y] = 3$ suy ra $\{x\} = 0{,}2$.

Vậy $x = [x] + \{x\} = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$; $y = [y] + \{y\} = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$.

b) Trừ từng vế hai đẳng thức đã cho, ta được :

$$x - [x] + y - \{y\} = -1{,}5 \text{ hay } \{x\} + [y] = -1{,}5.$$

Giải tương tự như câu a. *Đáp số :* $x = 4{,}5$; $y = -1{,}3$.

150. Có tồn tại. Chẳng hạn ta chọn năm số của dãy là -5 ; 6 ; -5 ; 6 ; -5 thì dãy đó thoả mãn điều kiện của bài toán.

151. Với mọi số nguyên n ta có $n \le n^2$. Do đó từ đề bài suy ra :

$$a^2 \le b \le b^2 \le c \le c^2 \le a \le a^2.$$

Do đó : $a^2 = b = b^2 = c = c^2 = a = a^2$.

Ta có $a^2 = a \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a \in \{0 ; 1\}$.

Tương tự : $b \in \{0 ; 1\}$, $c \in \{0 ; 1\}$.

Bài toán có hai đáp số : $a = b = c = 0$ và $a = b = c = 1$.

GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ

152. a) $a \ge 0$; b) $a < 0$.

c) Không có số a nào như vậy ; d) $a \le 0$; e) Mọi a.

153. a) Thêm điều kiện : a và b cùng dấu hoặc cùng bằng 0.

b) Thêm điều kiện : $b = 0$ hoặc a và b cùng dương.

154. Ta có $-x = y$.

a) $x^2y = y^2.y = y^3 > 0$ vì $y > 0$. b) $x + y = 0$.

c) $xy < 0$ vì $x < 0, y > 0$. d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} < 0$.

e) $\frac{x}{y} + 1 = -1 + 1 = 0.$

Như vậy chỉ có câu d là sai.

155. a) $2\frac{2}{9}$; b) -8 ; c) -5 ; d) $-2,5$ hoặc $-2,3$.

156. a) Biểu thức bằng 2a với $a \geq 0$, bằng 0 với $a < 0$.

b) Biểu thức bằng 0 với $a \geq 0$, bằng $-2a$ với $a < 0$.

c) Biểu thức bằng a^2 với $a \geq 0$, bằng $-a^2$ với $a < 0$.

d) Biểu thức bằng 1 với $a > 0$, bằng -1 với $a < 0$.

e) Biểu thức bằng $x - 9$ với $x \geq -3$, bằng $5x + 3$ với $x < -3$.

g) Biểu thức bằng $2x + 5$ với $x < \frac{1}{4}$, bằng $-6x + 7$ với $\frac{1}{4} \leq x < 3$, bằng $-2x - 5$ với $x \geq 3$.

157. a) $x_1 = 4$; $x_2 = -1$; b) $x = -\frac{1}{2}$; c) $x = 0$; d) $x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = -\frac{2}{3}$.

158. *Cách 1*. a) $a + b = |a| + |b|$. Xét hai trường hợp :

1) Nếu $b \geq 0$ thì $a + b = |a| + b$, khi đó $a = |a|$ hay $a \geq 0$.

2) Nếu $b < 0$ thì $a + b = |a| - b$, khi đó $|a| - a = 2b$. Đẳng thức này không xảy ra vì vế trái không âm, vế phải âm.

Kết luận : Vậy $a \geq 0$, $b \geq 0$ là các giá trị thoả mãn $a + b = |a| + |b|$.

Cách 2. Ta có $a \leq |a|$, $b \leq |b|$. Do đó $a + b = |a| + |b|$ suy ra $a \geq 0$; $b \geq 0$.

b) $a + b = |b| - |a|$. Giải tương tự như ví dụ 39.

Đáp số : $b \geq 0$, $a \leq 0$ hoặc $b < 0$; $a = -b$.

159. a) Có 80 cặp số.

b) Nếu $x = 0$ thì y bằng $0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; ... ; \pm 19$, gồm 39 giá trị. Nếu $x = \pm 1$ thì y bằng $0 ; \pm 1 ; \pm 2, ... \pm 18$, gồm 37 giá trị... Nếu $x = \pm 18$ thì $y = 0 ; \pm 1$. Nếu $x = \pm 19$ thì $y = 0$, gồm 1 giá trị.

Có tất cả : $2.(1 + 3 + ... + 37) + 39 = 761$ (cặp số).

160. Dựa vào quy tắc các phép tính đã học, ta có :

a) Giá trị tuyệt đối của một tổng nhỏ hơn hoặc bằng tổng các giá trị tuyệt đối :

$$|a + b| \le |a| + |b|.$$

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $ab \ge 0$.

b) Giá trị tuyệt đối của một hiệu lớn hơn hoặc bằng hiệu các giá trị tuyệt đối :

$$|a - b| \ge |a| - |b| \text{ với } |a| \ge |b|.$$

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $ab \ge 0$.

c) Giá trị tuyệt đối của một tích bằng tích các giá trị tuyệt đối :

$$|ab| = |a| \,.\, |b|.$$

d) Giá trị tuyệt đối của một thương bằng thương các giá trị tuyệt đối :

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

161. a) GTNN của A bằng -1 khi và chỉ khi $x = \frac{2}{3}$.

b) GTNN của B bằng -1 khi và chỉ khi $x = \frac{1}{4}$.

c) GTNN của C bằng -1 khi và chỉ khi $x = 0$, $y = 2$.

d) Với $x > 0$ thì $D = x + x = 2x > 0$. (1)

Với $x \le 0$ thì $D = x - x = 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : GTNN của D bằng 0 khi và chỉ khi $x \le 0$.

162. a) GTLN của A bằng 5 khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

b) GTLN của B bằng $\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x = 2$.

163. Xét các trường hợp :

Xét $x \le -2$ thì $C \le 1$.

Xét $x = -1$ thì $C = 1$.

Xét $x \ge 1$. Khi đó $A = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$. Ta thấy C lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{2}{x}$ lớn nhất. Chú ý rằng x là số nguyên dương nên $\frac{2}{x}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ x nhỏ nhất, tức là $x = 1$, khi đó $C = 3$.

So sánh các trường hợp trên ta suy ra : GTLN của C bằng 3 khi và chỉ khi $x = 1$.

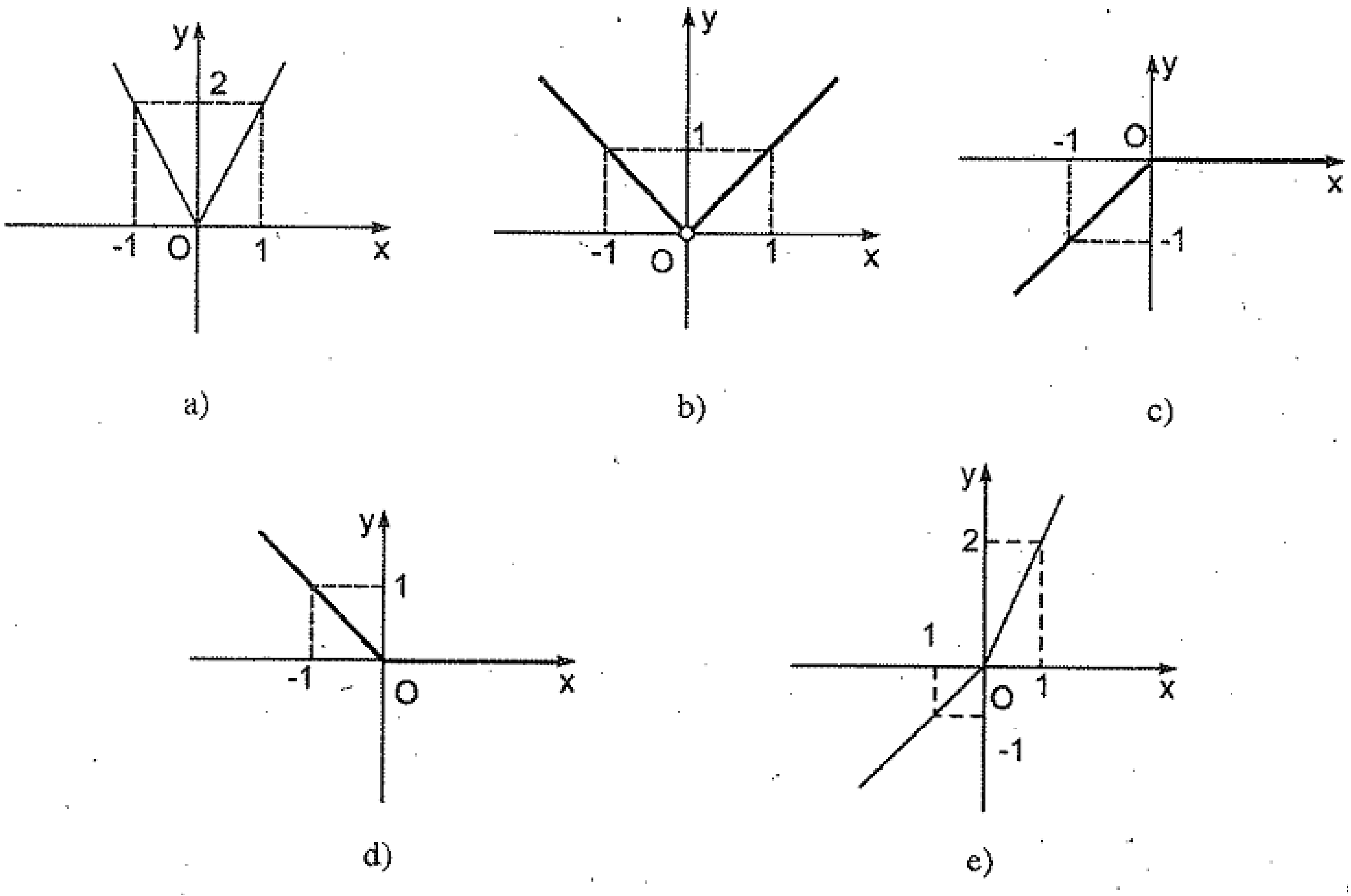
164. $|a-b| = |(a-c)+(c-b)| \le |a-c| + |c-b| < 3 + 2 = 5.$

165. a) $y = 2|x| = \begin{cases} 2x \text{ với } x \ge 0 \\ -2x \text{ với } x < 0 \end{cases}$ b) $y = \dfrac{x^2}{|x|} = \begin{cases} x \text{ với } x > 0 \\ -x \text{ với } x < 0 \end{cases}$

c) $y = \dfrac{1}{2}(x - |x|) = \begin{cases} x \text{ với } x < 0 \\ 0 \text{ với } x \ge 0 \end{cases}$ d) $y = \dfrac{1}{2}(|x| - x) = \begin{cases} -x \text{ với } x < 0 \\ 0 \text{ với } x \ge 0 \end{cases}$

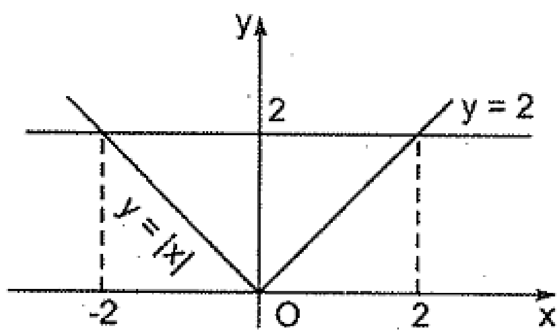
e) $y = \dfrac{1}{2}(3x + |x|) = \begin{cases} x \text{ với } x < 0 \\ 2x \text{ với } x \ge 0 \end{cases}$

Đồ thị các hàm số trên : xem hình 44.



Hình 44

166. Các điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = |x|$ nằm phía dưới đường thẳng $y = 2$ có hoành độ thoả mãn điều kiện $|x| < 2$. Ta được $-2 < x < 2$ là các giá trị phải tìm (h.45).



Hình 45

PHẦN HÌNH HỌC

CHƯƠNG I - ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

§1. Hai góc đối đỉnh

1. (h.46) Ta có :

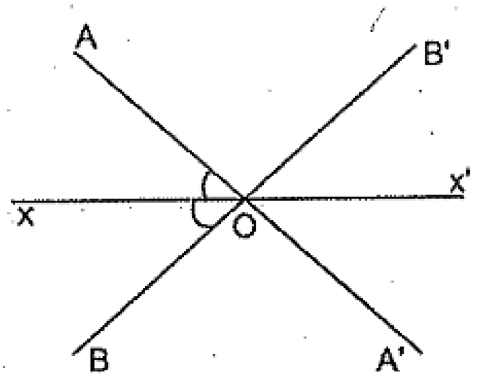
$\widehat{A'Ox'} = \widehat{AOx}$ (đối đỉnh)

$\widehat{B'Ox'} = \widehat{BOx}$ (đối đỉnh)

mà $\widehat{AOx} = \widehat{BOx}$

nên $\widehat{A'Ox'} = \widehat{B'Ox'}$.

