

<b>PHẦN 1</b>	<b>Đại số</b>	<b>4</b>
<b>CHƯƠNG 1</b>	<b>Mệnh đề - Tập hợp - Ánh xạ</b>	<b>5</b>
1	Mệnh đề - Mệnh đề chứa biến	5
2	Tập hợp - Tập số thực	14
3	Ánh xạ	23
<b>CHƯƠNG 2</b>	<b>Hàm số</b>	<b>28</b>
1	Đại cương hàm số	28
2	Hàm số bậc hai	42
<b>CHƯƠNG 3</b>	<b>Phương trình-Bất phương trình</b>	<b>46</b>
1	Bất phương trình bậc nhất hai ẩn	46
2	Hệ bất phương trình bậc nhất và ứng dụng	50
3	Hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn	57
4	Dấu của tam thức bậc hai	68
5	Bất phương trình bậc nhất và bậc hai	73
6	Bất phương trình tích-chứa ẩn ở mẫu	77
7	Giải phương trình bằng phương pháp lũy thừa	79
8	Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ	86
9	Phương pháp nhân lượng liên hợp	97
<b>CHƯƠNG 4</b>	<b>Tổ hợp - Xác suất</b>	<b>100</b>
1	Quy tắc cộng - Quy tắc nhân	100
2	Chỉnh hợp - Hoán vị - Tổ hợp	104
3	Nhị thức Newton	109

4	Biến cố và xác suất của biến cố .....	114
5	Các quy tắc tính xác suất .....	117
<b>PHẦN 2 Hình học .....</b>		<b>126</b>
<b>CHƯƠNG 5 Hệ thức lượng trong tam giác .....</b>		<b>127</b>
1	Tỉ số lượng giác của một góc $\alpha$ với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ .....	127
2	Hệ thức lượng trong tam giác .....	131
<b>CHƯƠNG 6 Vectơ .....</b>		<b>139</b>
1	Vectơ và các phép toán .....	139
2	Sự biểu diễn vectơ .....	144
3	Tâm tỉ cự của một hệ điểm .....	150
4	Tích vô hướng của hai vectơ .....	155
5	Bài tập ôn tập chương .....	164
<b>CHƯƠNG 7 Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng .....</b>		<b>165</b>
1	Biểu thức tọa độ của vectơ .....	165
2	Phương trình đường thẳng .....	171
3	Góc và khoảng cách .....	176
4	Phương trình đường tròn .....	179
5	Các đường Conic .....	186
<b>CHƯƠNG 8 Lượng giác .....</b>		<b>199</b>
1	Góc lượng giác. Tỉ số lượng giác của một góc. Cung liên kết .....	199
2	Công thức cộng - Công thức nhân .....	203
3	Công thức biến đổi .....	208
<b>PHẦN 3 Chuyên đề .....</b>		<b>214</b>
<b>CHƯƠNG 9 Phương Pháp và kĩ thuật chứng minh .....</b>		<b>215</b>

1	Suy luận phản chứng .....	215
2	Suy luận quy nạp .....	218
3	Nguyên lý Cực hạn .....	227
4	Bất biến và đơn biến .....	229
5	Ôn tập .....	232

PHẦN



---

ĐẠI SỐ

# CHƯƠNG

## 1



## MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP - ÁNH XẠ

---

---

### §1. MỆNH ĐỀ - MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN



#### LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 1.1.** Một **Mệnh đề logic** (gọi tắt là **mệnh đề**) là một câu khẳng định đúng hoặc khẳng định sai.

Một câu khẳng định đúng được gọi là mệnh đề **đúng**. Một câu khẳng định sai gọi là một mệnh đề **sai**. Tính "Đúng" hay "Sai" của mệnh đề được gọi là chân trị của mệnh đề.

Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Một mệnh đề thường được ký hiệu bằng các chữ cái in hoa: P, Q, R...

**Định nghĩa 1.2.** Cho mệnh đề P. Mệnh đề "*Không phải P*" được gọi là **mệnh đề phủ định** của P và kí hiệu là  $\bar{P}$ .

**Tính chất 1.1.** Mệnh đề P đúng thì mệnh đề phủ định  $\bar{P}$  sai và ngược lại.

P	$\bar{P}$
Đ	S
S	Đ

**Định nghĩa 1.3.** Cho hai mệnh P và Q. Khi đó mệnh đề "P và Q" được gọi là mệnh đề **hội**. Kí hiệu

$$P \wedge Q$$

**Tính chất 1.2.** Mệnh đề  $P \wedge Q$  đúng khi P và Q cùng đúng, và sai trong các trường hợp còn lại.

P	Q	$P \wedge Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	S

**Định nghĩa 1.4.** Cho hai mệnh đề P và Q. Khi đó mệnh đề "P hoặc Q" được gọi là mệnh đề **tuyển** hay mệnh đề **hoặc**. Kí hiệu

$$P \vee Q$$

**Tính chất 1.3.** Mệnh đề  $P \vee Q$  sai khi P và Q cùng sai, và đúng trong các trường hợp còn lại.

P	Q	$P \vee Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	S

**Định nghĩa 1.5.** Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là **mệnh đề kéo theo** và ký hiệu  $P \Rightarrow Q$ .

**Định nghĩa 1.6.** Cho mệnh đề kéo theo  $P \Rightarrow Q$ . Khi đó mệnh đề  $Q \Rightarrow P$  được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ .

Mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  chỉ sai khi P đúng Q sai.

**Tính chất 1.4.** Mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  sai khi P đúng Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	Đ
S	S	Đ

**Định nghĩa 1.7.** Cho hai mệnh đề  $P$  và  $Q$ . Mệnh đề có dạng " $P$  nếu và chỉ nếu  $Q$ " được gọi là **mệnh đề tương đương** và kí hiệu là  $P \Leftrightarrow Q$ .

**Tính chất 1.5.** Mệnh đề  $P \Leftrightarrow Q$  đúng khi cả hai mệnh đề kéo theo  $P \Rightarrow Q$  và  $Q \Rightarrow P$  đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	Đ

**Định nghĩa 1.8.** Một biểu thức mệnh đề là một biểu thức trong đó gồm một hay nhiều mệnh đề và các phép toán trên mệnh đề.

**Định nghĩa 1.9.** (a) Mệnh đề hằng đúng là mệnh đề luôn nhận chân trị đúng.

(b) Mệnh đề hằng sai là mệnh đề luôn nhận chân trị sai.

**Định nghĩa 1.10.** Hai mệnh đề  $P$  và  $Q$  (biểu thức mệnh đề) được gọi là tương đương logic nếu mệnh đề  $P \Leftrightarrow Q$  là hằng đúng.

**Tính chất 1.6.** Ta có một số tương đương logic trong bảng sau:

Xét các phát biểu

- $P(n)$ : " $n + 1$  là số chính phương". (1)
- $Q(x,y)$ : " $x + y$  chia hết cho 2". (2)

Mỗi phát biểu trên là câu khẳng định chứa một hay nhiều biến ( $n,x,y..$ ). Tính đúng sai của chúng phụ thuộc vào giá trị của biến.

**Định nghĩa 1.11.** Các phát biểu dạng (1), (2)... được gọi là **mệnh đề chứa biến**.

- Cho mệnh đề chứa biến  $P(x)$  với  $x \in X$  là một tập hợp nào đó. Khi đó khẳng định có dạng "Với mọi  $x$  thuộc  $X$  thì  $P(x)$  đúng" (hay " $P(x)$  đúng với mọi  $x$  thuộc  $X$ ") là một mệnh đề và được kí hiệu là

$$"\forall x \in X, P(x) \text{ hoặc } \forall x \in X : P(x)."$$

- Cho mệnh đề chứa biến  $P(x)$  với  $x \in X$  là một tập hợp nào đó. Khi đó khẳng định có dạng "Tồn tại  $x$  thuộc  $X$  để cho  $P(x)$  đúng" là một mệnh đề và được kí hiệu là

$$"\exists x \in X, P(x) \text{ hoặc } \exists x \in X : P(x)."$$

**Định lí 1.1.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề chứa lượng từ  $\forall$  và  $\exists$ :

- $\overline{\forall x \in X : P(x)} = \exists x \in X : \overline{P(x)}$ .
- $\overline{\exists x \in X : P(x)} = \forall x \in X : \overline{P(x)}$ .



## BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

**Ví dụ 1.1.** Cho  $P, Q$  là các mệnh đề. Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương logic.

- $P \Rightarrow Q$  và  $\overline{P} \vee Q$ .
- $\overline{P \vee Q}$  và  $\overline{P} \wedge \overline{Q}$ .
- $\overline{P \wedge Q}$  và  $\overline{P} \vee \overline{Q}$ .

**Ví dụ 1.2.** Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và xét chân trị của chúng.

- (a)  $A = \text{"Có vô hạn các số tự nhiên"}$ .
- (b)  $B = \text{"Có hữu hạn số chia hết cho 5"}$ .
- (c)  $C = \text{"Phương trình } |x^2 + 1| = 1 \text{ vô nghiệm"}$ .
- (d)  $D = (7^{2019} - 7) : 10$ .

**Ví dụ 1.3.** Các bạn Nam, Hùng, Dũng đang cưa cẩm cô X, trong lúc cô X hỏi lại thì các bạn trả lời sự thật rằng.

Nam: Hùng có bồ và Dũng chưa có bồ.

Hùng: Nếu Nam có bồ thì Dũng cũng có bồ.

Vậy ai là người có bồ?

**Ví dụ 1.4.** Lớp 10 văn được chia thành 3 tổ: tổ A, tổ B và tổ C để tham gia văn nghệ do trường tổ chức.

- (a) Nếu tổ A tham gia thì tổ B không tham gia.
- (b) Nếu cả tổ B và tổ C tham gia thì tổ A cũng phải tham gia.

Với quy ước trên khi tổ B tham gia thì tổ A và tổ C có tham gia hay không?

**Ví dụ 1.5.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng. Viết mệnh đề phủ định.

- (a)  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq -1$
- (b)  $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3} \leq |x| \leq \frac{5}{4}$
- (c)  $\exists n \in \mathbb{N} : n^4 + n^2 + 1$  là số nguyên tố.
- (d)  $\forall n \in \mathbb{N} : (n^5 - n) : 15$ .

**Ví dụ 1.6.** Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và lập mệnh đề phủ định

- (a)  $\exists n \in \mathbb{Q} : n^2 = 2$
- (b)  $\exists x \in \mathbb{R} : x \geq x^2$
- (c)  $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$  không chia hết cho 3.
- (d)  $\exists n \in \mathbb{N} : 10^n - 9n - 1$  là số nguyên tố.



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 1.1.** Giả sử  $Q$  có mệnh đề là Đ, hãy xác định chân trị của  $P, R, S$  nếu giá trị của biểu thức mệnh đề sau cũng là Đ.

$$(Q \rightarrow ((\bar{P} \vee R) \wedge \bar{S})) \wedge (\bar{S} \rightarrow (\bar{R} \wedge Q))$$

**Bài 1.2.** Dùng các tương đương logic đã biết để chứng minh các biểu thức mệnh đề sau là hằng đúng:

- (a)  $(P \wedge Q) \rightarrow P$
- (b)  $P \rightarrow (\bar{P} \rightarrow P)$
- (c)  $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$
- (d)  $\overline{P \vee \bar{Q}} \rightarrow \bar{P}$
- (e)  $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

**Bài 1.3.** Không lập bảng chân trị, sử dụng các tương đương logic đã biết để xét mệnh đề  $G$  có phải là hệ quả của  $F$  không?

- (a)  $F = P \wedge (Q \vee R)$  và  $G = (P \wedge Q) \vee R$ .
- (b)  $F = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$  và  $G = P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ .
- (c)  $F = P \wedge Q$  và  $G = (\bar{P} \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \bar{Q})$ .

**Bài 1.4.** Chứng minh rằng

- (a)  $\bar{A} \Rightarrow B = A \vee B$
- (b)  $P \Rightarrow Q = \bar{P} \vee Q$
- (c)  $P \Rightarrow Q = \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$  (mệnh đề thuận và mệnh đề phản đảo là tương đương)
- (d)  $Q \Rightarrow P = \bar{P} \Rightarrow Q$  (mệnh đề đảo và mệnh đề phản là tương đương)

**Bài 1.5.** Chứng minh

- (a)  $P = P \vee (P \wedge Q)$
- (b)  $P = P \wedge (P \vee Q)$

**Bài 1.6.** Chứng minh mệnh đề  $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$  không tương đương với mệnh đề  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ .

