ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

Năm học: 2026 - 2027

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Đề thi được sưu tầm từ học sinh nên không tránh khỏi sai sót trong quá trình đánh máy.
Rất mong nhận được sự đóng góp từ bạn đọc.
Đáp án được thực hiện bởi đội ngũ giáo viên – trợ giảng trung tâm STAR Education:

Thầy NGUYỄN VĨNH KHANG – Thầy LÊ ĐÌNH HẢI
– Thầy VÕ HOÀNG PHÚC KHANG – Thầy NGUYỄN PHƯỚC THỊNH
– Thầy TRẦN LÊ GIA HƯNG – Thầy PHẠM MINH TRÍ

Bài 1 (1,5 điểm). Cho hai phương trình phân biệt:

$$x^2 + 2ax + 3b = 0 \ (1) \text{ và } x^2 + 2bx + 3a = 0 \ (2) \ (\text{với } a, b \text{ là tham số}).$$

a) Biết rằng hai phương trình đều có 2 nghiệm phân biệt.
Chứng minh rằng: $\left(a - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{3}{2}\right)^2 > \dfrac{9}{2}$.

b) Giả sử hai phương trình có nghiệm chung. Gọi r, s lần lượt là nghiệm còn lại của (1) và (2). Chứng minh $r + s$ không phụ thuộc vào a, b.

a) Vì cả hai phương trình đều có 2 nghiệm phân biệt nên:

$$\begin{cases} \Delta_1' = a^2 - 3b > 0 \\ \Delta_2' = b^2 - 3a > 0 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế hai bất phương trình, ta được:

$$a^2 - 3b + b^2 - 3a > 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2 - 3a + \frac{9}{4}\right) + \left(b^2 - 3b + \frac{9}{4}\right) > \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{9}{2} \text{ (đpcm).}$$

b) Gọi x_0 là nghiệm chung của (1) và (2), ta có hệ:

$$\begin{cases} x_0^2 + 2ax_0 + 3b = 0 & (3) \\ x_0^2 + 2bx_0 + 3a = 0 & (4) \end{cases}$$

Trừ (3) cho (4) vế theo vế, ta có:

$$2x_0(a-b) - 3(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(2x_0 - 3) = 0$$

Vì 2 phương trình phân biệt nên $a \neq b$, suy ra $2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$.

Thay $x_0 = \frac{3}{2}$ vào (1) thu được: $\frac{9}{4} + 3a + 3b = 0 \Rightarrow a + b = -\frac{3}{4}$.

Theo định lý Viète cho phương trình (1) và phương trình (2):

$$\begin{cases} x_0 \cdot r = 3b \Rightarrow \frac{3}{2}r = 3b \Rightarrow r = 2b \\ x_0 \cdot s = 3a \Rightarrow \frac{3}{2}s = 3a \Rightarrow s = 2a \end{cases}$$

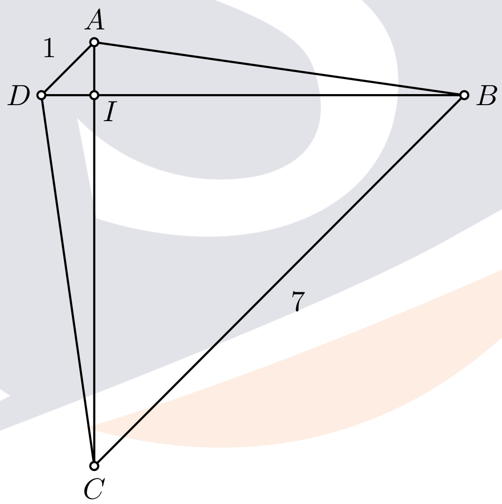
Suy ra: $r + s = 2a + 2b = 2(a+b)$.

Thay $a + b = -\frac{3}{4}$ vào biểu thức, ta được:

$$r + s = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2} \text{ (hằng số)}.$$

Vậy $r + s$ không phụ thuộc vào a và b.