Ta lại có tia Ox' nằm giữa hai tia OA' và OB' nên Ox' là tia phân giác của góc A'OB'.



Hình 46

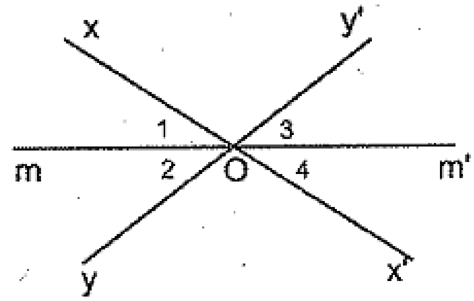
2. (h.47) Gọi xOy và x'Oy' là hai góc đối đỉnh, Om và Om' là các tia phân giác của hai góc đó.

Cách 1. Ta có $\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'}$ nên $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_4$. Ta lại có $\widehat{O}_4 + \widehat{xOm'} = 180^o$, do đó $\widehat{O}_1 + \widehat{xOm'} = 180^o$.

Vậy Om và Om' là hai tia đối nhau.

Cách 2. Ta có $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$, $\widehat{xOy'} = \widehat{x'Oy}$ mà tổng sáu góc này bằng 360^o nên $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 + \widehat{xOy'} = 180^o$.

Vậy Om và Om' là hai tia đối nhau.



Hình 47

3. a) Có 10 tia chung gốc O, mỗi tia tạo với một trong 9 tia còn lại thành 9 góc nên 10 tia tạo với các tia còn lại thành 9.10 = 90 góc. Nhưng mỗi góc đã được tính hai lần. Vậy có 90 : 2 = 45 (góc).

Chú ý : Tổng quát với n đường thẳng cùng đi qua điểm O, ta có số góc là :

$$\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1) \text{ (bạn đọc tự chứng minh).}$$

b) Các góc nhỏ hơn góc bẹt trong hình có $45 - 5 = 40$ (góc).

Mỗi góc trong 40 góc này đều có một góc đối đỉnh với nó và chúng tạo thành một cặp góc đối đỉnh. Vậy có $40 : 2 = 20$ cặp góc đối đỉnh.

Chú ý : Tổng quát với n đường thẳng, ta có $\dfrac{n(2n-1)-n}{2} = n(n-1)$ cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt. Nếu kể cả các cặp góc bẹt đối đỉnh thì có n^2 cặp (bạn đọc tự chứng minh).

c) Có 10 góc không có điểm trong chung, tổng của chúng bằng 360^o. Nếu mọi góc đều nhỏ hơn 36^o thì tổng của chúng nhỏ hơn 360^o, vô lí. Vậy phải tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng 36^o.

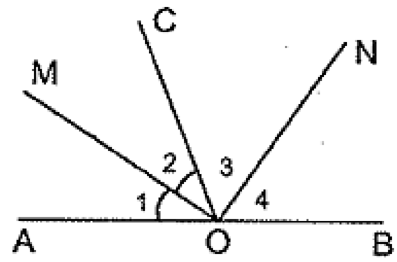
§2. Hai đường thẳng vuông góc

4. (h.48)

$\widehat{O}_3 = 90^o - \widehat{O}_2$,

$\widehat{O}_4 = 180^o - \widehat{MON} - \widehat{O}_1 = 90^o - \widehat{O}_1$.

Do $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ nên $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$. Do đó ON là tia phân giác của góc BOC.



Hình 48

5. (h.49)

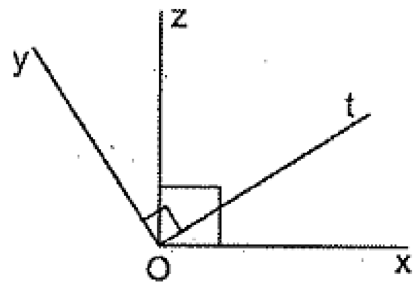
a) $\widehat{xOt} + \widehat{zOt} = \widehat{xOz} = 90^o$ nên $\widehat{xOt} = 90^o - \widehat{zOt}$.

$\widehat{yOz} + \widehat{zOt} = \widehat{yOt} = 90^o$ nên $\widehat{yOz} = 90^o - \widehat{zOt}$.

Vậy $\widehat{xOt} = \widehat{yOz}$.

b) $\widehat{xOy} + \widehat{zOt} = (\widehat{xOz} + \widehat{zOy}) + \widehat{zOt} =$

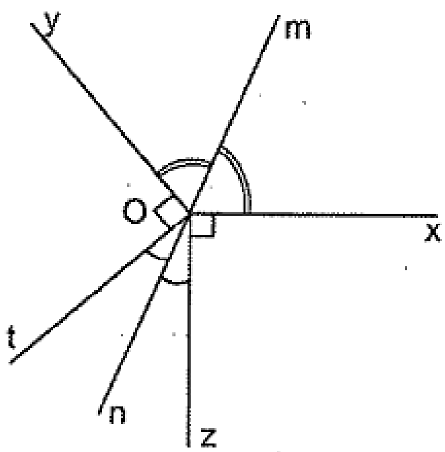
$= \widehat{xOz} + (\widehat{zOy} + \widehat{zOt}) = \widehat{xOz} + \widehat{yOt} = 90^o + 90^o = 180^o$.



Hình 49

6. (h.50)

Hãy chứng minh rằng tổng $\widehat{mOx} + \widehat{xOz} + \widehat{zOn}$ bằng 180^o.



Hình 50

§3. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

7. Hai góc so le trong $\widehat{COD}$ và $\widehat{D}$ bằng nhau (bằng 90^o) nên OC // DE.

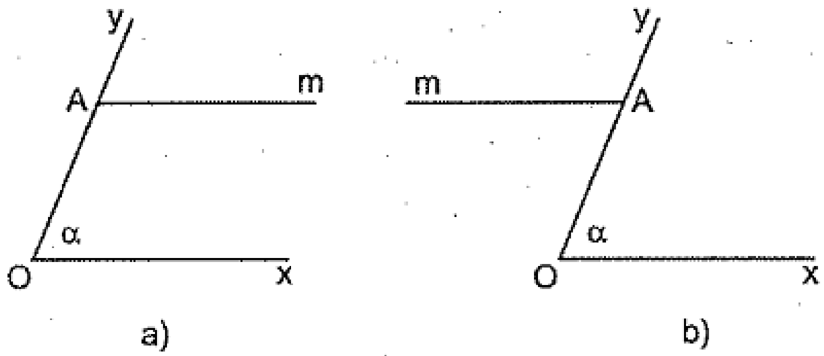
$$\widehat{AOC} = 360^o - 90^o - 140^o = 130^o.$$

Hai góc so le trong $\widehat{AOC}$ và $\widehat{A}$ bằng nhau (bằng 130^o) nên AB // OC.

8. Xét hai trường hợp :

a) (h.51a) Nếu tia Am thuộc miền trong của góc xOy thì phải có $\widehat{OAm} = 180^o - \alpha$.

b) (h.51b) Nếu tia Am thuộc miền ngoài của góc xOy thì phải có $\widehat{OAm} = \alpha$.



Hình 51

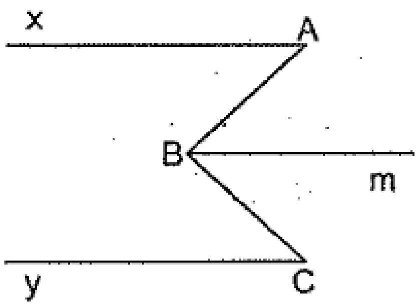
9. a) Chứng tỏ rằng $\widehat{A} + \widehat{ABm} = 180^o$.

b) Tính $\widehat{CBm}$, rồi chứng tỏ rằng $\widehat{C} + \widehat{CBm} = 180^o$.

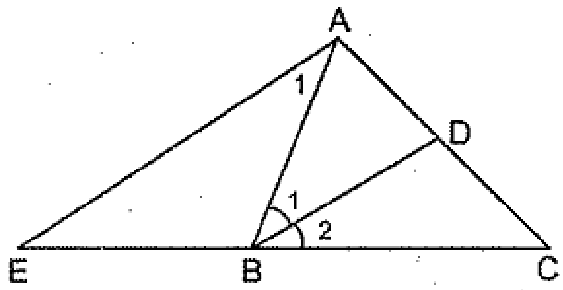
§4. Tiên đề Ơ-clit. Tính chất hai đường thẳng song song

10. (h.52) a) Vẽ Bm // Ax sao cho Bm nằm trong góc ABC thì Bm // Cy. Do đó $\widehat{ABm} = \widehat{A}, \widehat{CBm} = \widehat{C}$ suy ra $\widehat{ABm} + \widehat{CBm} = \widehat{A} + \widehat{C}$, tức là $\widehat{ABC} = \widehat{A} + \widehat{C}$.

b) Vẽ tia Bm sao cho góc ABm và góc A là hai góc so le trong và $\widehat{ABm} = \widehat{A}$. Chứng tỏ rằng Ax và Cy cùng song song với Bm.



Hình 52



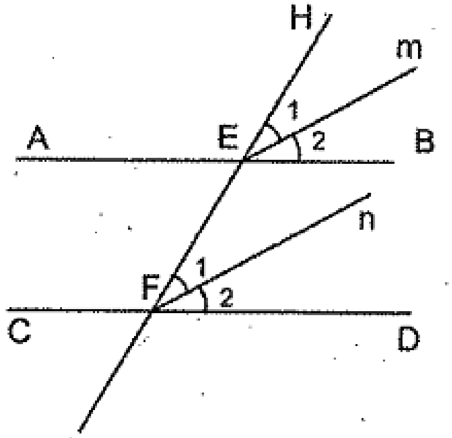
Hình 53

11. (h.53)

AE // BD, cát tuyến AB nên $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (so le trong).

AE // BD, cát tuyến EC nên $\widehat{E} = \widehat{B}_2$ (đồng vị).

Do $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{E}$ tức là $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$.



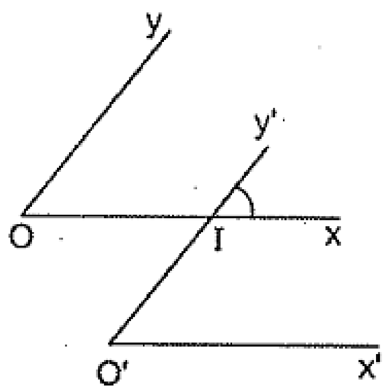
Hình 54

12. (h.54) Kí hiệu như trên hình vẽ.

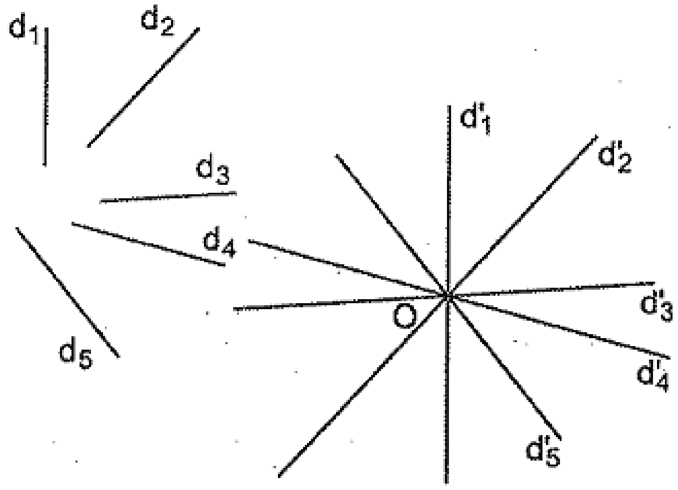
$$AB \,//\, CD \Rightarrow \widehat{HEB} = \widehat{EFD} \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{F}_1.$$

Hai góc đồng vị $\widehat{E}_1, \widehat{F}_1$ bằng nhau nên Em // Fn.

13. Trước hết, ta xét hai góc xOy và x'O'y' trên hình 55 có Ox // O'x', Oy // O'y', ta gọi hai góc đó là hai góc có cạnh tương ứng song song "cùng chiều". Dễ thấy $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$ vì cùng bằng $\widehat{xIy'}$.



Hình 55



Hình 56

Gọi năm đường thẳng đã cho là d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. Qua một điểm O bất kì, vẽ năm đường thẳng d'_1, d'_2, d'_3, d'_4, d'_5 tương ứng song song với năm đường thẳng đã cho (h.56).