**Bài 1.7.** Chứng minh rằng  $\overline{P \Leftrightarrow Q} = \overline{P} \Leftrightarrow Q$

**Bài 1.8.** Chứng minh rằng

(a)  $P \vee Q = \overline{\overline{P} \wedge \overline{Q}}$

(b)  $P \Rightarrow Q = \overline{P \wedge \overline{Q}}$

(c)  $P \Leftrightarrow Q = \overline{P \wedge \overline{Q}} \wedge \overline{\overline{P} \wedge Q}$

**Bài 1.9.** Chứng minh

(a)  $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R = \overline{R} \Rightarrow \overline{P \Rightarrow Q}$

(b)  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) = (P \wedge Q) \Rightarrow R$

**Bài 1.10.** Chứng minh các tương đương logic sau:

(a)  $(P \vee Q) \wedge \overline{\overline{P} \wedge \overline{Q}} = P$

(b)  $\overline{\overline{(P \vee Q)} \wedge \overline{R} \vee \overline{Q}} = Q \wedge R$

(c)  $((P \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q})) \vee Q = P \vee Q$

(d)  $(P \rightarrow Q) \wedge (\overline{Q} \wedge (R \vee \overline{Q})) = \overline{P \vee Q}$

(e)  $((\overline{P} \vee \overline{Q}) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)) = P \wedge Q$

**Bài 1.11.** Cho các mệnh đề sau, hãy tìm số lớn nhất các mệnh đề đúng.

(a) Angela Trinh là người diễn viên.

(b) T không giàu có.

(c) T giàu nhưng không là diễn viên.

(d) Nếu T là diễn viên thì T không giàu.

(e) T là người diễn viên khi và chỉ khi T giàu.

(f) Hoặc T là diễn viên, hoặc T là giàu nhưng không đồng thời cả hai.

**Bài 1.12.** Có 3 học sinh A, B, C được xếp ngồi thành một hàng và nhìn về phía trước, người ngồi sau chỉ nhìn thấy đầu của những người ngồi trước và không được quay đầu lại. Các bạn này được biết trước là có 5 chiếc mũ: 3 màu xanh, 2 màu đỏ.

Người ta đội cho mỗi bạn này một chiếc mũ trong số 5 chiếc mũ đó. Sau đó người ta yêu cầu các bạn đoán xem là mình đang đội mũ màu gì. Bạn A ngồi sau cùng trả lời không biết, bạn B ngồi ở giữa cũng trả lời không biết. Do đó bạn C trả lời đúng mình đội mũ màu gì. Hãy giải thích tại sao bạn C biết được điều đó.

**Bài 1.13.** Một nhóm học sinh gồm A,B,C được phân công trực nhật lớp trong 1 tuần từ thứ 2 đến thứ 7, mỗi ngày trực không quá 2 người, riêng ngày thứ 7 trực 1 người. Theo yêu cầu của GVCN:

- (a) Nếu A không trực thì B phải trực
- (b) Hai em B, C không đồng thời trực hoặc không đồng thời không trực.

Hỏi ai là người trực ngày thứ 7?

**Bài 1.14.** Bốn bạn Anh, Huy, Trường và Linh tham gia đội tuyển bóng đá của nhà trường. Khi sắp xếp đội hình thi đấu với các đôi bạn, huấn luyện viên đưa ra chiến thuật như sau:

- (a) Nếu Huy tham gia trận đấu thì Anh cũng tham gia
- (b) Nếu Linh không tham gia thì trường cũng không tham gia.

Trên cơ sở quy định trên hỏi:

- Nếu trong một trận đấu có Huy tham gia và Linh không tham gia thì Anh và Trường có tham gia hay không?

- Nếu trong một trận đấu mà Anh không tham gia và Trường hoặc Huy tham gia thì Linh có tham gia hay không?

**Bài 1.15.** Trong số những học sinh của lớp 10 Toán những học sinh không kém Toán thì không kém Văn, những học sinh kém Văn thì không kém Ngoại ngữ và những học sinh không kém Toán thì không kém Ngoại ngữ. Phân loại học sinh lớp 10 Toán người ta thấy:

- (a) Số học sinh không kém ít nhất một trong ba môn Toán, Văn, Ngoại ngữ bằng số học sinh kém ít nhất một trong 3 môn đó.
- (b) Số học sinh không kém ít nhất hai trong ba môn trên bằng số học sinh bằng số học sinh kém ít nhất hai trong ba môn đó.

Chứng minh:

- Số học sinh kém 3 môn bằng số học sinh không kém cả 3 môn.
- Số học sinh không kém hai môn Văn và Ngoại ngữ bằng tổng số học sinh không kém môn Văn và không kém môn Ngoại ngữ (số học sinh không kém chỉ một môn Văn hoặc Ngoại ngữ).

**Bài 1.16.** Nhà trường cần xếp thời khoá biểu cho lớp 10 Toán 4 môn học Toán, Lý, Hoá và Văn vào hai ngày thứ 3 và 4. Các giáo viên dạy các môn này đưa ra yêu cầu như sau:

- (a) Nếu giờ Toán vào thứ 3 thì môn Hoá phải vào thứ 4.
- (b) Môn Toán hoặc môn Lý cần xếp vào thứ 3.
- (c) Nếu môn Lý vào ngày thứ 3 thì môn Văn phải vào thứ 4.
- (d) Môn Văn không thể dạy vào ngày thứ 4.

Hỏi thời khoá biểu được xếp như thế nào?

**Bài 1.17.** Ta có cơ sở tri thức mô tả mối quan hệ của các thành phần trong một tam giác như sau:

- (a) Nếu biết 3 cạnh của 1 tam giác ta có thể biết nửa chu vi của tam giác đó
- (b) Nếu biết 2 cạnh và nửa chu vi của một tam giác thì ta có thể biết được cạnh còn lại của tam giác đó
- (c) Nếu biết được diện tích và một cạnh của một tam giác thì ta có thể biết được chiều cao tương ứng với cạnh đó
- (d) Nếu biết 2 cạnh và một góc kẹp giữa 2 cạnh đó của một tam giác thì ta có thể biết được cạnh còn lại của tam giác đó.
- (e) Nếu biết 2 cạnh và một góc kẹp giữa 2 cạnh đó của một tam giác thì ta có thể biết được diện tích của tam giác đó
- (f) Nếu biết ba cạnh và nửa chu vi của một tam giác thì ta biết được diện tích của tam giác đó
- (g) Nếu biết diện tích và đường cao của một tam giác thì ta biết được cạnh tương ứng với đường cao của tam giác đó

Giả sử biết được 2 cạnh và góc kẹp giữa hai cạnh đó. Hãy chứng minh rằng ta có thể suy ra được đường cao tương ứng với cạnh còn lại.

## §2. TẬP HỢP - TẬP SỐ THỰC



### LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 1.12.** Tập hợp là một khái niệm cơ bản (nguyên thủy) của toán học và không được định nghĩa.

Ta thường kí hiệu tập hợp là các chữ cái in hoa. Phần tử  $x$  thuộc tập  $A$  kí hiệu là  $x \in A$ , nếu  $x$  không thuộc  $A$  thì kí hiệu  $x \notin A$ .

Tập hợp không chứa bất kì phần tử nào được gọi là tập rỗng. Kí hiệu  $\emptyset$ .

Ta thường cho một tập hợp bằng hai cách:

- Liệt kê phần tử. Ví dụ  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .
- Chỉ ra tính chất đặc trưng.

**Định nghĩa 1.13.** (Tập con) Tập  $A$  được gọi là **tập con** của tập  $B$  và kí hiệu  $A \subset B$  nếu mọi phần tử của tập  $A$  đều là phần tử của tập  $B$ . Nói cách khác

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Với mọi tập hợp  $A$  ta có  $\emptyset \subset A$  và  $A \subset A$ .

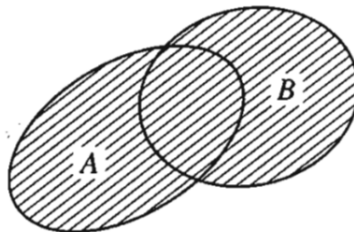
**Định nghĩa 1.14.** (Tập hợp bằng nhau) Hai tập hợp  $A$  và  $B$  được gọi là **bằng nhau** và kí hiệu  $A = B$  nếu mỗi phần tử của  $A$  cũng là một phần tử của  $B$  và mỗi phần tử của  $B$  cũng là phần tử của  $A$ . Nói cách khác

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Hai tập hợp không bằng nhau (khác nhau) được kí hiệu  $A \neq B$ .

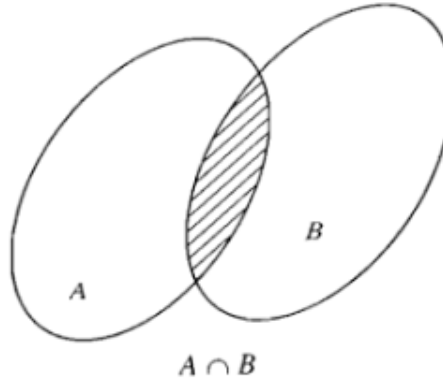
**Định nghĩa 1.15.** **Hợp** của hai tập hợp  $A$  và  $B$  kí hiệu  $A \cup B$  là một tập hợp bao gồm tất cả các phần tử của thuộc  $A$  hoặc thuộc  $B$ . Nói cách khác

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$



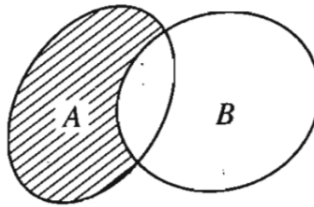
**Định nghĩa 1.16.** **Giao** của hai tập hợp  $A$  và  $B$ , kí hiệu  $A \cap B$  là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc cả  $A$  và  $B$ . Nói cách khác

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



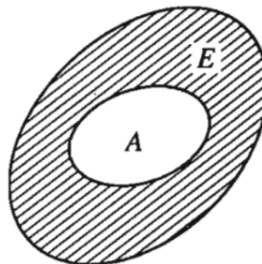
**Định nghĩa 1.17.** **Hiệu** của hai tập hợp  $A$  và  $B$ , kí hiệu là  $A \setminus B$  là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc  $A$  nhưng không thuộc  $B$ . Nói cách khác

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$



**Định nghĩa 1.18.** Cho  $A$  là tập con của tập  $E$ . **Phần bù** của  $A$  trong  $E$ , kí hiệu  $C_E A$  là tập hợp tất cả các phần tử của  $E$  mà không là phần tử của  $A$ . Nói cách khác, nếu  $A \subset E$  thì

$$C_E A = E \setminus A = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}.$$



**Định nghĩa 1.19.** Cho  $X$  là một tập hợp  $\mathcal{P}$  là một bộ phận của tập các tập con của  $X$ . Ta nói rằng  $\mathcal{P}$  là một phân hoạch của  $X$  khi và chỉ khi:

- $\forall A \in \mathcal{P}$  thì  $A \neq \emptyset$ ;
- $\forall A \in \mathcal{P}, \forall B \in \mathcal{P}, A \neq B \Rightarrow A \cup B = \emptyset$ ;
- $\forall x \in X, \exists A \in \mathcal{P}, x \in A$ .

Tập các số tự nhiên  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

**Tính chất 1.7.** • Tổng hai số tự nhiên là số tự nhiên.

- Tích của hai số tự nhiên là số tự nhiên.
- Mọi tập con của số tự nhiên đều có phần tử nhỏ nhất.
- Giữa hai số tự nhiên liên tiếp không có số tự nhiên nào.
- Tập số tự nhiên không bị chặn trên, bị chặn dưới.
- Mọi tập con bị chặn trên đều có phần tử lớn nhất.

Là tập các số tự nhiên và các số đối của nó.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

**Tính chất 1.8.** Ngoài các tính chất có như tập các số tự nhiên, tập số nguyên có thêm các tính chất sau:

- Hiệu hai số nguyên là một số nguyên.
- Mọi tập con bị chặn dưới đều có phần tử nhỏ nhất.