Bài 2 (1,5 điểm). Cho tứ giác lồi $ABCD$ với $BC = 7, AD = 1$ và 2 đường chéo vuông góc với nhau. Tính chu vi tối đa của tứ giác $ABCD$.



Gọi I là giao điểm AC và BD. Theo định lí Pythagoras, ta có

$$AB^2 + CD^2 = IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = BC^2 + AD^2 = 50$$

và chu vi tứ giác $ABCD$ là

$$AB + BC + CD + DA = AB + CD + 8 \leq \sqrt{2(AB^2 + CD^2)} + 8 = 18$$

Dấu bằng xảy ra khi $AB = CD = 5$. Tứ giác với chu vi 18 thỏa mãn yêu cầu có thể dựng được như sau: dựng 2 đoạn $IA \perp ID$ với $IA = ID = \frac{1}{\sqrt{2}}$, rồi lấy B thuộc tia đối ID và C thuộc tia đối IA sao cho $IB = IC = \frac{7}{\sqrt{2}}$. Vậy chu vi tối đa của tứ giác $ABCD$ là 18.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho đa thức $f(n) = (n+4)^4 - n^4$.

a) Chứng minh với mọi n thì $f(n)$ chia hết cho 16

b) Tìm số nguyên dương n thoả mãn $f(n)$ chia hết cho 3.

c) Tìm số tự nhiên n thoả mãn $f(n)$ chia hết cho 24^2.

a) Ta có $f(n) = [(n+4)^2 - n^2] \cdot [(n+4)^2 + n^2] = 16(n+2)(n^2+4n+8)$ chia hết cho 16.

b) Viết lại

$$f(n) = 16(n+2)[n(n+1) + 3n + 8] = 16n(n+1)(n+2) + 48n(n+2) + 128(n+2)$$

Ta có $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3 do là tích 3 số nguyên liên tiếp, nên để $(n+4)^4 - n^4$ chia hết cho 3, ta cần $128(n+2)$ chia hết cho 3, hay $n = 3k+1$ (với $k \geq 0$).

c) Thay $n = 3k+1$ vào $f(n)$, ta có

$$f(n) = 48(k+1)(9k^2 + 18k + 13)$$

Để $f(n)$ chia hết cho 9, ta cần $k+1$ chia hết cho 3, suy ra $k = 3l+2$. Như vậy $n = 9l+7$.

Mặt khác, để $f(n) = 16(n+2)(n^2+4n+8)$ chia hết cho 64 thì $(n+2)(n^2+4n+8)$ phải chia hết cho 4, hay $n^2(n+2)$ chia hết cho 4. Do n và $n+2$ cùng tính chẵn lẻ nên n phải chẵn và ta có được $n^2(n+2)$ luôn chia hết cho 4.

Như vậy với $n = 9l+7$ chẵn ta có $f(n)$ chia hết cho $9 \cdot 64 = 24^2$. Khi đó l lẻ, và ta kết luận n có dạng $9(2m+1)+7 = 18m+16$ (với m là số tự nhiên).

Cách khác: Chú ý rằng $f(n) = 16(n+2)(n^2+4n+8)$. Do đó, để $f(n) \vdots 24^2$ thì

$$(n+2)(n^2+4n+8) \vdots 36.$$

Nhận xét: n^2+4n+8 không chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n.

Thật vậy, ta xét các trường hợp sau:

- $n \equiv 0 \pmod 3$: khi đó ta được $n^2+4n+8 \equiv 2 \pmod 3$.
- $n \equiv 1 \pmod 3$: khi đó ta được $n^2+4n+8 \equiv 1 \pmod 3$.
- $n \equiv 2 \pmod 3$: khi đó ta được $n^2+4n+8 \equiv 2 \pmod 3$.

Vậy nhận xét được chứng minh.

Từ nhận xét, để $(n+2)(n^2+4n+8) \vdots 36$ thì $n+2$ chia hết cho 9 hay $n \equiv 7 \pmod 9$.