Trong năm đường thẳng d'_1, d'_2, d'_3, d'_4, d'_5 cũng không có hai đường thẳng nào trùng nhau, nên có 10 góc đỉnh O không có điểm trong chung có tổng bằng 360°. Tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360^\circ : 10 = 36^\circ$. Góc này bằng góc có cạnh tương ứng song song "cùng chiều" với nó.

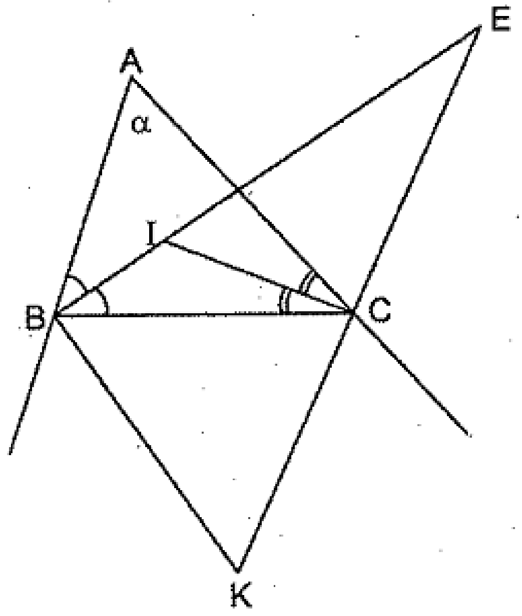
Vậy trong năm đường thẳng đã cho, tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc nhỏ hơn hoặc bằng 36°.

CHƯƠNG II - TAM GIÁC

§5. Tổng ba góc của một tam giác

14. (h.57) $\widehat{BIC} = 90^o + \dfrac{\alpha}{2}$, $\widehat{BKC} = 90^o - \dfrac{\alpha}{2}$,

$\widehat{BEC} = \dfrac{\alpha}{2}$.



Hình 57

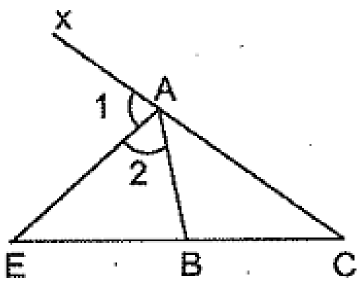
15. a) Kẻ tia BD rồi áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác.

Đáp số : $a + b + c = \widehat{ADC} = 90^o$.

b) Chú ý rằng $m - p = \widehat{ACB}$.

Đáp số : $m + n - p = 180^o$.

16. (h.58) Đặt $\widehat{ABC} = \widehat{B}$.



Hình 58

Cách 1. $\widehat{E} = \widehat{A}_1 - \widehat{C}$

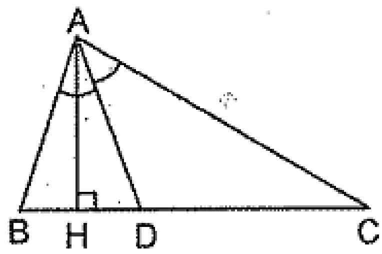
$\widehat{E} = \widehat{B} - \widehat{A}_2$

mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ nên $2\widehat{E} = \widehat{B} - \widehat{C}$. Vậy $\widehat{E} = \dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$.

Cách 2.

$\widehat{BAx} = \widehat{B} + \widehat{C}$ nên $\widehat{A}_2 = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$, $\widehat{E} = \widehat{B} - \widehat{A}_2 = \widehat{B} - \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = \dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$.

17. (h.59)



Hình 59

a) Đặt $\widehat{BAC} = \widehat{A}$. Ta có $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^o$,

$$\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \left(\widehat{B} + \dfrac{\widehat{A}}{2}\right) - \left(\widehat{C} + \dfrac{\widehat{A}}{2}\right)$$

$$= \widehat{B} - \widehat{C} = \alpha.$$

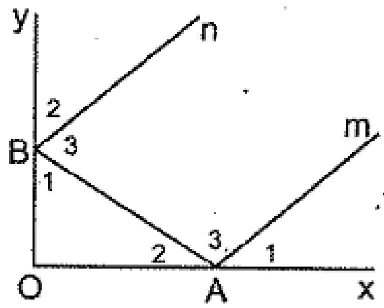
Do đó $\widehat{ADC} = 90^o + \dfrac{\alpha}{2}$, $\widehat{ADB} = 90^o - \dfrac{\alpha}{2}$.

b) Trong tam giác HAD, ta có $\widehat{HAD} = 90^o - \widehat{ADH} = 90^o - \left(90^o - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$.

Chú ý : Sẽ thiếu chính xác nếu tính $\widehat{HAD}$ bằng $\widehat{BAD} - \widehat{BAH}$ vì điểm H có thể nằm ngoài đoạn thẳng BC. Xem thêm bài 71.

18. (h.60) Gọi $\widehat{A}_2 = \alpha, \widehat{B}_1 = \beta$ thì $\widehat{A}_3 = 180^o - 2\alpha$, $\widehat{B}_3 = 180^o - 2\beta$ nên $\widehat{A}_3 + \widehat{B}_3 = 360^o - 2(\alpha + \beta)$.

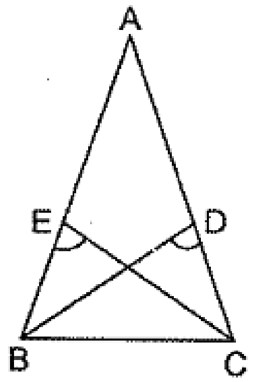
Do Am // Bn nên $360^o - 2(\alpha + \beta) = 180^o$. Suy ra $\alpha + \beta = 90^o$. Vậy $\widehat{xOy} = 90^o$.



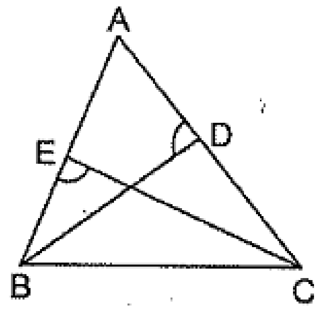
Hình 60

19. Xét hai trường hợp :

a) $\widehat{BEC} = \widehat{BDC}$ (h.61). Khi đó $\widehat{A} + \widehat{ACE} = \widehat{A} + \widehat{ABD}$ nên $\widehat{ACE} = \widehat{ABD}$, suy ra $\widehat{B} = \widehat{C}$.



Hình 61



Hình 62

b) $\widehat{BEC} = \widehat{BDA}$ (h.62) khi đó $\widehat{A} + \widehat{ACE} = \widehat{BCD} + \widehat{CBD}$, tức là

$$\widehat{A} + \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{C} + \frac{\widehat{B}}{2} \Leftrightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} \Leftrightarrow 2\widehat{A} = \widehat{C} + \widehat{B}$$

$$\Leftrightarrow 3\widehat{A} = \widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{A} = 60^o.$$

Do đó $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^o$.

Vậy $\widehat{B} = \widehat{C}$ hoặc $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^o$.

20. (h.63). Gọi G là giao điểm của CK và AE, H là giao điểm của BK và DE.

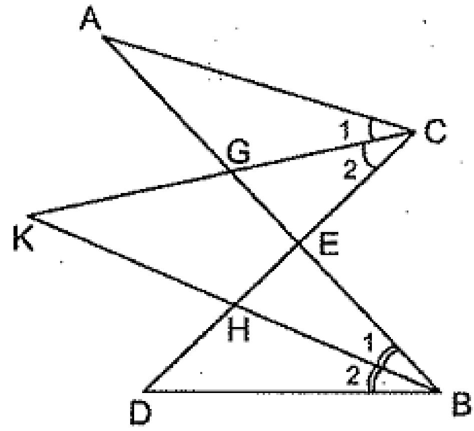
Xét ΔKGB và Δ AGC, ta có

$$\widehat{K} + \widehat{B}_1 = \widehat{A} + \widehat{C}_1 \qquad (1)$$

Xét ΔKHC và ΔDHB, ta có

$$\widehat{K}+\widehat{C}_2=\widehat{D}+\widehat{B}_2 \qquad (2)$$

Do $\widehat{B}_1=\widehat{B}_2, \widehat{C}_1=\widehat{C}_2$, nên cộng (1) với (2) ta được $2\widehat{K}=\widehat{A}+\widehat{D}$, do đó $\widehat{K}=\dfrac{\widehat{A}+\widehat{D}}{2}$.



Hình 63

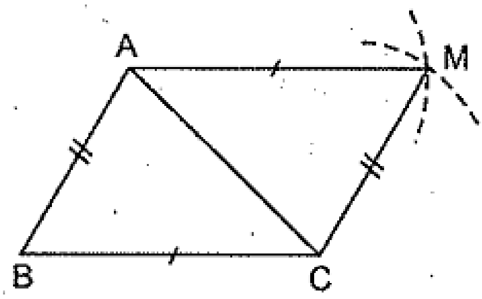
§6. Trường hợp bằng nhau thứ nhất của tam giác cạnh - cạnh - cạnh

21. (h.64)

$$\Delta ABC=\Delta CMA \text{ (c.c.c)}$$

suy ra $\widehat{ACB}=\widehat{CAM}$.

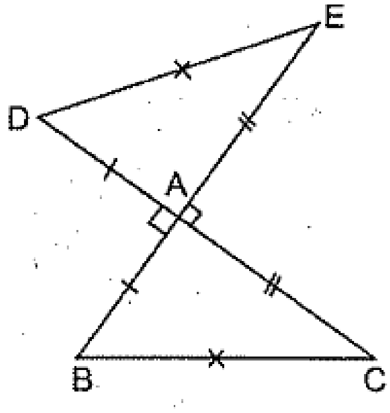
Do đó AM // BC.



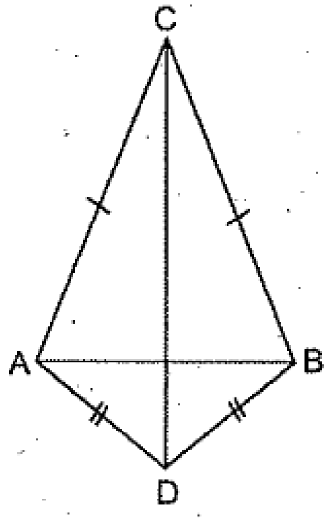
Hình 64

22. (h.65)

$\Delta ABC = \Delta ADE$ (c.c.c) suy ra $\widehat{BAC}=\widehat{DAE}$. Ta lại có $\widehat{BAC}+\widehat{DAE}=180^\circ$ nên $\widehat{BAC}=\widehat{DAE}=90^\circ$.



Hình 65

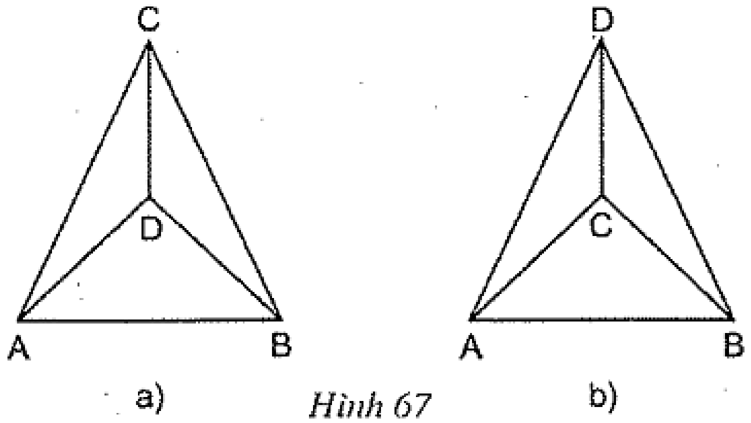


Hình 66

23. a) (h.66) $\Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c) suy ra $\widehat{ACD}=\widehat{BCD}$. Do đó CD là tia phân giác của góc ACB.

b) Nếu AD < AC (h. 67a) thì CD là tia phân giác của góc ACB.

Nếu AD > AC (h.67b) thì kết luận ở câu a không đúng. Trong trường hợp này, CD là tia đối của tia phân giác của góc ACB.



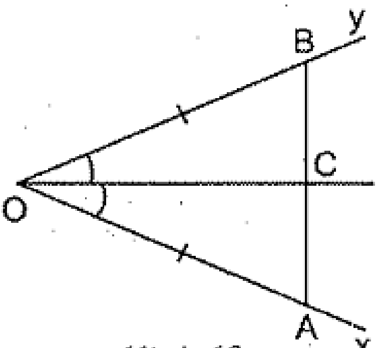
Hình 67

§7. Trường hợp bằng nhau thứ hai của tam giác cạnh - góc - cạnh

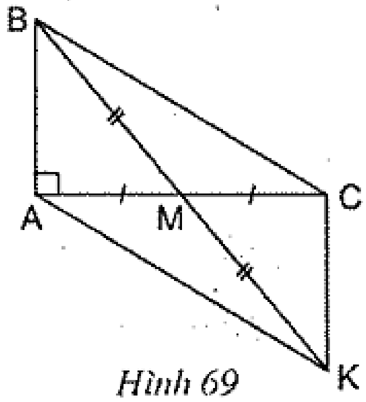
24. (h.68)

a) $\Delta AOC = \Delta BOC$ (c.g.c) nên AC = CB.

b) $\widehat{OCA} = \widehat{OCB}$ mà $\widehat{OCA} + \widehat{OCB} = 180^o$ nên $\widehat{OCA} = 90^o$. Vậy $AB \perp OC$.