**Định nghĩa 1.20.** Tập hợp  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$  được gọi là tập các số hữu tỷ.

**Tính chất 1.9.** • Tổng hiệu, tích thương của hai số hữu tỷ là một số hữu tỷ.

- Có tính trù mật, giữa hai số hữu tỷ có một số hữu tỷ.

**Định nghĩa 1.21.** Hợp của các số vô tỷ và các số hữu tỷ là tập số thực. Kí hiệu là  $\mathbb{R}$ .

**Tính chất 1.10.** • Tổng hiệu tích thương của hai số thực là số thực.

- Giữa hai số thực có một số thực.
- Một tập khác rỗng hữu hạn của số thực có phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

**Tính chất 1.11.** (Nguyên lý Archimede) Cho  $d$  là số thực dương. Khi đó với mọi số thực  $x$  tồn tại số tự nhiên  $n$  sao cho  $dn \geq x$ .

**Định nghĩa 1.22.** Cho tập  $A$  khác rỗng là con của tập số thực. Khi đó

- Nếu  $A$  bị chặn trên thì tồn tại chặn trên nhỏ nhất.
- Nếu  $A$  bị chặn dưới thì tồn tại chặn dưới lớn nhất.

**Định nghĩa 1.23.** Các tập con của  $\mathbb{R}$ .

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số (phần không bị gạch chéo)
Tập số thực $(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng $(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng $[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng $(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng $[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Khoảng $(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng $(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	



## BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

**Ví dụ 1.7.** Cho  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $C = \{x \in \mathbb{N}, 3 < |x - 2| < 5\}$ .

- Liệt kê các phần tử của  $C$ .
- Tìm  $A \cap B$  và  $A \cup B$ .
- Tìm  $(A \cup C) \setminus B$  và  $B \setminus (A \cap C)$ .

**Ví dụ 1.8.**  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x:3\}$  và  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x:6\}$  và  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x:3\}$

- Chứng minh  $B \subset A, B \subset C$ .
- Chứng minh  $B = A \cap C$ .

**Ví dụ 1.9.** Cho 2 tập khác rỗng:  $A = (m - 1; 5]$  và  $B = (-3; 2m + 3)$ ;  $m \in \mathbb{R}$ . Tìm  $m$  để

(a)  $A \cap B \neq \emptyset$ .

(c)  $B \subset A$ .

(b)  $A \subset B$ .

(d)  $(A \cap B) \subset (-2; 4)$ .



## BÀI TẬP

**Bài 1.18.** Chứng minh các đẳng thức sau:

(a)  $A \cap \emptyset = \emptyset$

(b)  $A \cup \emptyset = A$ .

**Bài 1.19.** Cho  $A, B, C$  là các tập hợp. Chứng minh

(a)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ .

(b)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ .

(c)  $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$ .

(d)  $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$ .

**Bài 1.20.** Cho các tập hợp  $A, B, C$ . Chứng minh

(a)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

(b)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**Bài 1.21.** Cho  $A, B, C, X$  là các tập hợp, trong đó  $A, B \subset X$ . Chứng minh

(a)  $C_X(A \cap B) = C_X(A) \cup C_X(B)$ .

(b)  $C_X(A \cup B) = C_X(A) \cap C_X(B)$ .

**Bài 1.22.** Cho các tập hợp  $A, B, C$ . Chứng minh rằng:

(a)  $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$ .

(b)  $A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$ .

**Bài 1.23.** Cho các tập  $A, B, C, A', B', C'$  là tập con của  $X$  thỏa:

- $A \cup B \cup C = X$ ;
- $A \cap B = A' \cap B', A \cap C = A' \cap C', B \cap C = B' \cap C'$ .

- $A \subset A', B \subset B', C \subset C'$ .

Chứng minh  $X = X', Y = Y', Z = Z'$ .

**Bài 1.24.** Cho  $A, B$  là các tập con của  $X$ , ta kí hiệu đối xứng  $A \Delta B = (A \cap (X \setminus B)) \cup (B \cap (X \setminus A))$ . Chứng minh rằng:

- $A \Delta \emptyset = A$ .
- $A \Delta A = \emptyset$ .
- $A \Delta X = X \setminus A$ .

**Bài 1.25.** Cho tập số tự nhiên  $\mathbb{N}$  và số nguyên  $k \geq 2$ . Đặt  $A_t = \{x \in \mathbb{N} | x \equiv t \pmod{k}\}$  với  $t = 0, 1, \dots, k-1$ . Chứng minh các tập  $A_t$  là một phân hoạch của  $\mathbb{N}$ .

**Bài 1.26.** Cho tập hợp  $E$ ,  $\mathcal{P}$  là một phân hoạch của  $E$ ,  $\mathcal{A}$  là một bộ phận của  $\mathcal{P}$ . Đặt  $F = \{x \in E | \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}$ . Chứng minh  $\mathcal{A}$  là một phân hoạch của  $F$ .

**Bài 1.27.** Cho  $E$  là một tập hợp,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_0, A_1, \dots, A_n$  là tập con của  $E$  sao cho

$$\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = E$$

Đặt  $B_1 = A_1 \setminus A_0, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ . Chứng minh  $B_1, B_2, \dots, B_n$  là một phân hoạch của  $E$ .

**Bài 1.28.** Lớp 10A có 40 học sinh, trong đó có 15 bạn được xếp học lực giỏi, 20 bạn được xếp hạnh kiểm tốt, 10 bạn vừa học lực giỏi vừa hạnh kiểm tốt.

- Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết để được khen thưởng thì bạn đó hoặc phải có học lực giỏi hoặc phải có hạnh kiểm tốt.
- Lớp 10 A có bao nhiêu bạn chưa có học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt?

**Bài 1.29.** Lớp 10A có 9 học sinh giỏi môn Toán, 10 học sinh giỏi môn Văn và 8 học sinh giỏi môn tiếng Anh. Biết trong đó có 3 học sinh giỏi cả hai môn Văn và Toán, 3 học sinh giỏi cả hai môn Văn và tiếng Anh, 4 học sinh giỏi cả hai môn Toán và tiếng Anh, có 4 học sinh giỏi đúng hai môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh của lớp:

- Giỏi cả 3 môn.
- Giỏi đúng 1 môn.

**Bài 1.30.** Trong số 200 học sinh của một trường học có 50% học sinh biết chơi bóng chuyền, 65% học sinh biết chơi bóng bàn, còn 15% học sinh không biết chơi môn nào trong cả hai môn này cả. Hỏi có bao nhiêu học sinh biết chơi cả hai môn bóng chuyền và bóng bàn?

**Bài 1.31.** Cho  $A$  là tập con của tập các số hữu tỷ dương thỏa:

- $1 \in A$ .
- Nếu  $x \in A$  thì  $x + 1 \in A$ .
- Nếu  $x \in A$  thì  $\frac{1}{x} \in A$ .

Chứng minh  $A$  là tập các số hữu tỷ dương.

**Bài 1.32.** Cho tập hợp  $X$ ,  $F$  là một họ các tập con có  $r$  phần tử của  $X$  sao cho giao của  $r + 1$  tập bất kỳ thuộc  $F$  khác rỗng. Chứng minh giao tất cả các tập trong  $F$  khác rỗng.

**Bài 1.33.** Một tập hợp có ít nhất 3 số nguyên dương phân biệt được gọi là tập đều nếu bỏ đi một phần tử bất kỳ thì các số còn lại có thể chia thành hai tập hợp mà tổng các số trong hai tập hợp đó bằng nhau. Tìm số phần tử nhỏ nhất của một tập đều.

**Bài 1.34.** Giả sử tập các số tự nhiên được phân hoạch thành hai tập  $A$  và  $B$ . Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$  tồn tại  $a, b$  sao cho  $a, b, a + b \in A$  hoặc  $a, b, a + b \in B$ .

**Bài 1.35.** Cho các số thực  $x, y, z$  khác 0 thỏa  $xy, yz, xz$  là các số hữu tỉ.

(a) Chứng minh  $x^2 + y^2 + z^2$  là số hữu tỉ.

(b) Giả sử  $x^3 + y^3 + z^3$  cũng là số hữu tỉ. Chứng minh  $x, y, z$  là các số hữu tỉ.

**Bài 1.36.** Tìm tất cả các bộ số hữu tỉ dương  $(x, y, z)$  sao cho  $x + \frac{1}{y}, y + \frac{1}{z}, z + \frac{1}{x}$  là các số nguyên.

**Bài 1.37.** Tìm các tập con  $A$  khác rỗng của tập  $\{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$  sao cho với mọi  $n \in A$  thì cả  $n^2 + 4$  và  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$  cũng thuộc  $A$ .

**Bài 1.38.** Tập hợp  $M$  chứa 4 số nguyên phân biệt được gọi là tập *liên kết* nếu với mỗi  $x \in M$  thì ít nhất một trong hai số  $x - 1, x + 1$  thuộc  $M$ . Gọi  $U_n$  là số tập con liên kết của tập  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

(a) Tính  $U_7$ .

(b) Xác định giá trị nhỏ nhất của  $n$  sao cho  $U_n \geq 2019$ .

**Bài 1.39.** Tám số tự nhiên liên tiếp được chia vào hai tập, mỗi tập gồm bốn số. Chứng minh rằng nếu tổng bình phương của các số trong mỗi tập bằng nhau thì tổng các số trong mỗi tập này cũng bằng nhau.

**Bài 1.40.** Tìm tất cả các cặp  $(X, Y)$  là các tập con của tập các số nguyên thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (1) Mỗi tập  $X, Y$  có 3 phần tử.
- (2)  $3 \in X$  và  $5 \in Y$ .
- (3) Tập  $X \cap Y$  có đúng một phần tử.
- (4) Nếu  $a, b$  là hai phần tử phân biệt của  $X$  thì  $a + b \in Y$ .

**Bài 1.41.** Cho hai tập  $A, B$  thỏa mãn  $C_R A = (2, +\infty), C_R B = (-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$ . Hãy xác định các tập  $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$  và phần bù của các tập trên.

**Bài 1.42.** Cho  $A = [\frac{1}{2}, +\infty), B = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| \leq 1\}$ . Tìm  $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$  và phần bù của các tập trên.

**Bài 1.43.** Cho tập  $A = [-2, 7], B = (m, +\infty)$ . Tùy theo giá trị của  $m$  hãy tìm  $A \cap B$ .

**Bài 1.44.** Cho  $A = (2m - 1, 2m + 3), B = (-1, 1]$ . Tìm  $m$  để

- |                     |                                     |
|---------------------|-------------------------------------|
| (a) $A \subset B$ . | (c) $A \cap B = \emptyset$ .        |
| (b) $B \subset A$ . | (d) $A \cap B$ có đúng 1 số nguyên. |

**Bài 1.45.** Cho hai tập khác rỗng  $A = (m - 3; 4), B = (-4, 2m)$ . Hãy xác định  $m$  để:

- |                            |                                    |
|----------------------------|------------------------------------|
| (a) $A \cap B = \emptyset$ | (c) $B \subset A$                  |
| (b) $A \subset B$          | (d) $(A \cap B) \subset (-2, 3)$ . |

**Bài 1.46.** Cho hai tập khác rỗng  $A = (m - 1, 4], B = (-2, 2m + 2)$ . Xác định  $m$  để:

- |                              |                                  |
|------------------------------|----------------------------------|
| (a) $A \cap B = \emptyset$ . | (c) $B \subset A$ .              |
| (b) $A \subset B$ .          | (d) $A \cap B \subset (-1, 3)$ . |

**Bài 1.47.** Cho  $A = [-3; 3], B = [m; 3m + 1)$ .

- (a) Khi  $m = 1$ . Tìm  $A \cup B, A \setminus B$ .
- (b) Tìm  $m \in \mathbb{Z}$  để  $A \cap B = \{0\}$ .

**Bài 1.48.** Cho  $A = (2; +\infty), (-\infty; m)$ .

(a) Tìm  $m$  để  $A \cap B$  khác rỗng.

(b) Tìm  $m$  để  $A \cup B = \mathbb{R}$ .

(c) Tìm  $m$  để  $A \subset B$ .