Hơn nữa, chú ý rằng $(n+2)(n^2+4n+8)$ chia hết cho 36 nên phải là số chẵn. Do đó n chẵn hay $n \equiv 0 \pmod 2$.

Vậy ta được hệ điều kiện $\begin{cases} n \equiv 0 \pmod 2 \\ n \equiv 7 \pmod 9 \end{cases}$ hay $n \equiv 16 \pmod{18}$.

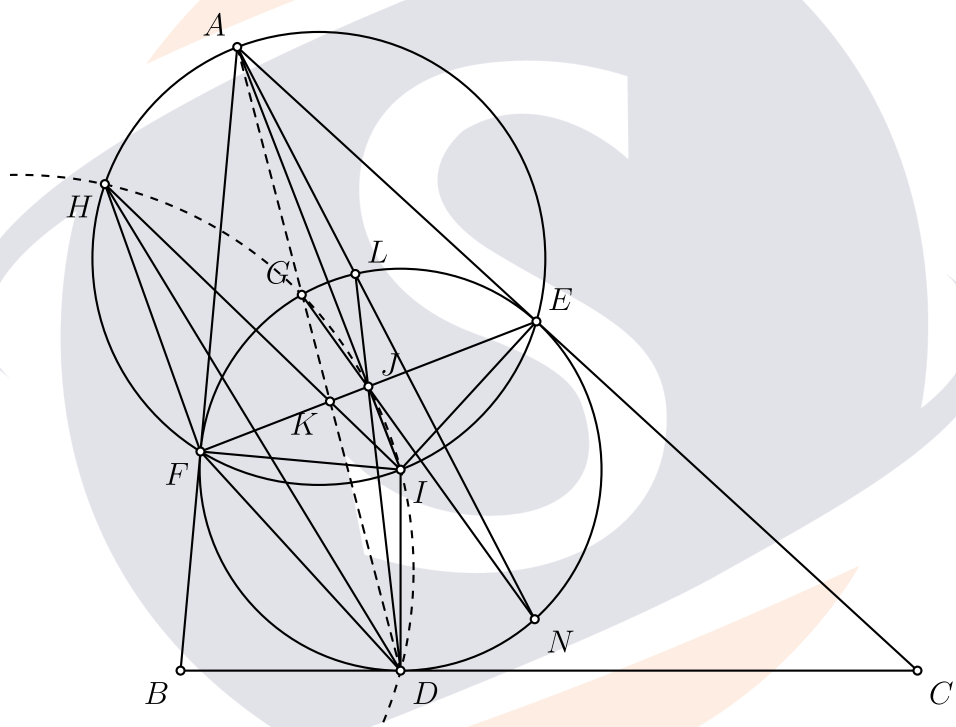
Vậy ta được n có dạng $18k+16$ với k là số tự nhiên.

Bài 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi J là trung điểm của EF và K là giao điểm của AD và EF.

a) Chứng minh $ID^2 = IJ \cdot IA$ và $\triangle IJD \backsim \triangle IDA$.

b) Gọi H là giao điểm của IK và đường tròn đường kính AI ($H \neq I$). Chứng minh $\widehat{IHD} = \widehat{IDK}$ và I, D, J, H cùng thuộc một đường tròn (S).

c) Gọi L và G lần lượt là giao điểm thứ hai của DJ và (S) với (I). Chứng minh A, G, D thẳng hàng và AL, GJ cắt nhau tại một điểm trên (I).



a) Ta có $\triangle AEI$ vuông tại E có đường cao EJ và $ID = IE$ nên $ID^2 = IE^2 = IJ \cdot IA$

Suy ra $\triangle IJD \backsim \triangle IDA$

b) Do 5 điểm A, H, F, I, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AI và I là điểm chính giữa cung EF nên $\widehat{IFK} = \widehat{IEF} = \widehat{IHF}$.

$\implies \triangle IFK \backsim \triangle IHF$ (g-g).