Hình 68

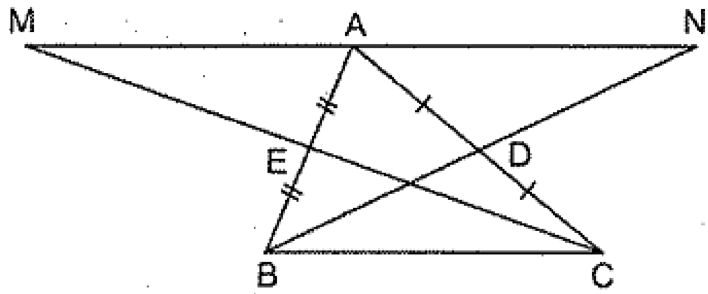


Hình 69

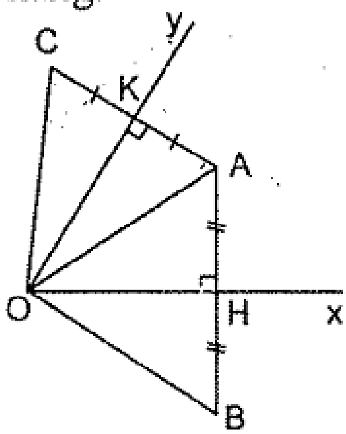
25. (h.69) a) Chú ý rằng $\Delta AMB = \Delta CMK$ (c.g.c).

b) Xét ΔAMK và ΔCMB.

26. (h.70) Chứng minh rằng AM = AN và M, A, N thẳng hàng.



Hình 70



Hình 71

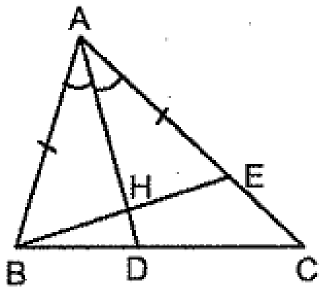
27. (h.71)

a) OB và OC cùng bằng OA.

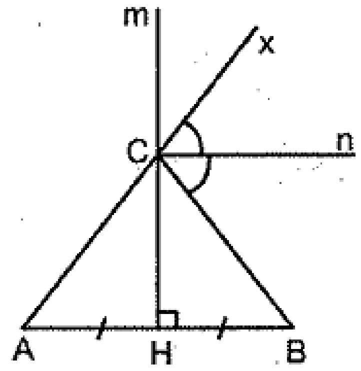
b) $\widehat{BOC} = 2\alpha$.

28. (h.72) Gọi H là giao điểm của AD và BE.

Ta có $\Delta AHB = \Delta AHE$ (c.g.c). Từ đó chứng minh được $AH \perp BE$ nên $AD \perp BE$.



Hình 72



Hình 73

29. (h.73) Gọi H là giao điểm của m và AB. Ta có $\Delta AHC = \Delta BHC$ (c.g.c) nên CH là tia phân giác của góc ACB. Còn Cn là tia phân giác của góc BCx, kề bù với góc ACB.

Do đó $CH \perp Cn$ tức là $m \perp Cn$.

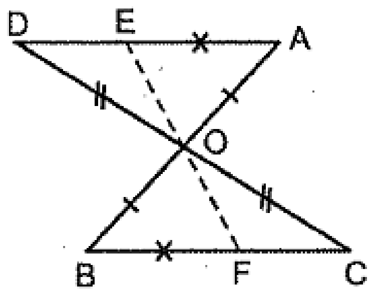
30. (h.74)

$\Delta AOD = \Delta BOC$ (c.g.c) suy ra $\widehat{A} = \widehat{B}$, OA = OB.

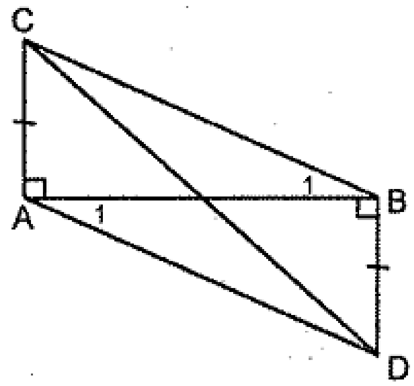
$\Delta AOE = \Delta BOF$ (c.g.c) suy ra $\widehat{AOE} = \widehat{BOF}$.

Ta lại có $\widehat{AOE} + \widehat{EOB} = 180^\circ$ nên $\widehat{BOF} + \widehat{EOB} = 180^\circ$.

Suy ra hai tia OE và OF đối nhau, tức là ba điểm E, O, F thẳng hàng.



Hình 74

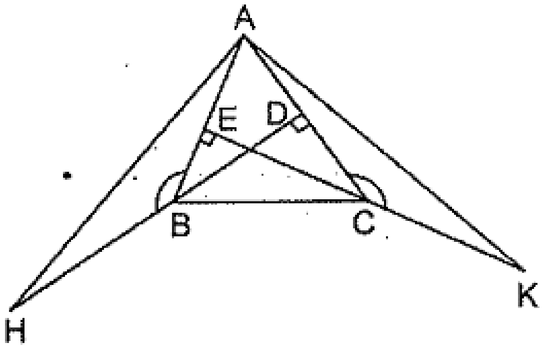


Hình 75

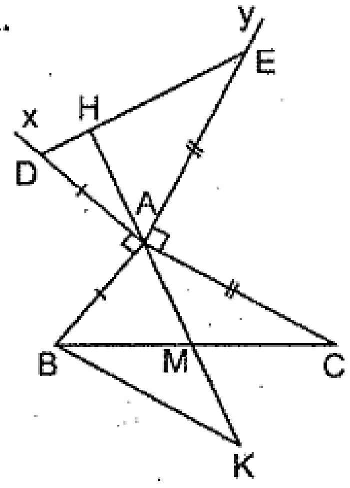
31. (h.75)

$\Delta ABC = \Delta BAD$ (c.g.c) suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$. Do đó BC // AD nên $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.

32. (h.76) $\Delta ABH = \Delta KCA$ (c.g.c) suy ra AH = AK.



Hình 76



Hình 77

33. (h.77) a) Để chứng tỏ DE = 2AM, ta tạo ra đoạn thẳng gấp đôi AM bằng cách lấy K trên tia đối của tia MA sao cho MK = MA, ta sẽ chứng minh rằng AK = DE.

Dễ thấy AC = BK, AC // BK. Xét ΔABK và ΔDAE, ta có AB = AD, BK = AE (cùng bằng AC), $\widehat{ABK} = \widehat{DAE}$ (cùng bù với góc BAC). Do đó $\Delta ABK = \Delta DAE$ (c.g.c), suy ra AK = DE. Vậy $AM = \dfrac{DE}{2}$.

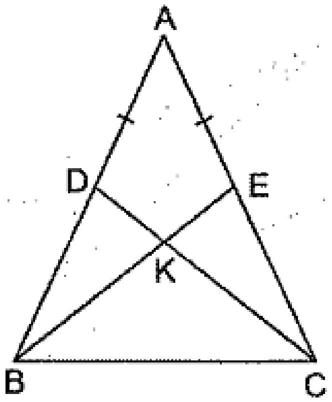
Gọi H là giao điểm của MA và DE. Ta có $\widehat{BAK} + \widehat{DAH} = 90^o$ nên $\widehat{D} + \widehat{DAH} = 90^o$, do đó $\widehat{AHD} = 90^o$.

§8. Trường hợp bằng nhau thứ ba của tam giác góc - cạnh - góc

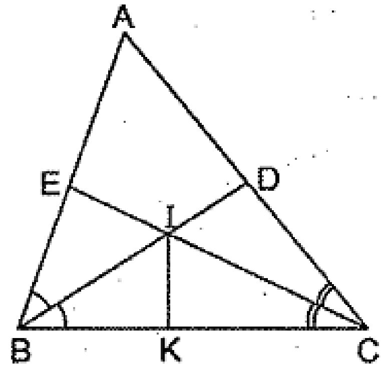
34. (h.78)

a) $\Delta ABE = \Delta ACD$ (c.g.c) suy ra BD = CE.

b) $\Delta KBD = \Delta KCE$ (g.c.g).



Hình 78



Hình 79

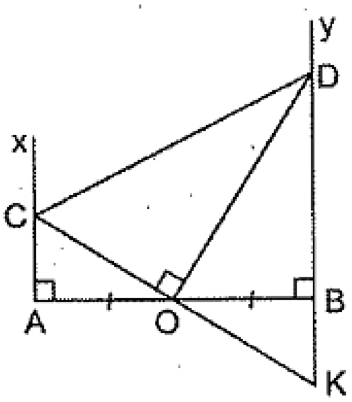
35. (h.79)

Chú ý rằng $\widehat{A} = 60^o$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^o$, $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 60^o$ do đó $\widehat{BIC} = 120^o$, $\widehat{BIE} = \widehat{CID} = 60^o$. Vẽ tia phân giác của góc BIC, cắt BC ở K. Chứng minh rằng ID và IE cùng bằng IK.

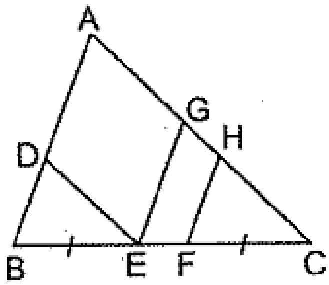
36. (h.80)

Gọi K là giao điểm của CO và BD. Ta có $\Delta AOC = \Delta BOK$ (g.c.g) suy ra $OC = OK$, $AC = BK$.

$\Delta COD = \Delta KOD$ (c.g.c) suy ra $CD = DK$. Do đó $CD = DB + BK = DB + AC$.



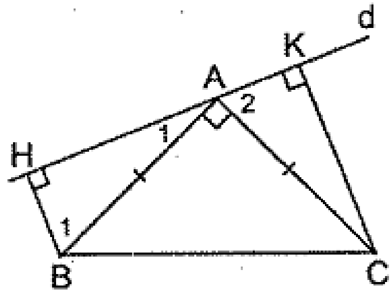
Hình 80



Hình 81

37. (h.81) Qua E vẽ ED // AC thì $AD = EG$. Sau đó chứng minh $BD = FH$ bằng cách chứng tỏ $\Delta\ BDE = \Delta\ FHC$ (g.c.g).

38. (h.82)



Hình 82

a) Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{A_2}$ (cùng phụ với $\widehat{A_1}$).

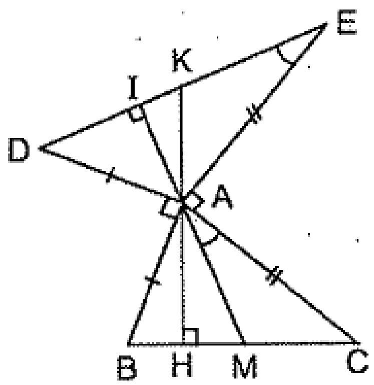
$\Delta ABH = \Delta CAK$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $AH = CK$.

b) Ta có $AH = CK$.

Tương tự $AK = BH$.

Do đó $AH + AK = CK + BH$. Vậy $HK = CK + BH$.

39. *Cách 1.* (h. 83)



Hình 83

Vẽ $AI \perp DE$, đường thẳng IA cắt BC ở M.

ΔAEK và ΔCAM có :

$\widehat{E} = \widehat{CAM}$ (cùng phụ với $\widehat{EAI}$)

$AE = AC$

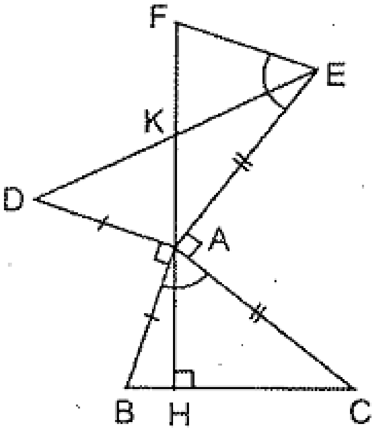
$\widehat{EAK} = \widehat{ACM}$ (cùng phụ với $\widehat{CAH}$).

Do đó $\Delta AEK = \Delta CAM$ (g.c.g), suy ra $EK = AM$.