**Bài 1.49.** Cho  $A = [2m - 1; +\infty), B = [m; +\infty)$ .

(a) Tìm  $m$  để  $A \subset B$ .

(b) Tìm  $m$  để  $B \subset A$ .

**Bài 1.50.** Cho hai tập hợp  $A = (-\infty; 2m - 7)$  và  $B = (13m + 1; +\infty)$ . Số nguyên  $m$  nhỏ nhất thỏa mãn  $A \cap B = \emptyset$  là

**Bài 1.51.** Cho số thực  $a \neq 0$ . Tìm cần và đủ để của  $a$  để giao của hai tập hợp  $A = (-\infty; a)$  và  $B = \left(\frac{3a - 4}{2}; +\infty\right)$  khác tập  $\emptyset$

### §3. ẢNH XẠ



#### ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

**Định nghĩa 1.24.** Cho hai tập hợp  $A$  và  $B$  khác rỗng. Một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử  $x \in A$  với một và chỉ một phần tử  $y \in B$  được gọi là một ánh xạ từ  $A$  vào  $B$ .

**Định nghĩa 1.25.** Ánh xạ  $f : A \rightarrow B$  được gọi là đơn ánh nếu với mọi  $x, y \in A$  mà  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ .

Nói cách khác, ánh xạ  $f$  là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi  $y \in B$  thì tập hợp  $f^{-1}(y)$  có không quá một phần tử.

**Định nghĩa 1.26.** Ánh xạ  $f : A \rightarrow B$  là toàn ánh khi và chỉ khi mọi  $y \in B$  thì tồn tại  $x \in A$  sao cho  $f(x) = y$ .

Nói cách khác,  $f$  là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi  $y \in B$  thì  $f^{-1}(y)$  khác rỗng.

**Định nghĩa 1.27.** Một ánh xạ  $f : A \rightarrow B$  là song ánh nếu vừa đơn ánh vừa toàn ánh.

Nói cách khác,  $f$  là một song ánh khi và chỉ khi với mọi  $y \in B$  thì tập  $f^{-1}(y)$  có đúng một phần tử.

**Ví dụ 1.10.** Trong các qui tắc sau quy tắc nào là ánh xạ. Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh?

- (a) Qui tắc  $f : A \rightarrow A$  thỏa  $f(x) = x$ , tức là cho tương ứng mỗi phần tử với chính nó.
- (b)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa  $f(x) = -1$  nếu  $x < 0$ ,  $f(x) = 1$  nếu  $x > 0$  và  $f(x) = 0$  nếu  $x = 0$ .
- (c) Cho  $\vec{a}$ . Với mỗi điểm  $M$  thuộc mặt phẳng cho tương ứng với  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ .
- (d) Cho tập  $X$ ,  $A$  là tập con khác rỗng của  $X$ . Xét  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  thỏa  $f(x) = 1$  nếu  $x \in A$ ,  $f(x) = 0$  nếu  $x \notin A$ .
- (e) Cho  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa  $x \mapsto y$  thỏa  $y^2 = x$ .
- (f) Cho  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa  $f(a, b) = ab$ .

**Định nghĩa 1.28.** Cho tập  $A$  số nguyên dương  $n$  và  $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Nếu tồn tại một song ánh từ  $A$  vào  $X$  thì khi đó ta nói  $A$  có hữu hạn phần tử và số phần tử của  $A$  là  $n$ . Kí hiệu  $|A| = n$ .

Nếu  $A$  không khác rỗng và không có hữu hạn phần tử, ta nói  $A$  là tập vô hạn.

**Tính chất 1.12.** Cho  $A, B$  là các tập hữu hạn.

- Nếu tồn tại một đơn ánh từ  $A$  vào  $B$  thì  $|A| \leq |B|$ .
- Nếu tồn tại một toàn ánh từ  $A$  vào  $B$  thì  $|A| \leq |B|$ .
- Nếu tồn tại một song ánh từ  $A$  vào  $B$  thì  $|A| = |B|$ .

**Định nghĩa 1.29.** Nếu  $A$  là tập vô hạn. Nếu tồn tại một song ánh từ  $A$  vào  $\mathbb{N}$  thì ta nói tập  $A$  là tập vô hạn đếm được. Ngược lại thì gọi là vô hạn không đếm được.

**Ví dụ 1.11.** Xây dựng một song ánh từ tập  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  vào tập các dãy nhị phân có độ dài  $n$ . Từ đó suy ra số con của tập có  $n$  phần tử.



## ÁNH XẠ HỢP - ÁNH XẠ NGƯỢC

**Định nghĩa 1.30.** Cho song ánh từ  $f : A \rightarrow B$ . Ta xây dựng một ánh xạ từ  $B$  vào  $A$  như sau: với mỗi phần tử  $b \in B$  cho tương ứng với phần tử  $a \in A$  thỏa  $a = f^{-1}(b)$ , ánh xạ đó được gọi là ánh xạ ngược của  $f$ , kí hiệu là  $f^{-1}$ .

Ta có

$$f^{-1} : B \rightarrow A, f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

**Ví dụ 1.12.** Ánh xạ ngược của ánh xạ đồng nhất là ánh xạ đồng nhất.

**Ví dụ 1.13.** Cho  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$ . Xét song ánh từ  $A \rightarrow B$  là  $f(1) = b, f(2) = a, f(3) = c$ . Khi đó ánh xạ ngược  $f^{-1}$  từ  $B \rightarrow A$  là  $f^{-1}(a) = 2, f^{-1}(b) = 1, f^{-1}(c) = 3$ .

**Định nghĩa 1.31.** Cho  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  khi đó ánh xạ  $g \circ f : A \rightarrow C$  thỏa

$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

được gọi là ánh xạ hợp.

**Ví dụ 1.14.** Cho  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ . Khi đó  $g \circ f(x) = (2x + 1)^2$  và  $f \circ g(x) = 2x^2 + 1$ .

**Ví dụ 1.15.**  $f : A \rightarrow B$  là song ánh thì  $f \circ f^{-1} = Id$  ánh xạ đồng nhất.



## BÀI TẬP

**Bài 1.52.** Trong các quy tắc sau, quy tắc nào là ánh xạ?

(a) Xét quy tắc  $f$  từ tập các số nguyên  $\mathbb{Z}$  vào  $X = \{-1, 0, 1\}$  sao cho với mỗi

$$x \in \mathbb{Z} \text{ thì: } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

(b) Xét quy tắc cho tương ứng mỗi số thực dương  $x$  với số thực  $y$  sao cho  $y^2 = x$ .

(c) Cho tương ứng các điểm  $M$  thuộc mặt phẳng với các điểm  $M'$  thuộc mặt phẳng sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$  cho trước.

(d) Trong mặt phẳng cho tương ứng điểm  $M$  với điểm  $M'$  sao cho  $MM' = r > 0$  cho trước.

(e) Trong mặt phẳng cho đường thẳng  $d$ . Quy tắc cho tương ứng  $M$  thuộc  $d$  ứng với  $M$ ,  $M$  không thuộc  $d$  ứng với  $M'$  sao cho  $MM' \perp d$ .

(f) Quy tắc cho tương ứng mỗi số hữu tỷ ứng với 1, mỗi số vô tỷ ứng với 0.

**Bài 1.53.** Trong các ánh xạ ở bài trên, ánh xạ nào là đơn ánh, song ánh, toàn ánh?

**Bài 1.54.** Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh?

(a) Ánh xạ  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa  $f(x) = x^3$ .

(b) Ánh xạ  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  thỏa  $f(x) = |x|$ .

(c) Cho tương ứng mỗi số thực với phần nguyên của nó.

**Bài 1.55.** Cho ánh xạ  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^2 + 3x + 1$ .

(a)  $f$  có là đơn ánh?

(b)  $f$  có là toàn ánh không?

**Bài 1.56.** Cho  $f : (0; 1) \rightarrow (0; +\infty)$  thỏa  $f(x) = \frac{x}{1-x}$ .

(a) Tìm  $f(f(x))$ .

(b) Chứng minh  $f$  là song ánh.

(c) Tìm ánh xạ ngược của  $f$ .

**Bài 1.57.** Cho  $A, B, C, D$  là các tập con của  $X$ . Đặt  $\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in D \\ 0 & \text{khi } x \notin D \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

- (a) Quy tắc trên là ánh xạ từ  $X$  vào  $\{0, 1\}$ .
- (b)  $\chi_A \cdot \chi_A = \chi_A, \chi_{X \setminus A} = 1 - \chi_A$
- (c)  $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$
- (d)  $\chi_A \geq \chi_B \Leftrightarrow B \subset A, \chi_A \equiv 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$

**Bài 1.58.** Cho  $f : X \rightarrow Y$ .  $A, B$  là các tập con của  $X$ ;  $C, D$  là các tập con của  $Y$ . Đặt  $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$  là tập ảnh của  $A$ ;  $f^{-1}(C) = \{x \in X | f(x) \in C\}$  là tạo ảnh của  $C$ .

- (a) Chứng minh nếu  $A \subset B$  thì  $f(A) \subset f(B)$ .
- (b) Nếu  $C \subset D$  thì  $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$ .
- (c)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .
- (d)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ . Và  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  khi  $f$  là đơn ánh.
- (e)  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$  và  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .
- (f)  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .

**Bài 1.59.** Cho  $h : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  và  $f : C \rightarrow D$ .

- (a) Chứng minh rằng nếu  $f \circ g$  là đơn ánh thì  $g$  đơn ánh.
- (b) Nếu  $h \circ g$  là toàn ánh thì  $h$  cũng là toàn ánh.
- (c) Nếu  $h, g$  là đơn ánh (toàn ánh, song ánh) thì  $h \circ g$  cũng là đơn ánh (toàn ánh, song ánh).
- (d) Nếu  $h$  là song ánh thì  $h^{-1}$  cũng là song ánh.
- (e) Nếu  $h \circ g$  và  $f \circ h$  là song ánh thì  $f, h, g$  cũng là song ánh.

**Bài 1.60.** Cho ánh xạ  $f : \mathbb{R} \mapsto \{0, 1\}, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{khi } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

- (a) Tìm tập ảnh của  $f$ .

(b) Tìm  $f^{-1}(1), f^{-1}(0)$

(c)  $f$  có là song ánh không? Vì sao?

**Bài 1.61.** Cho  $A$  và  $B$  là hai tập hợp sao cho có một đơn ánh từ  $A$  vào  $B$ . Chứng minh rằng có một toàn ánh từ  $B$  vào  $A$ .

**Bài 1.62.** Cho  $A$  và  $B$  là hai tập hợp sao cho có một toàn ánh từ  $A$  vào  $B$ . Chứng minh rằng có một đơn ánh từ  $B$  vào  $A$ .

**Bài 1.63.** Tìm một song ánh từ tập các số tự nhiên chẵn đến tập các số tự nhiên lẻ.

**Bài 1.64.** Tìm một đơn ánh từ tập các số tự nhiên đến tập các số nguyên.

**Bài 1.65.** Tìm một song ánh từ tập các số tự nhiên đến tập các số nguyên.

**Bài 1.66.** Tìm một song ánh từ tập  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  đến  $\mathbb{N}^*$ .

**Bài 1.67.** Gọi tập  $X$  là tập gồm các khoảng có dạng  $(a, b)$  thỏa  $0 \leq a < b \leq 1$ . Xét ánh xạ  $X \rightarrow (0, 1), f((a, b)) = \frac{a+b}{2}$

(a)  $f$  có phải đơn ánh không? Vì sao?

(b)  $f$  có phải toàn ánh không? Vì sao?

**Bài 1.68.** Cho  $X$  là tập khác rỗng,  $P(X)$  là tập tất cả các tập con của  $X$ . Có tồn tại hay không một song ánh đi từ  $X$  đến  $P(X)$ ?

**Bài 1.69.** Tìm một song ánh từ tập  $(0; 1)$  đến tập các số thực.

**Bài 1.70.** Cho  $m$  là số nguyên dương và tập  $X = \{-m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m\}$ . Ánh xạ  $f: X \rightarrow X$  thỏa  $f(f(n)) = -n$  với mọi  $n \in X$ .

Chứng minh  $m$  là số chẵn.