Suy ra $IK \cdot IH = IF^2 = ID^2$.

$\implies \triangle IKD \backsim \triangle IDH$.

Do đó $\widehat{IHD} = \widehat{IDK}$.

Từ $IJ \cdot IA = ID^2 = IK \cdot IH$ ta có tứ giác $AJKH$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{IDJ} = \widehat{IAD} = \widehat{IHJ}$.

Vậy $I,\ D,\ J,\ H$ cùng thuộc một đường tròn (S).

c) Gọi G' là giao điểm của AD và (I) $(G' \neq D)$.

Ta có $\widehat{AFG'} = \widehat{ADF}$ nên $\triangle AFG' \backsim \triangle ADF$

Kết hợp tam giác AEI vuông tại E có đường cao EJ ta được

$$AG' \cdot AD = AE^2 = AJ \cdot AI$$

Suy ra tứ giác $G'JID$ nội tiếp.

Do đó $G \equiv G'$ hay A, G, D thẳng hàng.

Gọi N là giao điểm của AL và (I). $(N \neq L)$

Ta có $JA \cdot JI = JE \cdot JF = JL \cdot JD$ nên tứ giác $ALID$ nội tiếp.

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } \widehat{DGN} &= \widehat{DLN} \text{ (tứ giác } GLND \text{ nội tiếp)}\\ &= 180^\circ - \widehat{ALD}\\ &= 180^\circ - \widehat{AID} \text{ (tứ giác } ALID \text{ nôi tiếp)}\\ &= \widehat{DGJ} \text{ (tứ giác } GJID \text{ nội tiếp).}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow G, J, N$ thẳng hàng.

Vậy AL, GJ cắt nhau tại một điểm nằm trên (I).

Bài 5 (2,0 điểm). Cho bảng 3×3 như hình bên:

Một số nguyên dương n được gọi là "số tốt" khi ta có thể điền 9 số nguyên dương phân biệt sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều bằng nhau và bằng n.

a) Chỉ ra một cách điền với 9 số $1; 2; 3; \ldots; 9$ thỏa mãn tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột và đường chéo bằng nhau.

b) Chứng minh nếu $n \geq 15$ và n chia hết cho 3 thì n là số tốt.

c) Chứng minh nếu n là số tốt thì $n \geq 15$ và n chia hết cho 3.

a) Xét cách điền số sau:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Rõ ràng tổng các số trên các hàng, các cột và đường chéo bằng nhau và bằng 15.

b) Xét $n \geq 15$ bất kì. Đặt $n = 15 + 3k$ với k nguyên không âm. Xét cách điền số sau:

$4+k$	$3+k$	$8+k$
$9+k$	$5+k$	$1+k$
$2+k$	$7+k$	$6+k$

Khi đó, tổng các số trên các hàng, các cột và đường chéo đều bằng nhau và bằng $15+3k=n$. Vậy mọi số $n \geq 15$ và chia hết cho 3 đều là số tốt.

c) Do trong bảng có 9 số nguyên dương phân biệt nên tổng tất cả các số trên bảng đạt giá trị nhỏ nhất bằng

$$1+2+3+\ldots+9=45.$$

Xét trên 3 hàng của bảng, tổng các số trên mỗi hàng trong ba hàng này bằng nhau và tổng tất cả các số bằng 45 nên tổng các số trên mỗi hàng bằng $\dfrac{45}{3}=15$. Vậy $n \geq 15$.

Xét các số ghi trên bảng như sau:

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Do n là số tốt nên ta có

$$\begin{aligned} a_1+a_5+a_9&=n,\\ a_2+a_5+a_8&=n,\\ a_3+a_5+a_7&=n,\\ a_4+a_5+a_6&=n. \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế, ta được

$$\begin{aligned} &(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9)+3a_5=4n\\ \Leftrightarrow\ &3n+3a_5=4n\\ \Leftrightarrow\ &3a_5=n. \end{aligned}$$

Vậy n chia hết cho 3.

— **HẾT** —