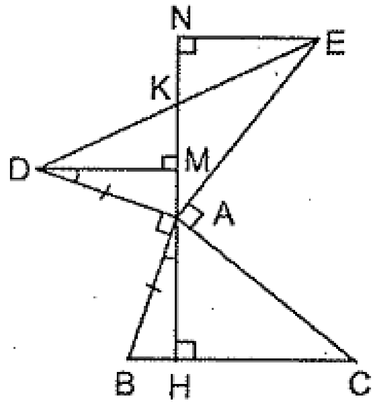
Tương tự $\Delta ADK = \Delta BAM$ (g.c.g), suy ra $DK = AM$. Vậy $DK = EK$.

Cách 2. (h.84) Qua E kẻ đường thẳng song song với AD, cắt AK ở F. Δ FEA và Δ BAC có $\widehat{FEA} = \widehat{BAC}$ (cùng bù với $\widehat{DAE}$), AE = AC, $\widehat{EAF} = \widehat{C}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$) nên $\Delta FEA = \Delta BAC$ (g.c.g), suy ra EF = AB.

Từ đó EF = AD, $\Delta KAD = \Delta KFE$ (g.c.g), suy ra DK = KE.



Hình 84



Hình 85

Cách 3. (h.85) Kẻ DM, EN vuông góc với AH. Chứng minh tương tự như ở bài 38a, ta được AH = DM. Tương tự AH = EN.

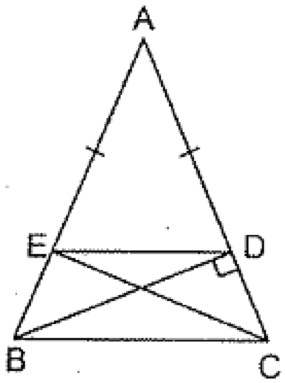
Suy ra DM = EN, $\Delta KMD = \Delta KNE$ (g.c.g), do đó DK = KE.

§9. Tam giác cân

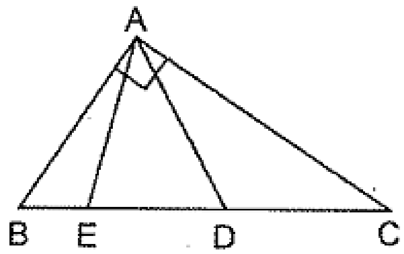
40. (h.86)

a) Chứng minh $\widehat{ADE} = \widehat{C}$ (cùng bằng $\dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$).

b) Δ ABD = Δ ACE (c.g.c).



Hình 86



Hình 87

41. (h.87)

$$\Delta ABD \text{ cân tại B nên } \widehat{ADB} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2}.$$

$$\Delta AEC \text{ cân tại C nên } \widehat{AEC} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}.$$

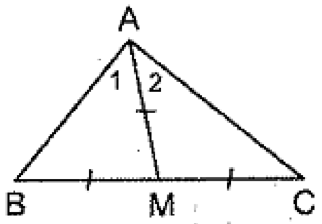
Do đó $$\widehat{ADB} + \widehat{AEC} = \frac{360^o - (\widehat{B} + \widehat{C})}{2} = 135^o.$$

Vậy $\widehat{DAE} = 45^o$.

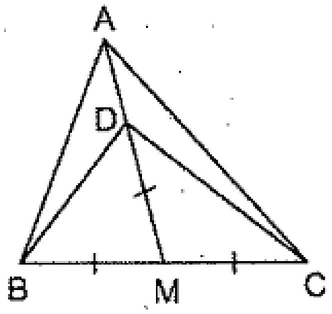
42. a) (h.88) Đặt $\widehat{BAC} = \widehat{A}$.

Ta có $\widehat{B} = \widehat{A}_1, \widehat{C} = \widehat{A}_2$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}$.

Do $\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{A} = 180^o$ nên $\widehat{A} = 90^o$.



Hình 88



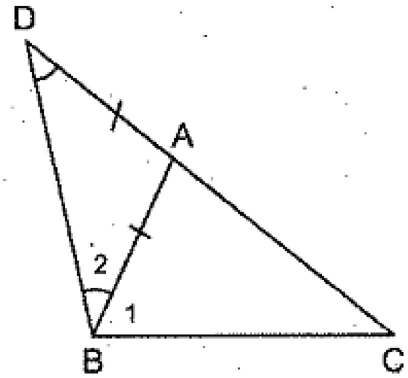
Hình 89

b) (h.89) Trên tia MA lấy D sao cho $MD = \frac{BC}{2}$ thì D nằm giữa M và A. Ta có

$\widehat{BAM} < \widehat{BDM}$, $\widehat{CAM} < \widehat{CDM}$ nên $\widehat{BAC} < \widehat{BDC} = 90^o$.

c) Chứng minh tương tự câu b.

43. (h.90) Đặt $\widehat{BAC} = \widehat{A}$



Hình 90

Cách 1. Ta có $\widehat{B}_2 = \widehat{D} = \frac{\widehat{A}}{2}$ nên

$$\widehat{CBD} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = \widehat{B}_1 + \frac{\widehat{A}}{2}$$

$$= \frac{2\widehat{B}_1 + \widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{B}_1 + (\widehat{C} + \alpha) + \widehat{A}}{2}$$

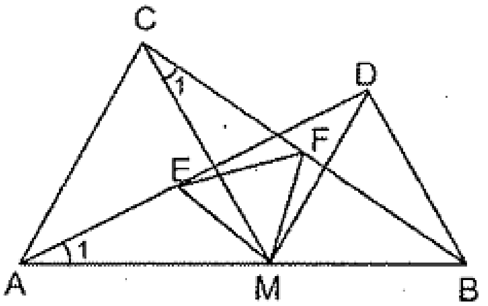
$$= \frac{(\widehat{A} + \widehat{B}_1 + \widehat{C}) + \alpha}{2} = \frac{180^o + \alpha}{2} = 90^o + \frac{\alpha}{2}.$$

Cách 2. Ta có $\widehat{CBD} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = \widehat{B}_1 + \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{B}_1 + \left(90^o - \frac{\widehat{B}_1}{2} - \frac{\widehat{C}}{2}\right)$

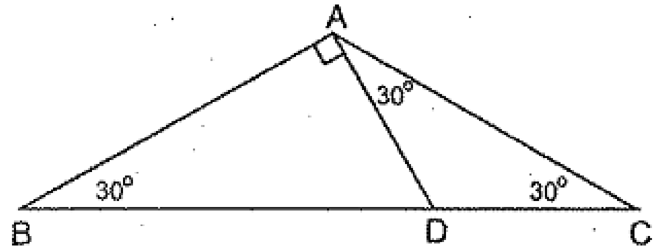
$$= 90^o + \frac{\widehat{B}_1 - \widehat{C}}{2} = 90^o + \frac{\alpha}{2}.$$

44. (h.91)

Ta có $\Delta AMD = \Delta CMB$ (c.g.c) nên $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$, $AD = CB$, $AE = CF$. Ta có $\Delta MAE = \Delta MCF$ (c.g.c) nên $ME = MF$ và $\widehat{AME} = \widehat{CMF}$, do đó $\widehat{EMF} = 60^o$. Tam giác cân MEF có góc 60^o nên là tam giác đều.



Hình 91



Hình 92

45. (h.92) Chú ý rằng ΔABD vuông có $\widehat{B} = 30^o$ nên $AD = \frac{1}{2}BD$ (ví dụ 10a).

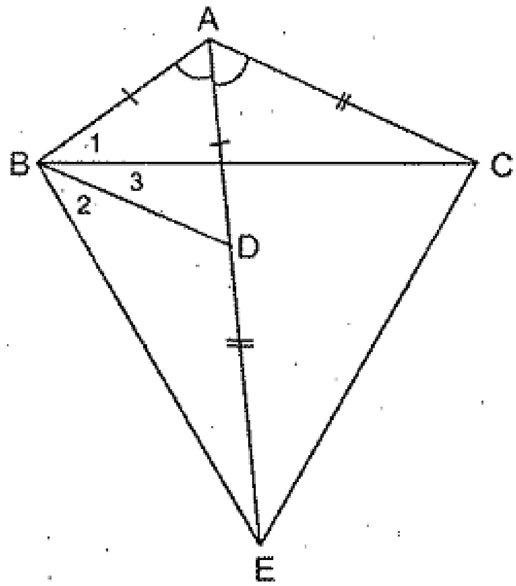
Đáp số : BD = 4cm.

46. (h.93) Sử dụng giả thiết $AE = AB + AC$, trên tia AE ta lấy $AD = AB$ thì $DE = AC$.

ΔABD cân có $\widehat{BAD} = 60^o$ nên là tam giác đều, suy ra $AD = DB$.

$\Delta DBE = \Delta ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ và $BE = BC$. Ta lại có $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_3 = 60^o$ nên $\widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 60^o$.

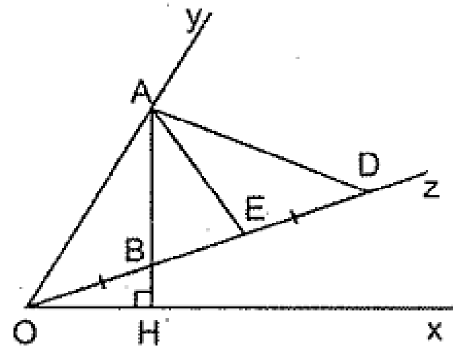
ΔBCE cân ở B có $\widehat{CBE} = 60^o$ nên là tam giác đều.



Hình 93

47. (h.94)

Để chứng minh $AO = AD$, ta xét chúng là cặp cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau. Để tạo ra tam giác bằng ΔAOB, trên tia DB ta lấy $DE = OB$. Ta sẽ chứng minh $\Delta AOB = \Delta ADE$.



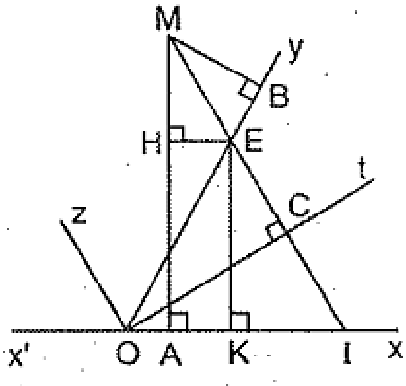
Hình 94

Chú ý rằng $OA = BD = BE + ED = BE + OB = OE$ nên ΔAOE cân. Đặt $\widehat{BOH} = \alpha$ thì $\widehat{AOE} = 2\alpha$. Do ΔAOE cân tại O nên $\widehat{AEB} = 90^o - \alpha$. Mặt khác $\widehat{ABE} = \widehat{OBH} = 90^o - \alpha$. Do đó $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$, suy ra AE = AB, $\widehat{AED} = \widehat{ABO}$. Ta có $\Delta AOB = \Delta ADE$ (c.g.c) suy ra AO = AD. Vậy ΔAOD cân.

48. (h.95)

Gọi E, I là giao điểm của MC với Oy, Ox, ta có ΔEOI đều. Vẽ $EH \perp MA$, $EK \perp OI$. Dễ dàng chứng minh được MH = MB, EK = OC nên

$$MA - MB = MA - MH = HA = EK = OC.$$



Hình 95

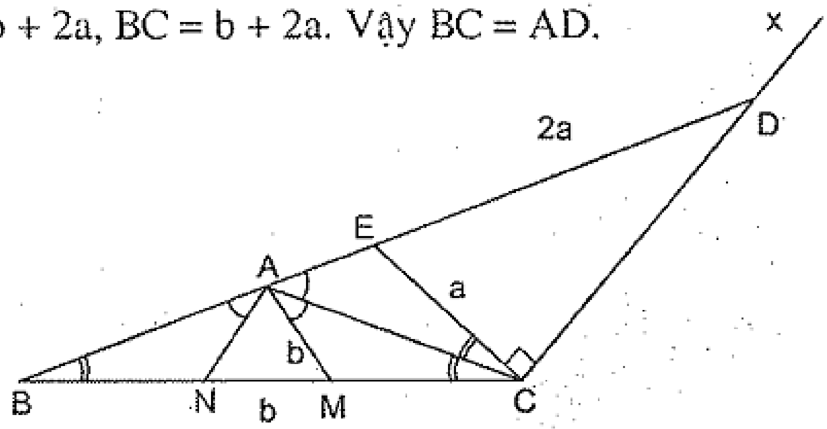
Chú ý : Gọi Ox' là tia đối của tia Ox. Nếu M nằm trong góc đối đỉnh với góc yOz ta cũng có kết quả trên. Nếu M nằm trong góc zOx' hoặc góc đối đỉnh với nó thì MB – MA = OC. Nếu M nằm trong góc xOy hoặc góc đối đỉnh với nó thì MA + MB = OC.