# CHƯƠNG

## 2



## HÀM SỐ

---

---

### §1. ĐẠI CƯƠNG HÀM SỐ



#### A HÀM SỐ VÀ GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

**Định nghĩa 2.1.** Cho một tập hợp khác rỗng  $D \subset \mathbb{R}$ . Hàm số  $f$  xác định trên  $D$  là một quy tắc cho tương ứng mỗi số  $x \in D$  với một và chỉ một số, kí hiệu là  $f(x)$ ; số  $f(x)$  đó được gọi là giá trị của hàm số  $f$  tại  $x$ .

Tập  $D$  được gọi là tập xác định (hay miền xác định),  $x$  gọi là biến số hay đối số của hàm số  $f$ .

**Định nghĩa 2.2.** Cho hàm số  $f : D \longleftrightarrow \mathbb{R}$ , thì:

- $D$  được gọi tập xác định của hàm số.
- $x$  được gọi biến số hay đối số.
- $f(x)$  là giá trị của hàm số tại  $x$ .
- $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$  được gọi là tập giá trị của  $f$ .
- Với mỗi  $y \in f(D)$  thì  $f^{-1}y = \{x \in D | f(x) = y\}$  được gọi là tạo ảnh của  $y$ .

**Lưu ý 2.1.** Nếu khi cho hàm số chỉ nêu biểu thức  $y = f(x)$  thì mà không nói tập xác định thì ta quy ước, tập xác định của hàm số là tập tất cả các giá trị của  $x$  để  $f(x)$  có nghĩa.

- Biểu thức dưới mẫu thì khác 0.
- Biểu thức trong căn bậc hai thì không âm.



## VÍ DỤ

**Ví dụ 2.1.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(a)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ .

(c)  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 4}$ .

(b)  $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ .

(d)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{4-2x}}$ .

**Ví dụ 2.2.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(a)  $y = \frac{3x - 1}{(x^2 - 1)^2 - 2x^2}$

(b)  $y = \frac{\sqrt{7 - 2|x|}}{x^2 + 4x + 3}$

(c)  $y = \frac{1}{1 - \sqrt{1 + 4x}}$

**Ví dụ 2.3.** Tìm  $m$  để

(a) Hàm số  $y = \frac{x + 2m + 2}{x - m}$  xác định trên  $(-1, 0)$

(b) Hàm số  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x - m} + 1}$  có tập xác định là  $[0, +\infty)$



## SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

**Định nghĩa 2.3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $D$ .

- Hàm số  $f$  gọi là **đồng biến** (hay tăng) trên  $D$  nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Hàm số  $f$  gọi là **ngịch biến** (hay giảm) trên  $D$  nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- Hàm số  $f$  được gọi là **hàm hằng** trên  $D$  nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in D : f(x_1) = f(x_2)$$

- Nếu  $f$  đồng biến (hoặc nghịch biến) trên  $(a; b)$  ta nói  $f$  đơn điệu trên  $(a; b)$ .

**Tính chất 2.1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $D$ .

- Hàm số  $f$  đồng biến trên  $D$  khi và chỉ khi:

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2, \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

- Hàm số  $f$  nghịch biến trên  $D$  khi và chỉ khi:

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2, \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

**Tính chất 2.2.** Nếu hàm  $f$  đơn điệu trên  $(a; b)$  thì có nhiều nhất một giá trị  $x_0 \in (a; b)$  sao cho  $f(x_0) = 0$ , hay phương trình  $f(x) = 0$  có nhiều nhất một nghiệm trên  $(a; b)$ .

**Ví dụ 2.4.** Chứng minh các hàm số sau đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

(a)  $f(x) = 2x - 1$ .

(b)  $f(x) = x^3 + 3x + 1$ .

**Ví dụ 2.5.** Chứng minh các hàm số sau nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

(a)  $f(x) = -4x + 3$ .

(b)  $f(x) = -3x^3 - 4x$ .

**Ví dụ 2.6.** Chứng minh hàm số  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .

**Ví dụ 2.7.** Xét sự biến thiên của các hàm số sau trên các khoảng được chỉ ra:

(a)  $f(x) = \sqrt{x-1}$  trên  $(1; +\infty)$ .

(b)  $f(x) = x^2 - 4x + 1$  trên  $(-\infty; 2)$ .



## TÍNH CHẤM LẺ VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

**Định nghĩa 2.4.** Cho hàm số  $f(x)$  có tập xác định là  $D$ .

- Hàm số  $f$  được gọi là hàm số **chẵn** nếu với mọi  $x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = f(x)$ .

- Hàm số  $f$  được gọi là hàm số **lẻ** nếu với mọi  $x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = -f(x)$ .

**Định nghĩa 2.5.** Cho hàm số  $f$  xác định trên  $D$ . Tập hợp  $G = \{(x_0, y_0) : x_0 \in D \wedge y_0 = f(x_0)\}$  được gọi là đồ thị của hàm số  $f$

**Tính chất 2.3.** Đồ thị hàm số chẵn, hàm số lẻ.

- Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục tung.
- Đồ thị hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ.

**Định lý 2.1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đồ thị (G) của hàm số  $y = f(x)$  và  $p, q$  là hai số dương tùy ý. Khi đó:

- Tịnh tiến (G) lên trên  $q$  đơn vị ta được đồ thị hàm số  $y = f(x) + q$ .
- Tịnh tiến (G) xuống dưới  $q$  đơn vị ta được đồ thị hàm số  $y = f(x) - q$ .
- Tịnh tiến (G) sang trái  $p$  đơn vị ta được đồ thị của hàm số  $y = f(x + p)$ .
- Tịnh tiến (G) sang phải  $p$  đơn vị ta được đồ thị hàm số  $y = f(x - p)$ .

**Ví dụ 2.8.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

- $f(x) = |2x + 1| + |2x - 1|$
- $f(x) = \sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}$
- $f(x) = x^3 + |x|$
- $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$ .

**Ví dụ 2.9.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

- $y = \frac{x - 3}{2x - 1}$
- $y = \sqrt{x + 1} - \sqrt{1 - x}$
- $y = 5x^2 - 2x + 3$
- $y = \frac{|x - 1| + |x + 1|}{|2x - 1| + |2x + 1|}$

**Ví dụ 2.10.** Cho hàm số  $y = x^3 + x$ .

- Chứng minh hàm số là hàm số lẻ. Nhận xét đồ thị của hàm số.
- Nếu tịnh tiến qua trái đồ thị hàm số 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số nào?

**Ví dụ 2.11.** Cho hàm số  $y = -x^4 + x^2 + 1$ .

- Chứng minh hàm số là hàm số chẵn. Nhận xét đồ thị của hàm số.
- Nếu tịnh tiến lên trên đồ thị hàm số 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số nào?



## HÀM TUẦN HOÀN

**Định nghĩa 2.6.** Cho hàm  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}$ . Ta nói  $f$  là hàm tuần hoàn nếu tồn tại  $T > 0$  sao cho

$$f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

- (a)  $T$  được gọi là chu kì của hàm số  $f$ .
- (b) Chu kì nhỏ nhất (nếu có) được gọi là chu kì cơ sở của  $f$ .

**Ví dụ 2.12.** Chứng minh rằng hàm số  $f : \mathbb{R} \mapsto [0; 1)$  xác định  $f(x) = x - [x]$  là một hàm tuần hoàn.

**Tính chất 2.4.** Cho hàm  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}$  tuần hoàn với chu kì  $T$ .

- (a) Chứng minh rằng  $f$  cũng tuần hoàn với chu kì  $kT$  với  $k$  là số nguyên khác 0.
- (b) Nếu  $f$  tuần hoàn với chu kì  $T_1, T_2$  thì  $f$  cũng tuần hoàn với chu kì  $T = mT_1 + nT_2$  với  $m, n$  nguyên dương.
- (c) Nếu  $f, g$  tuần hoàn với chu kì lần lượt là  $T_1, T_2$  và  $\frac{T_1}{T_2}$  là hữu tỉ thì các hàm số  $f + g, f - g, f \cdot g$  cũng tuần hoàn với chu kì  $T = mT_1 = nT_2$  với  $m, n$  là các số nguyên dương.

**Ví dụ 2.13.** Chứng minh rằng  $f(x) = x^2$  không là hàm tuần hoàn.

**Ví dụ 2.14.** Cho  $f$  xác định trên  $R$  và

$$f(x + 4) + f(x - 4) = f(x)$$

với mọi  $x$  thuộc  $R$ . Chứng minh rằng  $f$  là hàm tuần hoàn.

**Ví dụ 2.15.** Cho  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  thỏa

$$f(x) = f(x - 3)f(x + 3), \forall x \in \mathbb{R}$$

Chứng minh rằng  $f$  là hàm tuần hoàn.



## BÀI TẬP

**Bài 2.1.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(a)  $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 4x + 3}$ .

$$(b) y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-3x+2}$$

$$(c) y = \frac{\sqrt{7-2x}}{\sqrt{x-1}-1}$$

$$(d) y = \frac{1}{3-\sqrt{1+x}}$$

**Bài 2.2.** Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} & \text{kh}i x \geq 3 \\ \frac{1}{x+2} & \text{kh}i x < 3 \end{cases}$$

(a) Tìm  $f(1), f(-3), f(3), f(-2)$ .

(b) Tìm tập xác định của hàm số.

**Bài 2.3.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$(a) y = \frac{x+3}{2x-3} + \frac{x-1}{x-3}$$

$$(b) y = \sqrt{6-x} - \frac{\sqrt{2+x}}{3x+1}$$

$$(c) y = \sqrt{2-x} + \frac{1}{x^2-1}$$

$$(d) y = \frac{x^2-4}{x^2-x-6} + \frac{5+\sqrt{3x+12}}{1-\sqrt{5-x}}$$

**Bài 2.4.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & x > 0 \\ \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x-1}, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Tìm tập xác định của hàm số đã cho.

(b) Tính  $f(0), f(-1), f(2), f(-3)$ .

**Bài 2.5.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$(a) y = \frac{x+1}{3x-3} + \frac{3x-1}{x}$$

$$(b) y = \sqrt{4-3x} - \frac{\sqrt{1+x}}{3x+1}$$

$$(c) y = \sqrt{2-4x} + \frac{1}{x^2-9}.$$

$$(d) y = \frac{x^2-4}{x^2+x-6} + \frac{5+\sqrt{3x+10}}{1-\sqrt{4-x}}.$$

**Bài 2.6.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$(a) y = \sqrt{4-2x} + \frac{3x-1}{x^2+2x-3}.$$

$$(b) y = \frac{1+\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x-2}}.$$

$$(c) y = \frac{2x+1}{1-\sqrt{4x+3}} + \frac{x^2-1}{5-x}.$$

$$(d) y = \frac{|2x-3|+|2x+3|}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}.$$

**Bài 2.7.** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{1-\sqrt{6-3x}}{x^2-4x+3}$ .

**Bài 2.8.** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sqrt{5-6x}-\sqrt{2x+11}}{x^2+3x+2}$ .

**Bài 2.9.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$(a) y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+5x-14}.$$

$$(b) y = \sqrt{x^2-2x+5} - \frac{1}{x}.$$

$$(c) y = \frac{x^2-2}{(x-2)\sqrt{x+1}}.$$

$$(d) y = \sqrt{\frac{x+1}{3-x}}.$$

**Bài 2.10.** Tìm tập xác định của các hàm số sau

$$(a) y = \sqrt{x+4+2\sqrt{x+3}}.$$

$$(b) y = \frac{\sqrt{2x-3}}{(x^2-3x+2)\sqrt{7-x}}.$$

$$(c) y = \frac{x+\sqrt{x+4}-2\sqrt{2-x}}{-x^2+4x-3}.$$

$$(d) y = \sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{2x-1}.$$

**Bài 2.11.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$(a) y = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x} - 2} + \frac{1}{x^2 - 2x}.$$

$$(b) y = \frac{1}{\sqrt{9-x|x|}} + \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2(x+2)}}.$$

**Bài 2.12.** Biết tập xác định của hàm số  $y = f(x)$  là  $D = [-4, 0]$ . Hãy tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$(a) y = f(x+1).$$

$$(b) y = f(x^2).$$

$$(c) y = f(-x^2).$$

$$(d) y = f(4x).$$

$$(e) y = f\left(\frac{|x|}{x}\right).$$

$$(f) y = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Bài 2.13.** Tìm  $m$  để các hàm số sau xác định trên tập đã chỉ ra:

$$(a) y = \frac{2x+1}{x^2-6x+m-2} \text{ trên } D = \mathbb{R}.$$

$$(b) y = \sqrt{x-m} + \sqrt{2x-m-1} \text{ trên } D = (0, +\infty).$$

$$(c) y = \sqrt{2x-3m+4} + \frac{x-m}{x+m-1} \text{ trên } D = (0, +\infty).$$

$$(d) y = \frac{x+2m}{x-m+1} \text{ trên } (0, +\infty).$$

**Bài 2.14.** Tìm  $m$  để các hàm số sau xác định trên tập đã chỉ ra

$$(a) y = \frac{1}{\sqrt{x-m}} + \sqrt{-x+2m+6} \text{ trên } D = (-1, 0)$$

$$(b) y = \sqrt{2x+m+1} + \frac{1}{x-m} \text{ trên } D = (1, +\infty)$$

$$(c) y = \sqrt{-x^2 + (m+1)x - m} \text{ trên } [2, 6]$$

(d)  $y = \sqrt{x - m} + \sqrt{2m + 1 - x}$  trên  $[-1, 1]$

**Bài 2.15.** Tùy theo giá trị của  $m$  tìm tập xác định của các hàm số sau:

(a)  $y = \frac{2x + 3}{x\sqrt{m^2 - x^2}}$ .

(b)  $y = \frac{\sqrt{x + 3}}{x^2 - 2mx + m^2 - 1}$ .

**Bài 2.16.** Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau trên các khoảng đã cho

(a)  $y = 3x - 1$  trên  $\mathbb{R}$ .

(b)  $y = -5x + 7$  trên  $\mathbb{R}$ .

(c)  $y = x^2 - 2x - 1$  trên  $(-\infty, 1)$ .

(d)  $y = \frac{2}{x - 3}$  trên  $(3, +\infty)$ .

(e)  $y = \sqrt{2x - 1}$  trên tập xác định.

**Bài 2.17.** Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau

(a)  $y = 2020x - 2019$  trên  $\mathbb{R}$

(b)  $y = \frac{1}{x - 2048}$  trên  $(2048; +\infty)$ .

(c)  $y = x^3 + x$  trên  $\mathbb{R}$ .

(d)  $y = \sqrt{x - 4} - \sqrt{x + 1}$  trên  $(0, +\infty)$

(e)  $y = \sqrt{x + 4} + 2\sqrt{x + 3}$  trên tập xác định

(f)  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  trên  $(1, +\infty)$

**Bài 2.18.** Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

(a)  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  trên  $\mathbb{R}$ .

(b)  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 1}$  trên  $(2; +\infty)$ .

**Bài 2.19.** Chứng minh hàm số  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$  đồng biến trên  $(-\infty, 1)$  và nghịch biến trên  $(1, +\infty)$ .

**Bài 2.20.** Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau

(a)  $y = x^3 + x$  trên  $\mathbb{R}$ .

định

(b)  $y = \sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}$  trên  $(0, +\infty)$

(c)  $y = \sqrt{x+4} + 2\sqrt{x+3}$  trên tập xác định (d)  $y = \frac{x}{x^2+1}$  trên  $(1, +\infty)$

**Bài 2.21.** Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

(a)  $y = \frac{x^3}{x^2+1}$  trên  $\mathbb{R}$ .

(b)  $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$  trên  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ .

**Bài 2.22.** Chứng minh hàm số  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$  đồng biến trên  $(-\infty, 1)$  và nghịch biến trên  $(1, +\infty)$ .

**Bài 2.23.** Định  $m$  để hàm số  $y = mx^2 + 2$  nghịch biến trên  $(0, +\infty)$ .

**Bài 2.24.** Định  $m$  để hàm số  $y = x^2 - mx + 1$  đồng biến trên  $(1, 2)$ .

**Bài 2.25.** Với giá trị nào của  $m$  thì hàm số  $y = -x^2 + (m - 1)x + 2$  nghịch biến trên  $(1, 2)$ .

**Bài 2.26.** Cho hàm số  $y = ax + b|x - 1| + c|x - 2|$  luôn tăng. Chứng minh  $a > 0$ .

**Bài 2.27.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

(a)  $y = x^4 - x^2 + 1$

(b)  $y = x^3 - 3x - 4$

(c)  $y = \frac{x^4 + x^2}{1 - x^2}$

(d)  $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$

(e)  $y = x^3|x|$

(f)  $y = \frac{|x|}{x^2 - 4}$

(g)  $y = \sqrt{x}(x^2 + 1)$

(h)  $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2}$ .

**Bài 2.28.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

$$(a) y = \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt{1+2x}}{x^2 - x^4}.$$

$$(b) y = \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}}{|x| + 2}.$$

**Bài 2.29.** Cho hàm số  $y = x^2 - 2x - 1$ , có đồ thị  $G$ .

- (a) Nếu tịnh tiến  $G$  qua phải hai đơn vị thì được đồ thị hàm số nào?  
(b) Nếu tịnh tiến qua trái một đơn vị và tịnh tiến lên 3 đơn vị thì được đồ thị hàm số nào?

**Bài 2.30.** (\*) Cho hàm số  $y = \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}{x^2 - 1}$ .

- (a) Tìm tập xác định của hàm số.  
(b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số. Từ đó nhận xét về đồ thị của hàm số.

**Bài 2.31.** (\*) Cho hàm số  $y = x^2$  (1) và  $y = x^2 - 4x + 4$  (2). Tìm phép tịnh tiến để đồ thị hàm số (1) thành đồ thị hàm số (2).

**Bài 2.32.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

- (a)  $y = x^4 - x^2 + 1$   
(b)  $y = x^3 - 3x - 4$   
(c)  $y = \frac{x^4 + x^2}{1 - x^2}$   
(d)  $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$   
(e)  $y = x^3|x|$   
(f)  $y = \frac{|x|}{x^2 - 4}$   
(g)  $y = \sqrt{x}(x^2 + 1)$   
(h)  $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2}$ .

**Bài 2.33.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

$$(a) y = \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt{1+2x}}{x^2 - x^4}.$$

$$(b) y = \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}}{|x| + 2}.$$

**Bài 2.34.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

$$(a) y = \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x^2 + 5x + 6}$$

$$(b) y = \frac{|x - 2| + |x + 2|}{|x|}$$

$$(c) y = \frac{|x - 1| - |x + 1|}{|x - 1| + |x + 1|}$$

$$(d) y = \frac{x^2|x - 2|}{\sqrt{(x - 2)^2}}$$

$$(e) y = \begin{cases} x + 2017, & x \leq -1 \\ 2017, & -1 < x < 1 \\ x - 2017, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(f) y = \begin{cases} 2017, & x \geq 0 \\ 0, & -x = 0 \\ -2017, & x \leq 0 \end{cases}$$

**Bài 2.35.** Cho  $a, b, c$  là các tham số.

(a) Tìm điều kiện của  $a, b$  sao cho hàm số  $y = ax + b$  là hàm số lẻ.

(b) Tìm điều kiện của  $a, b, c$  sao cho hàm số  $y = ax^2 + bx + c$  là hàm số chẵn.

**Bài 2.36.** Tìm  $m$  để:

(a) Hàm số  $y = (m + 2)x^3 + mx^2 + (m^2 - 4)x + m - 6$  là hàm số chẵn.

(b) Hàm số  $y = 3(|m| - 1)x^4 + mx^3 - (m - 1)x^2 + x$  là hàm số lẻ.

**Bài 2.37.** Cho hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ . Đặt  $S(x) = f(x) + g(x)$ ,  $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ . Chứng minh rằng:

(a) Nếu  $f, g$  là hai hàm số chẵn thì  $S, P$  cũng là hai hàm số chẵn.

(b) Nếu  $f, g$  là hai hàm số lẻ thì  $S$  là hàm số lẻ còn  $P$  là hàm số chẵn.

(c) Nếu  $f$  là hàm số chẵn còn  $g$  là hàm số lẻ thì  $P$  là hàm số lẻ.

**Bài 2.38.** Tìm hàm số vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ.

**Bài 2.39.** Cho  $f(x)$  là một hàm số xác định trên  $\mathbb{R}$ . Chứng minh rằng  $f$  luôn biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

**Bài 2.40.** Cho hàm số  $y = \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}{x^2 - 1}$ .

(a) Tìm tập xác định của hàm số.

(b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số. Từ đó nhận xét về đồ thị của hàm số.

**Bài 2.41.** Cho hàm số  $y = \frac{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}}{4x}$ .

(a) Tìm tập xác định của hàm số.

(b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số.

**Bài 2.42.** Cho hàm số  $y = \frac{\sqrt{2x+6} - \sqrt{6-2x}}{x^2 - 4|x| + 3}$ .

(a) Tìm tập xác định của hàm số.

(b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số.

**Bài 2.43.** Giải các bài toán sau:

(a) Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sqrt{-4-3x}}{|5x+7|-4}$ .

(b) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số  $y = f(x) = \frac{|x|(x^3 - x)}{x^4 - 2x^2 - 3}$ .

**Bài 2.44.** Cho  $f : D \mapsto \mathbb{R}, g : D \mapsto \mathbb{R}$ .

(a) Chứng minh rằng nếu  $f, g$  tăng thì  $f + g$  tăng.

(b) Nếu  $f, g$  tăng và không âm thì  $f.g$  cũng tăng.

(c) Giả sử  $f(D) \in D$  thì  $g \circ f$  cũng tăng.

**Bài 2.45.** Trong các hàm số sau, hàm nào là hàm tuần hoàn?

(a)  $f(x) = |x|$ .

(b)  $f(x) = ax + b$ .

(c)  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

(d)  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

**Bài 2.46.** Cho hàm số  $f(x) = (-1)^{[x]}x$ .

- (a) Chứng minh  $f$  là hàm tuần hoàn.  
(b) Tìm chu kì cơ sở của  $f$ .

**Bài 2.47.** Chứng minh rằng nếu  $f$  là hàm số có đồ thị nhận các đường thẳng  $x = a, x = b$  ( $a \neq b$ ) thì  $f$  là hàm tuần hoàn.

**Bài 2.48.** Cho  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}$  thỏa các điều kiện sau:

- $f(x+3) \leq f(x) + 3$
- $f(x+2) \geq f(x) + 2$ ;

Với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Chứng minh rằng hàm số  $g(x) = f(x) - x$  là hàm tuần hoàn.

**Bài 2.49.** Cho  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}$  thỏa

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Chứng minh  $f$  là hàm tuần hoàn.

**Bài 2.50.** Cho  $p$  là số nguyên tố và  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, f(n) = n \pmod p$ . Chứng minh rằng  $f$  là hàm tuần hoàn, tìm chu kì cơ sở của  $f$ .

**Bài 2.51.** Cho  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}$  là hàm tuần hoàn sao cho  $f(\mathbb{N})$  chứa vô số phần tử. Chứng minh rằng chu kì của  $f$  là một số vô tỉ.

**Bài 2.52.** (IMO 1968) Cho  $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  thỏa điều kiện: với  $a > 0$  cố định ta có

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - ( )f(x)^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Chứng minh  $f$  là một hàm tuần hoàn.

## §2. HÀM SỐ BẬC HAI



### LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 2.7.** Hàm số bậc hai là hàm số được cho bởi biểu thức có dạng

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

trong đó  $a, b, c$  là những hằng số và  $a \neq 0$ .

**Tính chất 2.5.** (Sự biến thiên của hàm số và đồ thị)

(a) Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$ .

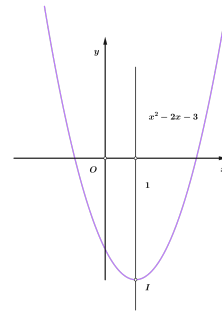
(c) Đồ thị hàm số là parabol thỏa:

(b) Tính đồng biến nghịch biến, phụ thuộc vào dấu của  $a$  như sau:

- Khi  $a > 0$  hàm số nghịch biến trên  $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ , đồng biến trên  $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$  và có GTNN bằng  $-\frac{\Delta}{4a}$  khi  $x = -\frac{b}{2a}$ .
- Khi  $a < 0$  hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ , nghịch biến trên  $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$  và có GTLN bằng  $-\frac{\Delta}{4a}$  khi  $x = -\frac{b}{2a}$ .