49. (h.96) Kẻ $CE \perp CD$. Đặt CE = a thì ED = 2a. Trên BC lấy M, N sao cho $\widehat{BAN} = 40^o$, $\widehat{CAM} = 40^o$. Ta có $\widehat{MAN} = 60^o$, $\widehat{CAE} = 40^o$.

$$\Delta NAB = \Delta MAC = \Delta EAC \text{ (g.c.g) nên } NB = MC = EC = a.$$

Tam giác MAN đều. Đặt AM = MN = b thì AE = b.

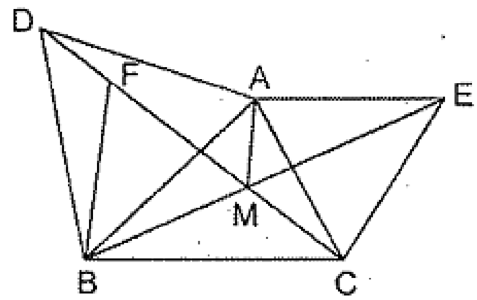
Do đó AD = b + 2a, BC = b + 2a. Vậy BC = AD.



Hình 96

50. (h.97)

a) Ta có $\Delta ABE = \Delta ADC$ (c.g.c) nên $\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$ suy ra $\widehat{BMD} = \widehat{BAD} = 60^o$, do đó $\widehat{BMC} = 120^o$.



Hình 97

b) Trên tia MD lấy MF = MB thì ΔMBF đều, $\widehat{MBF} = 60^o$. Ta thấy F nằm giữa M và D (xem chú ý ở dưới), $\Delta MBA = \Delta FBD$ (c.g.c) suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{DFB} = 120^o$.

Chú ý :

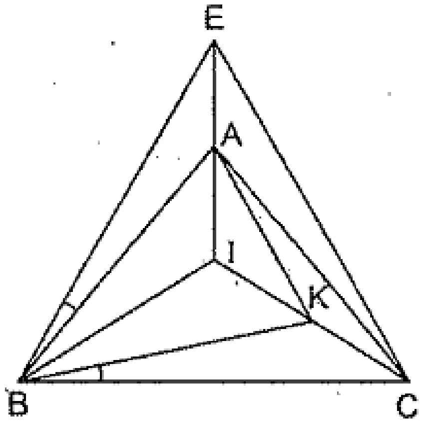
1. Do các góc của ΔABC nhỏ hơn 120^o nên tia BE nằm giữa hai tia BA và BC, tia CD nằm giữa hai tia CA và CB, do đó M nằm trong ΔABC.

2. Do tia BE nằm giữa hai tia BA, BC và $\widehat{MBF} = 60^o$; $\widehat{ABD} = 60^o$ nên F nằm giữa M và D.

3. Bài toán này cho ta cách dựng điểm M trong ΔABC (có các góc nhỏ hơn 120^o) sao cho $\widehat{BMC} = \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$.

51. (h.98) Ta sẽ chứng minh rằng BA và BK là cặp cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau.

Cách 1. Chú ý rằng $\widehat{ABC} = 50^o$, $\widehat{KBC} = 10^o$, mà $50^o + 10^o = 60^o$ là góc của tam giác đều. Ta vẽ ΔEBC đều "trùm lên" ΔABC (tức là E và A cùng phía đối với BC) thì $\widehat{ABE} = 60^o - 50^o = 10^o$.



Hình 98

$\Delta BAE = \Delta CAE$ (c.c.c) nên $\widehat{BEA} = 30^o$. Do đó $\Delta BAE = \Delta BKC$ (g.c.g), suy ra BA = BK.

Vậy ΔABK cân và $\widehat{BAK} = 70^o$.

Cách 2. Vẽ tia phân giác của góc ABK, cắt đường thẳng CK ở I thì ΔIBC cân, IB = IC.

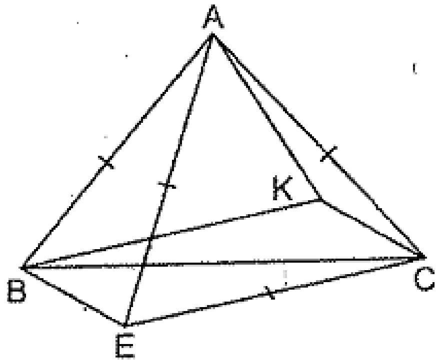
$$\Delta BIA = \Delta CIA \text{ (c.c.c) nên } \widehat{BIA} = \widehat{CIA} = 120^o.$$

Do đó $\Delta BIA = \Delta BIK$ (g.c.g), suy ra BA = BK và $\widehat{BAK} = 70^o$.

Cách 3. (h.99) Vẽ tam giác đều ACE (E và B cùng phía đối với AC) thì $\widehat{BCE} = 10^o$.

ΔABE cân ở A có $\widehat{BAE} = 20^o$ nên $\widehat{ABE} = 80^o$, do đó $\widehat{CBE} = 30^o$.

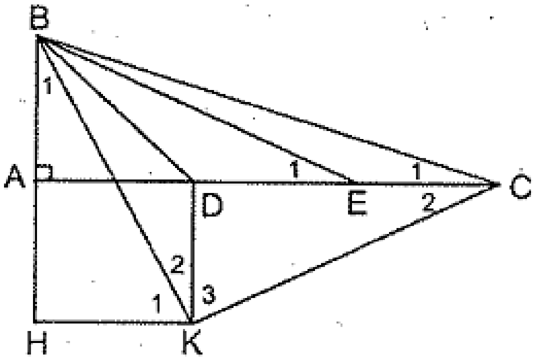
$\Delta KBC = \Delta ECB$ (g.c.g) nên BK = CE. Do đó BK = BA và $\widehat{BAK} = 70^o$.



Hình 99

52. (h.100) Để chứng minh $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 45^o$, ta tạo ra một góc kề với góc ACB, bằng góc AEB rồi chứng minh tổng của góc đó với góc ACB bằng 45^o.

Trên tia đối của tia AB, lấy điểm H sao cho AH = AB. Qua H vẽ đường thẳng song song với AD, qua D vẽ đường thẳng song song với AH, chúng cắt nhau ở K. Ta sẽ chứng minh rằng $\widehat{BCK} = 45^o$ bằng cách chứng minh ΔBCK vuông cân.

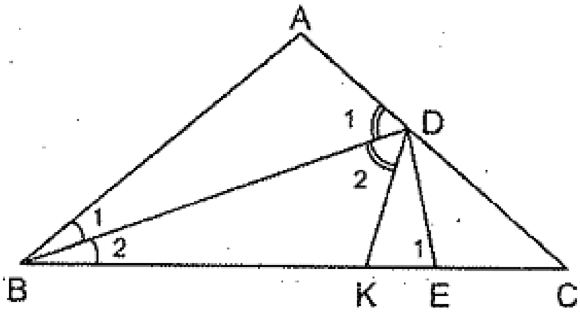


Hình 100

Ta có ΔHBK = ΔDCK (c.g.c) nên KB = KC, $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_3$. Ta lại có $\widehat{K}_2 = \widehat{B}_1$ nên $\widehat{K}_2 + \widehat{K}_3 = \widehat{B}_1 + \widehat{K}_1 = 90^o$. Do ΔBKC vuông cân tại K nên $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 45^o$. Nhưng $\widehat{C}_2 = \widehat{E}_1$ do ΔAEB = ΔDCK (c.g.c) nên $\widehat{C}_1 + \widehat{E}_1 = 45^o$.

53. (h.101)

$\widehat{D}_1 = \widehat{B}_2 + \widehat{C} = 20^o + 40^o = 60^o$.



Hình 101

Trên cạnh BC lấy các điểm K và E sao cho $\widehat{BDK} = 60^o$, $\widehat{BDE} = 80^o$.

ΔBDA = ΔBDK (g.c.g) ⇒ DA = DK (1)

ΔBDE có $\widehat{BDE} = 80^o$, $\widehat{B}_2 = 20^o$ nên $\widehat{E}_1 = 80^o$. Ta lại có

$$\widehat{DKE} = \widehat{D}_2 + \widehat{B}_2 = 60^o + 20^o = 80^o$$

nên ΔDKE cân tại D, suy ra

$$DK = DE \qquad (2)$$

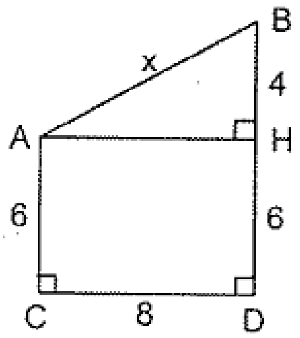
$$\widehat{EDC} = 180^o - \widehat{D}_1 - \widehat{BDE} = 180^o - 60^o - 80^o = 40^o = \widehat{C}$$

$$\Rightarrow \Delta\ DEC \text{ cân tại } E \Rightarrow DE = EC. \qquad (3)$$

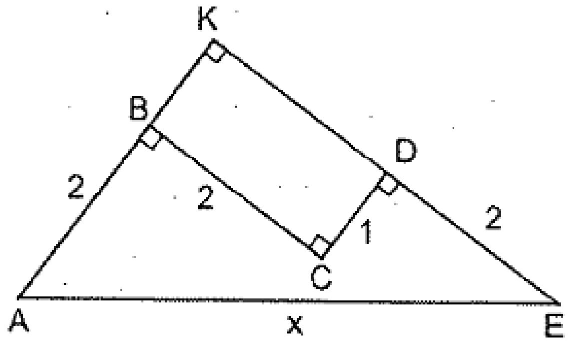
Từ (1), (2), (3) suy ra AD = EC. Do đó BC = BE + EC = BD + AD.

§10. Định lí Py-ta-go

54. a) (h.102) Kẻ AH ⊥ BD. *Đáp số :* $x = \sqrt{80} \approx 8,9$.



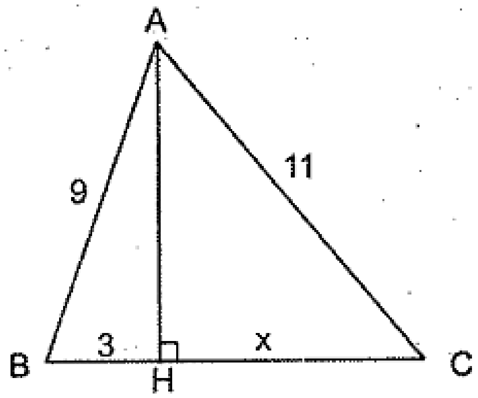
Hình 102



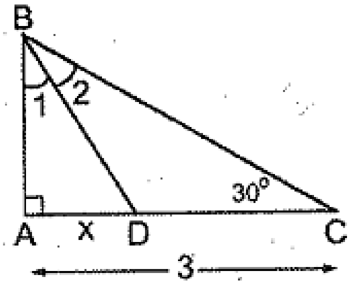
Hình 103

b) (h.103) Gọi K là giao điểm của AB và DE. *Đáp số :* $x = 5$.

c) (h.104) Ta tính được $AH^2 = 72$, do đó $HC^2 = 49$. Vậy $x = 7$.



Hình 104



Hình 105

d) (h.105) ΔABD vuông có $\widehat{B}_1 = 30^o$ nên $BD = 2AD = 2x$ (xem ví dụ 10).

ΔBDC có $\widehat{B}_2 = \widehat{C}$ nên là tam giác cân tại D, do đó $DC = BD = 2x$.

Như vậy $AD + DC = x + 2x \Rightarrow AC = 3x$.

Do $AC = 3$ nên $x = 1$.

Chú ý : Ta còn có $BD = 2$, $DC = 2$.

Áp dụng định lí Py-ta-go trong ΔABD :

$$AB^2 = BD^2 - AD^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \text{ nên } AB = \sqrt{3}.$$

55. Ta có $\dfrac{AB}{5} = \dfrac{AC}{12}$ suy ra $\dfrac{AB^2}{25} = \dfrac{AC^2}{144} = \dfrac{AB^2 + AC^2}{25 + 144} = \dfrac{BC^2}{169} = \dfrac{26^2}{169} = 4$.

Vì vậy $\dfrac{AB}{5} = \dfrac{AC}{12} = 2$.

Do đó $AB = 10cm$, $AC = 24cm$.

56. a) Qua E, kẻ $IK \perp BC$ (h.106). Dễ chứng minh $BK = AI$, $KC = ID$. Ta có :

$$EC^2 = EK^2 + KC^2 \qquad (1)$$

$$EK^2 = EB^2 - BK^2 = 16 - AI^2 \qquad (2)$$

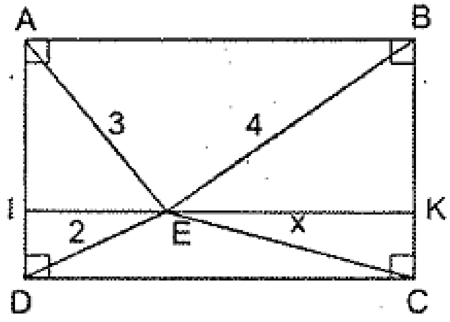
$$KC^2 = ID^2 = ED^2 - EI^2 = 4 - EI^2. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

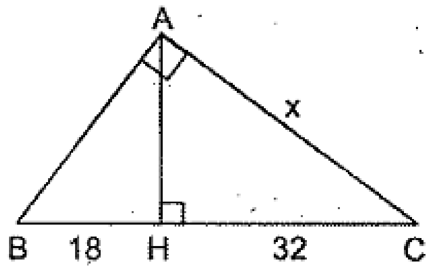
$$EC^2 = (16 - AI^2) + (4 - EI^2) = 20 - (AI^2 + EI^2). \qquad (4)$$

Ta lại có : $$AI^2 + EI^2 = AE^2 = 9. \qquad (5)$$

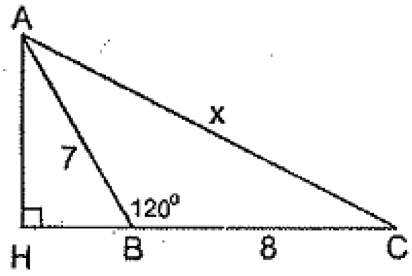
Từ (4) và (5) suy ra : $EC^2 = 20 - 9 = 11$. Vậy $EC = \sqrt{11}$.



Hình 106



Hình 107



Hình 108

b) (h.107) $AC^2 - AB^2 = HC^2 - HB^2 = 32^2 - 18^2 = 1024 - 324 = 700$.

$$AC^2 + AB^2 = BC^2 = (18 + 32)^2 = 2500.$$

Từ đó : $AC^2 = 1600$ nên $x = 40$.

c) (h.108) Kẻ $AH \perp BC$, ta có : $HB = 3,5$.

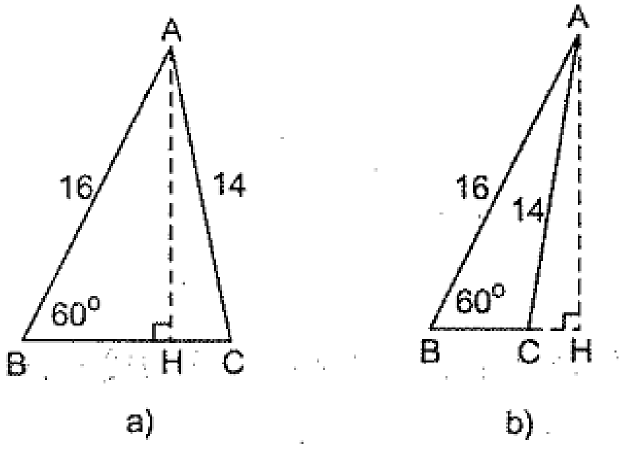
$$AH^2 = 49 - 12,25 = 36,75.$$

$$x^2 = 36,75 + 11,5^2 = 169 \Rightarrow x = 13.$$

57. (h.109) $BH = 8$

$$AH^2 = 16^2 - 8^2 = 256 - 64 = 192.$$

$$HC^2 = 14^2 - 192 = 4 \Rightarrow HC = 2.$$



Hình 109

Có hai trường hợp :

– Nếu $\widehat{C} < 90^o$ thì $BC = 8 + 2 = 10$ (cm) (h.109a).

– Nếu $\widehat{C} > 90^o$ thì $BC = 8 - 2 = 6$(cm) (h.109b).

Vậy câu trả lời D là đúng.

58. (h.110) Vẽ ΔBIC vuông cân có đáy BC (I và A cùng phía đối với BC). Ta có

$$\widehat{CBI} = 45^o,\ \widehat{IBD} = 15^o,\ \widehat{DBA} = 15^o.$$

$\Delta IAB = \Delta IAC$ (c.c.c) nên $\widehat{IAB} = \widehat{IAC} = 15^o$.

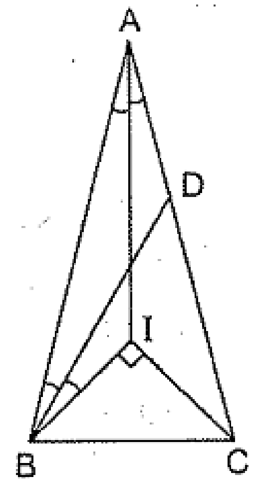
$\Delta IAB = \Delta DBA$ (g.c.g) nên $IB = AD$.

Xét ΔBIC vuông cân, ta có

$$BI^2 + IC^2 = BC^2 = 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow 2BI^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad BI = \sqrt{2}\ \text{(cm)}.$$



Hình 110

Do đó $AD = \sqrt{2}$ cm.

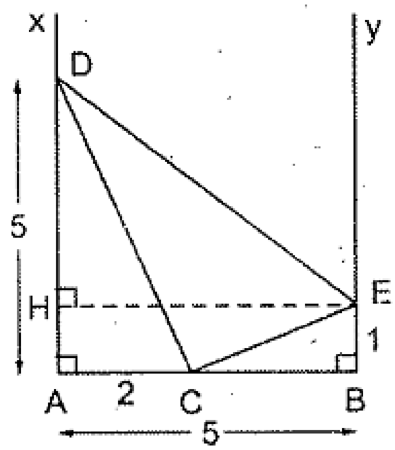
59. Các bộ ba số là ba cạnh của một tam giác vuông là :

5, 12, 13 ; 9, 12, 15 ; 12, 16, 20.

60. (h.111) Tính $CD^2 = 29$, $EC^2 = 10$. Kẻ $EH \perp AD$. Ta có

$$DE^2 = DH^2 + EH^2 = 4^2 + 5^2 = 41.$$

Ta thấy $DE^2 \neq CD^2 + EC^2$ nên $\widehat{DCE} \neq 90^o$.



Hình 111

§11. Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông

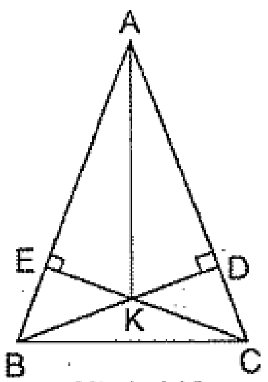
61. (h.112)

$\Delta ABD = \Delta ACE$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra

$$AD = AE.$$

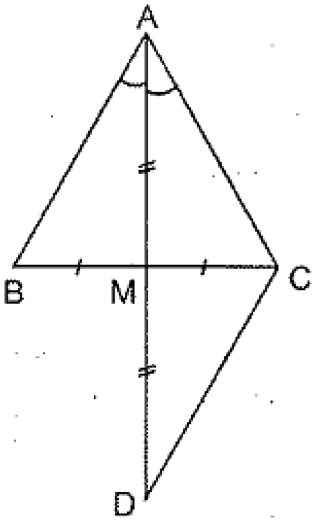
$\Delta ADK = \Delta AEK$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) suy ra

$$\widehat{DAK} = \widehat{EAK}.$$

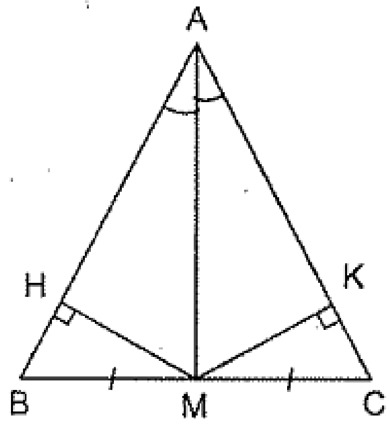


Hình 112

62. *Cách 1.* (h.113) Trên tia đối của tia MA lấy D sao cho MD = MA, sau đó chứng minh rằng ΔACD có hai góc bằng nhau.



Hình 113



Hình 114

Cách 2. (h.114) Kẻ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$ rồi chứng minh rằng MH = MK và $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Cách 3. Chứng minh bằng phản chứng.

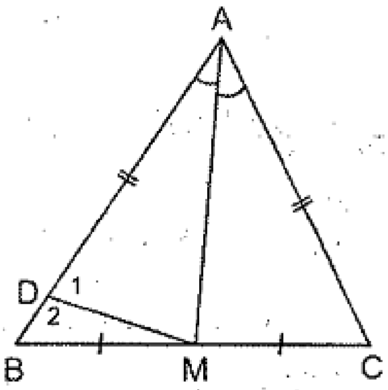
Giả sử AB > AC (h.115)

Trên cạnh AB lấy D sao cho AD = AC. Ta có $\Delta AMD = \Delta AMC$ (c.g.c), suy ra

$$\widehat{D_1} = \widehat{C} \qquad (1)$$

MD = MC. Ta lại có MB = MC nên MB = MD. Do đó ΔMBD cân tại M, suy ra

$$\widehat{B} = \widehat{D_2} \qquad (2)$$



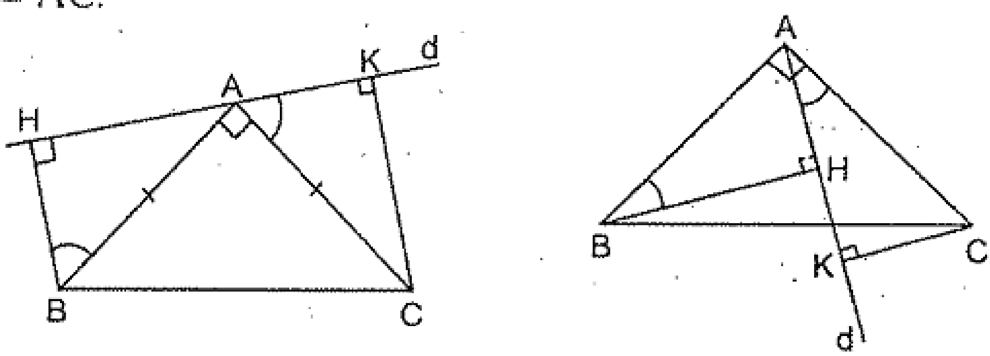
Hình 115

Từ (1) và (2) ta có : $\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 180^o$, vô lí.

Giả sử AB < AC. Cũng chứng minh tương tự dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy AB = AC.

63. (h.116)



Hình 116

$$\widehat{ABH} = \widehat{CAK} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BAH}\text{)}.$$

$\Delta ABH = \Delta CAK$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra BH = AK.

Do đó $$BH^2 + CK^2 = AK^2 + CK^2 \quad (1)$$

Xét tam giác vuông ACK, theo định lí Py-ta-go :

$$AK^2 + CK^2 = AC^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BH^2 + CK^2 = AC^2$ (hằng số).

Vậy $BH^2 + CK^2$ có giá trị không đổi.

64. (h.117)

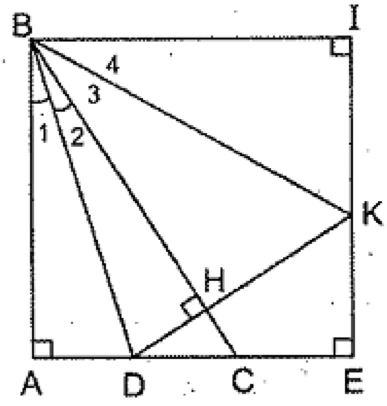
a) $\Delta ABD = \Delta HBD$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow$ $BA = BH$.

b) Qua B, kẻ đường vuông góc với EK, cắt EK tại I.

Ta có $\widehat{ABI} = 90^\circ$.

Hãy chứng minh rằng $\widehat{B}_3 = \widehat{B}_4$ bằng cách chứng minh $\Delta HBK = \Delta IBK$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

Từ đó suy ra $\widehat{DBK} = 45^\circ$.



Hình 117

Mệnh đề thuận, đảo, phản, phản đảo

65. Cho ΔABC (h.118)

Bài toán thuận : $AB = AC$, $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \Rightarrow BC \,//\, AE$.

Mệnh đề đảo 1 (sai) :

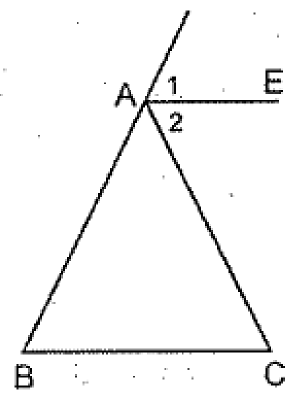
$$BC \,//\, AE \Rightarrow AB = AC,\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2.$$

Mệnh đề đảo 2 (đúng) :

$$AB = AC,\ BC \,//\, AE \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2.$$

Mệnh đề đảo 3 (đúng) :

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2,\ BC \,//\, AE \Rightarrow AB = AC.$$



Hình 118

Bạn đọc tự chứng minh bài toán thuận và các mệnh đề đảo đúng.