- Đỉnh  $I \left( -\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$ .

- Nhận đường thẳng  $x = -\frac{b}{2a}$  làm trục đối xứng.



$a > 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

$a < 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$



## VẼ VÀ KHẢO SÁT ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI

**Ví dụ 2.16.** Cho hàm số  $y = x^2 - 4x + 3$ .

- (a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.
- (b) Tìm giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành.

**Ví dụ 2.17.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^2 + ax + b$  có đồ thị hàm số có trục đối xứng là  $x = -2$  và đi qua điểm  $(0; 1)$ .

- (a) Tìm  $a, b$ .
- (b) Vẽ đồ thị hàm số  $f(x)$  và  $|f(x)|$ .



## TÌM PARABOL THỎA ĐỀ BÀI

**Ví dụ 2.18.** Xác định Parabol (P) biết

- (a)  $(P) : y = ax^2 + bx + 2$  đi qua  $A(1, 0)$  và có trục đối xứng  $x = \frac{3}{2}$ .
- (b)  $(P) : y = ax^2 - 4x + c$  đi qua  $A(1, -2), B(2, 3)$ .
- (c)  $(P) : y = ax^2 - 4x + c$  có đỉnh  $I(-2, -1)$ .



## TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ - BIỆN LUẬN NGHIỆM

**Ví dụ 2.19.** Cho hàm số  $y = 2x^2 - 3x + 1$  có đồ thị (P) và đường thẳng  $d : y = 3x + m$ . Tìm  $m$  để:

- (a)  $d$  cắt  $P$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ .
- (b)  $d$  và  $P$  có một điểm chung. Tìm tọa độ điểm chung đó.

**Ví dụ 2.20.** Cho hàm số  $y = x^2 - 5x + 6$ .

- (a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.
- (b) Dựa vào đồ thị hàm số hãy chỉ ra các khoảng mà trên đó hàm số chỉ nhận các giá trị âm (dương).
- (c) Dựa vào đồ thị hàm số hãy giải và biện luận số nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2 - m = 0.$$



## BÀI TẬP

**Bài 2.53.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

(a)  $y = \frac{-1}{2}x^2 + 2x.$

(b)  $y = -2x^2 + 4x - 5.$

(c)  $y = \frac{x^2}{4} - x + 1.$

**Bài 2.54.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

(a)  $y = \frac{-1}{2}x^2 + 2x.$

(b)  $y = -2x^2 + 4x - 5.$

(c)  $y = \frac{x^2}{4} - x + 1.$

**Bài 2.55.** Cho hàm số  $y = x^2 - 4x + 3$  (1) và  $y = 3x - 3.$

(a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1).

(b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên  $[-2; 3].$

(c) Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và (2).

**Bài 2.56.** Cho parabol  $(P) : y = ax^2 + bx + c.$  Tìm  $a, b, c$  biết  $(P)$  có đỉnh  $S(-1; 4)$  và đi qua điểm  $A(1; 2).$  Khảo sát và vẽ  $(P).$

**Bài 2.57.** Xác định Parabol  $(P)$  biết

(a)  $(P) : y = ax^2 + bx + 2$  đi qua  $A(1, 0)$  và có trục đối xứng  $x = \frac{3}{2}.$

**Bài 2.61.** Một vật được ném xiên với vận tốc ban đầu, có đường bay theo phương trình:

$$y = -0.05x^2 + 0.6x$$

(b)  $(P) : y = ax^2 - 4x + c$  đi qua  $A(1, -2), B(2, 3).$

(c)  $(P) : y = ax^2 - 4x + c$  có đỉnh  $I(-2, -1).$

**Bài 2.58.** Xác định parabol  $(P)$  biết:

(a)  $(P) : y = ax^2 - 4x + c$  có hoành độ đỉnh là  $-3$  và đi qua  $A(-2, 3).$

(b)  $(P) : y = ax^2 + bx + c$  đi qua 3 điểm  $A(0, -1), B(1, -1), C(-1, 1).$

**Bài 2.59.** Xác định parabol  $(P)$  biết:

(a)  $(P) : y = ax^2 + bx + c$  đi qua  $A(0, 5)$  và đỉnh  $I(3, -4).$

(b)  $(P) : y = ax^2 + bx + c$  đi qua  $A(0, 1)$  và tiếp xúc đường thẳng  $y = x - 1$  tại  $M(1, 0).$

**Bài 2.60.** Xác định Parabol  $(P)$  biết

(a)  $(P) : y = ax^2 + bx + c$  đi qua  $A(0, 1)$  và tiếp xúc hai đường thẳng  $y = x - 1$  và  $y = -2x + 1.$

(b)  $(P) : y = ax^2 + bx + c$  đạt cực tiểu bằng 2 và cắt đồ thị hàm số  $y = -2x + 6$  tại hai điểm có tung độ tương ứng bằng 2 và 10.

(c)  $(P) : y = ax^2 + bx + c$  qua  $M(-2, 3), N(2, 3)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $y = 1$  tại đỉnh.

Trong đó  $x$  là khoảng cách ngang (m),  $y$  là độ cao (m). Tính:

- Độ cao lớn nhất vật đạt được.
- Tầm bay xa nhất.

**Bài 2.62.** Mặt cắt cây cầu là parabol, rộng 20m, cao 5m. Đỉnh vòm ở giữa. Tìm phương trình parabol.

**Bài 2.63.** Lợi nhuận (triệu đồng):  $L(x) = -2x^2 + 40x - 100$ . Hỏi nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

# CHƯƠNG

## 3



## PHƯƠNG TRÌNH-BẤT PHƯƠNG TRÌNH

### §1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



#### TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 3.1.** Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax + by + c < 0; ax + by + c > 0; ax + by + c \leq 0; ax + by + c \geq 0$$

trong đó  $a, b, c$  là những số cho trước;  $a, b$  không đồng thời bằng 0 và  $x, y$  là các ẩn.

**Định nghĩa 3.2.** Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Xét bất phương trình  $ax + by + c < 0$ . Mỗi cặp số  $(x_0; y_0)$  thoả mãn  $ax_0 + by_0 + c < 0$  được gọi là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , tập hợp các điểm  $(x_0; y_0)$  sao cho  $ax_0 + by_0 + c < 0$  được gọi là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by + c < 0$ .

#### Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Ta có thể biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $ax + by + c < 0$  như sau:

**Bước 1:** Trên mặt phẳng  $Oxy$ , vẽ đường thẳng  $\Delta : ax + by + c = 0$ .

**Bước 2:** Lấy một điểm  $(x_0; y_0)$  không thuộc  $\Delta$ . Tính  $ax_0 + by_0 + c$ .

**Bước 3:** Kết luận

- Nếu  $ax_0 + by_0 + c < 0$  thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ  $\Delta$ ) chứa điểm  $(x_0; y_0)$ .
- Nếu  $ax_0 + by_0 + c > 0$  thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ  $\Delta$ ) không chứa điểm  $(x_0; y_0)$ .



**Bài 3.2.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :

(a)  $-x + y + 2 > 0$ ;

(b)  $y + 2 \geq 0$ ;

(c)  $-x + 2 \leq 0$ .

**Bài 3.3.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :

(a)  $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$

(b)  $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$

**Bài 3.4.** Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng  $60 \text{ m}^2$ . Diện tích để kê một chiếc ghế là  $0,5 \text{ m}^2$ , một chiếc bàn là  $1,2 \text{ m}^2$ . Gọi  $x$  là số chiếc ghế,  $y$  là số chiếc bàn được kê.

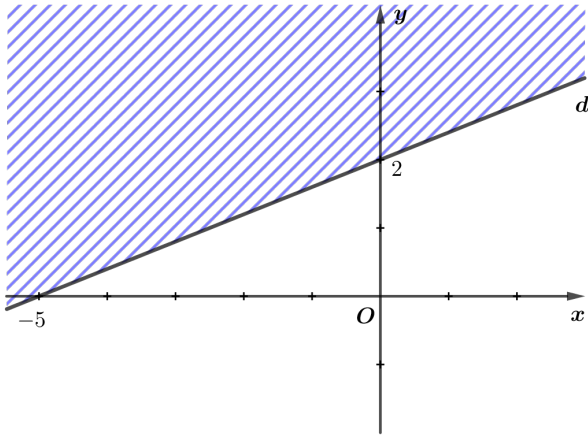
(a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là  $12 \text{ m}^2$ .

(b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

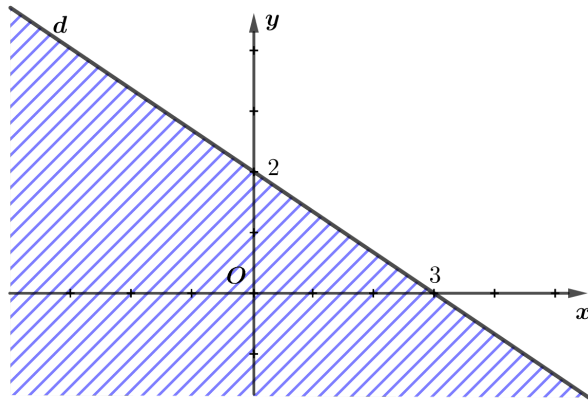
**Bài 3.5.** Bạn Cúc muốn pha hai loại nước cam. Để pha một lít nước cam loại I cần  $30 \text{ g}$  bột cam, còn một lít nước cam loại II cần  $20 \text{ g}$  bột cam. Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số lít nước cam loại I và II pha chế được. Biết rằng Cúc chỉ có thể dùng không quá  $100 \text{ g}$  bột cam. Hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước cam loại I và II mà bạn Cúc có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đó trên cùng một mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

**Bài 3.6.** Trong  $1 \text{ lạng}$  ( $100 \text{ g}$ ) thịt bò chứa khoảng  $26 \text{ g}$  protein,  $1 \text{ lạng}$  cá rô phi chứa khoảng  $20 \text{ g}$  protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu  $46 \text{ g}$  protein. (Nguồn: <https://vinmec.com> và <https://thanhmien.vn>) Gọi  $x, y$  lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

**Bài 3.7.** Miền không gạch chéo (không kể bờ  $d$ ) trong mỗi hình dưới đây là miền nghiệm của bất phương trình nào?



a)



b)

## §2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ ỨNG DỤNG



### BIỂU DIỄN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

**Định nghĩa 3.3.** Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$ . Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tập hợp các điểm  $(x_0; y_0)$  có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

**Lưu ý 3.1.** Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , ta thực hiện như sau:

- Trên cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.
- Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

**Ví dụ 3.6.** Biểu diễn miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

$$(a) \begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ -2x + y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - y - 3 \leq 0 \\ 2x - y + 2 \leq 0. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$



## TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT NHỎ NHẤT CỦA $F(x; y) = ax + by$ TRÊN MIỀN ĐA GIÁC

**Lưu ý 3.2.** Hệ bất phương trình giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu. Chúng thường được đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức  $F = ax + by$  trên một miền đa giác. Người ta chứng minh được  $F$  đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác.

**Ví dụ 3.7.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $A = 3x - 4y$  biết  $x, y$  thỏa

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y \geq 4 \\ 2x + 5y \leq 20 \\ 2x - 3y \leq 4 \end{array} \right.$$

**Ví dụ 3.8.** Bác Năm dự định trồng ngô và đậu xanh trên một mảnh đất có diện tích 8 ha. Nếu trồng 1 ha ngô thì cần 20 ngày công và thu được 40 triệu đồng. Nếu trồng 1 ha đậu xanh thì cần 30 ngày công và thu được 50 triệu đồng. Bác Năm cần trồng bao nhiêu hecta cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác Năm chỉ có thể sử dụng không quá 180 ngày công cho việc trồng ngô và đậu xanh.

**Ví dụ 3.9.** Một người bán nước giải khát đang có 24 g bột cam, 9l nước và 210 g đường để pha chế hai loại nước cam  $A$  và  $B$ . Để pha chế 1l nước cam loại  $A$  cần 30 g đường, 1l nước và 1 g bột cam; để pha chế 1l nước cam loại  $B$  cần 10 g đường, 1l nước và 4 g bột cam. Mỗi lít nước cam loại  $A$  bán được 60 nghìn đồng, mỗi lít nước cam loại  $B$  bán được 80 nghìn đồng. Người đó nên pha chế bao nhiêu lít nước cam mỗi loại để có doanh thu cao nhất?