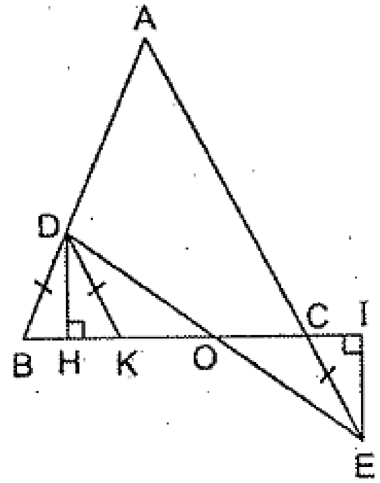
66. Bạn đọc tự chứng minh bài toán thuận.

Bài toán đảo : Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho CE = BD. Gọi O là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng nếu OD = OE thì tam giác ABC cân tại A.

Chứng minh bài toán đảo (h.119) :

Cách 1

Qua D vẽ DK // CE. Ta có : $\Delta OKD = \Delta OCE$ (g.c.g) nên KD = CE. Do đó KD = BD. Vậy ΔDBK cân tại D, do đó ΔABC cân tại A.

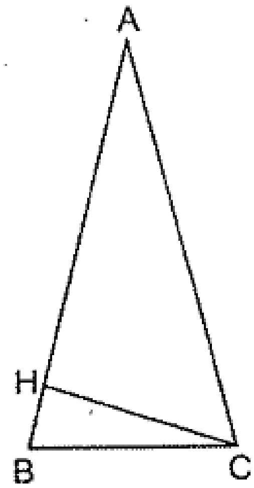


Hình 119

Cách 2

Vẽ DH và EI vuông góc với BC. Ta có $\Delta DHO = \Delta EIO$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra DH = EI, $\Delta DHB = \Delta EIC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) suy ra $\widehat{B} = \widehat{C}$. Vậy ΔABC cân.

67. (h.120)



Hình 120

Bài toán thuận : $AB = AC$, $\widehat{B} = 75^o$, $CH \perp AB$

$$\Rightarrow CH = \frac{AB}{2}.$$

Bài toán đảo 1 : $AB = AC$, $CH \perp AB$, $CH = \dfrac{AB}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{B} = 75^o.$$

Bài toán đảo 2 : $AB = AC$, $\widehat{B} = 75^o$, $CH = \dfrac{AB}{2}$

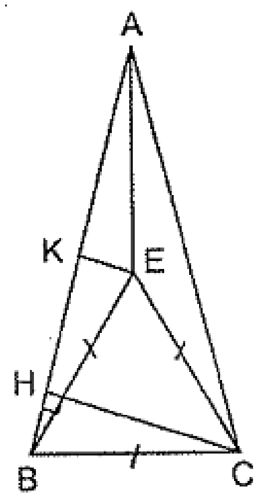
$$\Rightarrow CH \perp AB.$$

Bài toán đảo 3 : $\widehat{B} = 75^o$, $CH \perp AB$, $CH = \dfrac{AB}{2}$

$$\Rightarrow AB = AC.$$

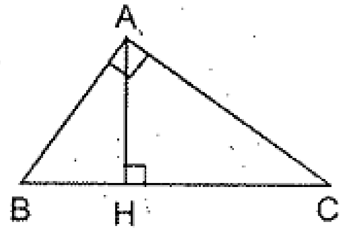
Dễ dàng chứng minh các bài toán thuận, bài toán đảo 1 và 2. Chứng minh bài toán đảo 3 như sau (h.121) :

Vẽ ΔBEC đều (E và A cùng phía đối với BC), ta có $\widehat{EBA} = 15^o$. Gọi K là trung điểm của AB thì $\Delta EBK = \Delta CBH$ (c.g.c), suy ra $\widehat{K} = 90^o$. Bạn đọc tự chứng minh tiếp $\widehat{AEB} = 150^o$, $\widehat{AEC} = 150^o$, AB = AC.



Hình 121

Đặc biệt hoá

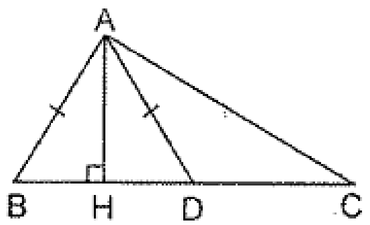


Hình 122

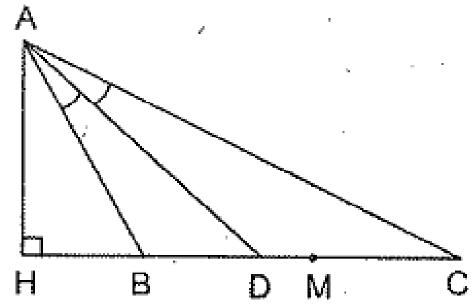
68. Vẽ ΔABC vuông ở A, kẻ AH vuông góc với BC (h.122). ΔABC và ΔABH có AB chung, $\widehat{BAC} = \widehat{BHA}$, $\widehat{ABC} = \widehat{ABH}$ nhưng chúng không bằng nhau.

69. Vẽ ΔABC vuông ở A, $AB \neq AC$, kẻ AH vuông góc với AB (h.122). ΔAHB và ΔCHA thoả mãn các điều kiện của giả thiết nhưng chúng không bằng nhau.

70. (h.123) Vẽ ΔABD cân ở A. Trên tia đối của tia DB lấy điểm C bất kì, ΔABC và ΔADC thoả mãn điều kiện của bài toán nhưng chúng không bằng nhau.



Hình 123



Hình 124

71. Cách giải đúng với trường hợp $\widehat{B} < 90^o$, nhưng nếu $\widehat{B} > 90^o$ thì các quan hệ

$$\widehat{B} = 90^o - \widehat{BAH}, \qquad \widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{HAC} - \widehat{BAH},$$

$$\widehat{DAH} = \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{BAH}, \qquad \widehat{DAH} = \frac{\widehat{HAC} - \widehat{BAH}}{2}$$

đều không đúng (xem h.124).

Cách giải đúng : Đặt $\widehat{BAC} = \widehat{B}$.

Cách 1. (chung cho các trường hợp $\widehat{B} < 90^o$, $\widehat{B} > 90^o$, $\widehat{B} = 90^o$). Trong cả ba trường hợp ta đều có H thuộc tia DB vì $AB < AC$.

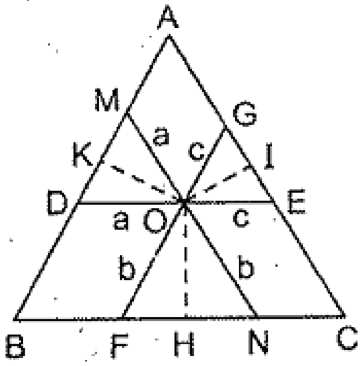
$$\widehat{ADH} = \widehat{C} + \frac{\widehat{A}}{2}, \quad \widehat{DAH} = 90^o - \widehat{ADH}$$

$$\widehat{DAH} = \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right) - \left(\widehat{C} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2}.$$

Cách 2. Xem bài 17.

Cách 3. Xét riêng các trường hợp $\widehat{B} < 90^o$, $\widehat{B} > 90^o$, $\widehat{B} = 90^o$.

72. Đặc biệt hoá bài toán khi O là giao điểm của các đường trung trực của AB và AC, khi đó AK + BH + CI bằng nửa chu vi ΔABC. Ta sẽ chứng minh điều này cũng đúng khi O là điểm bất kì nằm trong ΔABC. Qua O vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của ΔABC (h.125). Các tam giác ODM, OFN, OEG là tam giác đều. Gọi độ dài các cạnh của chúng theo thứ tự là a, b, c thì a + b + c = BC. Ta có



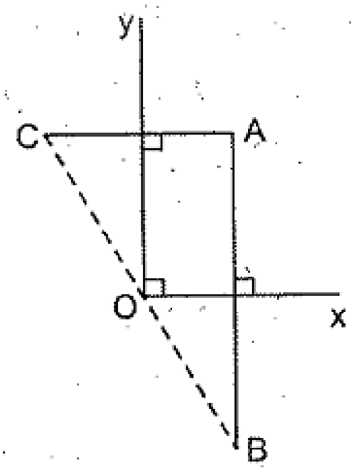
Hình 125

$$AK + BH + CI = (AM + MK) + (BF + FH) + (CE + EI)$$

$$= \left(c+\frac{a}{2}\right)+\left(a+\frac{b}{2}\right)+\left(b+\frac{c}{2}\right)=\frac{3}{2}\,(a+b+c)=$$

$$=\frac{3}{2}BC=\frac{1}{2}\text{ chu vi }\Delta ABC.$$

73. Cho A là điểm nằm trong góc vuông xOy. Vẽ các điểm B và C sao cho Ox là đường trung trực của AB, Oy là đường trung trực của AC. Chứng minh rằng O là trung điểm của BC. (h.126).



Hình 126

Tổng quát hoá

74. Thay điều kiện "M là trung điểm của BC" bởi "M là điểm nằm trên cạnh BC", bài toán vẫn đúng.

75. Bỏ điều kiện $\widehat{A} = 90^\circ$. *Giải* : Xem bài 39.

76. Thay điều kiện "$\widehat{BAC} = \widehat{CDE} = 90^\circ$" bởi "$\widehat{BAC} = \widehat{CDE} = \alpha$".

Giải :

Cách 1. (h.127) Do $\widehat{BAC} = \widehat{CDE}$ nên

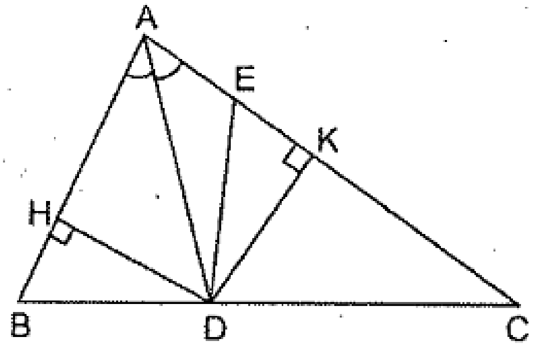
$$\widehat{BAC} + \widehat{BDE} = 180^\circ. \qquad (1)$$

Vẽ $DH \perp AB$, $DK \perp AC$ thì

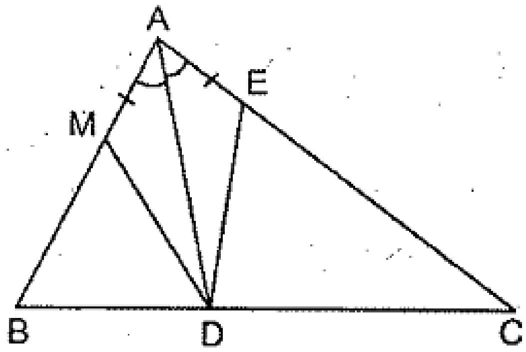
$$\widehat{BAC} + \widehat{HDK} = 180^\circ. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BDE} = \widehat{HDK}$, từ đó $\widehat{BDH} = \widehat{EDK}$. Ta lại có DH = DK.

Do đó $\Delta BDH = \Delta EDK$ (g.c.g) suy ra $DB = DE$.



Hình 127



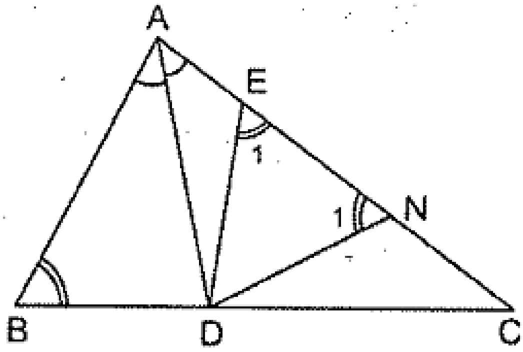
Hình 128

Cách 2. (h.128) Lấy M trên AB sao cho $AM = AE$. Ta có $\Delta AMD = \Delta AED$ (c.g.c) nên $\widehat{AMD} = \widehat{AED}$, $DM = DE$. Ta cũng có $\widehat{B} = \widehat{DEC}$, từ đó ΔDBM cân tại D. Suy ra $DM = DB$. Vậy $DB = DE$.

Cách 3. (h.129) Lấy N trên AC sao cho

$$AN = AB.$$

Ta có $\Delta DAB = \Delta DAN$ (c.g.c) nên $\widehat{B} = \widehat{N}_1$, $DB = DN$. Ta cũng có $\widehat{B} = \widehat{E}_1$, suy ra $\widehat{N}_1 = \widehat{E}_1$, $DE = DN$. Từ đó $DB = DE$.



Hình 129

Chú ý : Có thể bỏ cả điều kiện $AC > AB$.