## 1 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 3.8.** Cho hệ bất phương trình sau (I) :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

- (a) Xác định miền nghiệm của hệ (I).
- (b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của  $f(x, y) = 3x + 4y$  trên miền nghiệm của hệ (I)

**Bài 3.9.** Có 1 xưởng sản xuất 2 loại sản phẩm, mỗi cân sản phẩm loại I cần 2 cân nguyên liệu và 30 giờ sản xuất, mức lợi nhuận đem lại là 40.000 đồng. Mỗi cân sản phẩm loại II cần 4 cân nguyên liệu và 15 giờ sản xuất, mức lợi nhuận đem lại là 30.000 đồng. Xưởng có 200 cân nguyên liệu và 120 giờ làm việc. Hỏi giám đốc của xưởng nên cho sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu cân để có mức lợi nhuận cao nhất?

**Bài 3.10.** Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000 .000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000 .000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

**Bài 3.11.** Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lợi nhuận 40000 đồng. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lợi nhuận 30000 đồng. Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lợi nhuận cao nhất?

**Bài 3.12.** Một công ty cần thuê xe vận chuyển 140 người và 9 tấn hàng hóa. Nơi cho thuê xe chỉ có 10 xe hiệu MITSUBISHI và 9 xe hiệu FORD. Một chiếc xe hiệu MITSUBISHI có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng. Một chiếc xe hiệu FORD có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng. Tiền thuê một xe hiệu MITSUBISHI là 4 triệu đồng, một xe hiệu FORD là 3 triệu đồng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí thấp nhất?

**Bài 3.13.** Nhân dịp tết Trung Thu, Xí nghiệp sản xuất bánh muốn sản xuất hai loại bánh: Đậu xanh, Bánh dẻo nhân đậu xanh. Để sản xuất hai loại bánh này, Xí nghiệp cần: Đường, Đậu, Bột, Trứng, Mứt, ... Giả sử số đường có thể chuẩn bị được là 300 kg, đậu là 200 kg, các nguyên liệu khác bao nhiêu cũng có. Sản xuất một cái bánh đậu xanh cần 0,06 kg đường, 0,08 kg đậu và cho lãi 2 ngàn đồng. Sản xuất một cái bánh dẻo cần 0,07 kg đường, 0,04 kg đậu và cho lãi 1,8 ngàn đồng. Cần lập kế hoạch để sản xuất mỗi loại bánh bao nhiêu cái để không bị đọng về đường, đậu và tổng số lãi thu được là lớn nhất (nếu sản xuất bao nhiêu cũng bán hết)?

**Bài 3.14.** Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất? Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

**Bài 3.15.** Nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là 1300mg. Trong 1 lạng đậu nành có 165mg canxi, 1 lạng thịt có 15mg canxi. (Nguồn: <https://hongngochospital.vn>) Gọi  $x, y$  lần lượt là số lạng đậu nành và số lạng thịt mà một người đang độ tuổi trưởng thành ăn trong một ngày.

(a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  để biểu diễn lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người trong độ tuổi trưởng thành.

(b) Chỉ ra một nghiệm  $(x_0; y_0)$  với  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$  của bất phương trình đó.

**Bài 3.16.** Bác Ngọc thực hiện chế độ ăn kiêng với yêu cầu tối thiểu hàng ngày qua thức uống là 300 ca-lo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ nhất cung cấp 60 ca-lo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ hai cung cấp 60 ca-lo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C.

- (a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.
- (b) Chỉ ra hai phương án mà bác Ngọc có thể chọn lựa số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai nhằm đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

### §3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 3 ẨN



#### LÍ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

**Định nghĩa 3.4.** - Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

trong đó  $x, y, z$  là ba ẩn,  $a_i, b_i, c_i, d_i$  là các số thực cho trước gọi là các hệ số. Ở đây các hệ số  $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, 3)$  không đồng thời bằng 0. Mỗi bộ ba số  $(x_0; y_0; z_0)$  thỏa mãn đồng thời cả ba phương trình của hệ gọi là một nghiệm của hệ phương trình.

**Ví dụ 3.10.** Cho các hệ phương trình: (1)  $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3y - z = 2 \\ 2z = 3 \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 2y + z = -1 \\ 2y - z = -4. \end{cases}$

- (a) Hệ phương trình (1) có gì đặc biệt? Giải hệ phương trình này.
- (b) Biến đổi hệ phương trình (2) về dạng như hệ phương trình (1). Giải hệ phương trình (2).

**Ví dụ 3.11.** Biến đổi hệ phương trình sau về hệ phương trình bậc nhất ba ẩn dạng tam giác rồi giải hệ vừa tìm được.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ y + 2z = 1. \end{cases}$$

**Lưu ý 3.3.** Để giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn, ta có thể sử dụng các phép biến đổi tương đương để đưa nó về hệ phương trình bậc nhất ba ẩn dạng tam giác, từ đó tìm nghiệm của hệ.

Cách giải như trên gọi là giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng phương pháp Gauss.

**Ví dụ 3.12.** Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x + 5y - 4z = 2 \end{cases}$$

**Ví dụ 3.13.** Giá vé vào xem một buổi biểu diễn xiếc gồm ba loại: 40000 đồng dành cho trẻ em (dưới 6 tuổi), 60000 đồng dành cho học sinh và 80000 đồng dành cho người lớn. Tại buổi biểu diễn, 900 vé đã được bán ra và tổng số tiền thu được là 50600000 đồng. Người ta đã bán được bao nhiêu vé trẻ em, bao nhiêu vé học sinh và bao nhiêu vé người lớn cho buổi biểu diễn đó? Biết rằng số vé người lớn bằng một nửa số vé trẻ em và học sinh cộng lại.

**Ví dụ 3.14.** Ba vận động viên Sơn, Thắng và Ánh tham gia thi đấu nội dung ba môn phối hợp: chạy, bơi và đạp xe, trong đó tốc độ trung bình của họ trên mỗi chặng đua được cho ở bảng dưới đây.

Vận động viên	Tốc độ trung bình (km/h)		
	Chạy	Bơi	Đạp xe
Sơn	12,5	3,6	48
Thắng	12	3,75	45
Ánh	12,5	4	45

Biết tổng thời gian thi đấu ba môn phối hợp của Sơn là 1 giờ 1 phút 30 giây, của Thắng là 1 giờ 3 phút 40 giây và của Ánh là 1 giờ 1 phút 55 giây. Tính cự li của mỗi chặng đua.

**Ví dụ 3.15.** Ba tế bào  $A, B, C$  sau một số lần nguyên phân tạo ra 88 tế bào con. Biết số tế bào  $B$  tạo ra gấp đôi số tế bào  $A$  tạo ra. Số lần nguyên phân của tế bào  $B$  ít hơn số lần nguyên phân của tế bào  $C$  là hai lần. Tính số lần nguyên phân của mỗi tế bào, biết rằng một tế bào sau một lần nguyên phân sẽ tạo ra hai tế bào mới giống tế bào ban đầu.

**Ví dụ 3.16.** Để nghiên cứu tác dụng của ba loại vitamin kết hợp với nhau, một nhà sinh vật học muốn mỗi con thỏ trong phòng thí nghiệm có chế độ ăn uống hằng ngày chứa chính xác 15mg thiamine (B1), 40mg riboflavin (B2) và 10mg niacin (B3). Có ba loại thức ăn với hàm lượng vitamin được cho bởi bảng dưới đây:

Loại vitamin	Hàm lượng vitamin (miligam) trong 100 g thức ăn		
	Loại I	Loại II	Loại III
Thiamine (B1)	3	2	2
Riboflavin (B2)	7	5	7
Niacin (B3)	2	2	1

Mỗi con thỏ cần phải được cung cấp bao nhiêu gam thức ăn mỗi loại trong một ngày?

**Ví dụ 3.17.** Một ông chủ trang trại có 24 ha đất canh tác dự định sử dụng để trồng khoai tây, bắp cải và su hào với chi phí đầu tư cho mỗi hecta lần lượt là 28 triệu đồng, 24 triệu đồng và 32 triệu đồng. Qua thăm dò thị trường, ông đã tính toán được diện tích đất trồng khoai tây cần gấp ba diện tích đất trồng bắp cải. Biết rằng ông có tổng nguồn vốn sử dụng để trồng ba loại cây trên là 688 triệu đồng. Tính diện tích đất cần sử dụng để trồng mỗi loại cây.

**Ví dụ 3.18.** Giả sử  $P_1, P_2, P_3$  lần lượt là giá bán (gọi tắt là giá) mỗi kilôgam thịt lợn, thịt bò và thịt gà trên thị trường. Qua khảo sát, người ta thấy rằng lượng cung (lượng sản phẩm được đưa vào thị trường để bán) của từng sản phẩm này phụ thuộc vào giá của nó theo công thức như sau:

Sản phẩm	Thịt lợn	Thịt bò	Thịt gà
Lượng cung	$Q_{S_1} = -238 + 2P_1$	$Q_{S_2} = -247 + P_2$	$Q_{S_3} = -445 + 3P_3$

Qua khảo sát, người ta thấy lượng cầu (lượng sản phẩm mà người tiêu dùng có nhu cầu mua) của từng sản phẩm không chỉ phụ thuộc vào giá của sản phẩm đó mà còn phụ thuộc vào giá hai sản phẩm còn lại theo các công thức sau:

Sản phẩm	Thịt lợn	Thịt bò	Thịt gà
Lượng cầu	$Q_{D_1} = 22 - P_1 + P_2 - P_3$	$Q_{D_2} = 283 + P_1 - P_2 - P_3$	$Q_{D_3} = 25 - P_1 + P_2 - P_3$

Ta nói thị trường cân bằng nếu lượng cung mỗi sản phẩm bằng lượng cầu của sản phẩm đó, tức là:  $Q_{S_1} = Q_{D_1}, Q_{S_2} = Q_{D_2}$  và  $Q_{S_3} = Q_{D_3}$ . Giá của mỗi sản phẩm trên bằng bao nhiêu thì thị trường cân bằng?



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 3.17.** Trong các hệ phương trình sau, hệ nào là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn? Mỗi bộ ba số  $(-1; 2; 1), (-1, 5; 0, 25; -1, 25)$  có là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn đó không?

$$(a) \begin{cases} 3x - 2y + z = -6 \\ -2x + y + 3z = 7 \\ 4x - y + 7z = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 5x - 2y + 3z = 4 \\ 3x + 2yz - z = 2 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - 4y - 3z = \frac{-1}{4} \\ 3x + 8y - 4z = \frac{5}{2} \\ 2x + 3y - 2z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

**Bài 3.18.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$(a) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 3y = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 8 \\ 3x - y + z = 4; \end{cases}$$

**Bài 3.19.** Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các hệ phương trình sau:

$$(a) \begin{cases} x - 5z = 2 \\ 3x + y - 4z = 3 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 4x - 7y - 4z = 4 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

**Bài 3.20.** Tìm phương trình của parabol  $(P) : y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ , biết:

- (a) Parabol  $(P)$  có trục đối xứng  $x = 1$  và đi qua hai điểm  $A(1; -4), B(2; -3)$ ;  
 (b) Parabol  $(P)$  có đỉnh  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$  và đi qua điểm  $M(-1; 3)$ .

**Bài 3.21.** Một đại lí bán ba loại gas  $A, B, C$  với giá bán mỗi bình gas lần lượt là 520000 đồng, 480000 đồng, 420000 đồng. Sau một tháng, đại lí đã bán được 1299 bình gas các loại với tổng doanh thu đạt 633960000 đồng. Biết rằng trong tháng đó, đại lí bán được số bình gas loại  $B$  bằng một nửa tổng số bình gas loại  $A$  và  $C$ . Tính số bình gas mỗi loại mà đại lí bán được trong tháng đó.

**Bài 3.22.** Một đại lí bán ba mẫu máy điều hoà  $A, B$  và  $C$ , với giá bán mỗi chiếc theo từng mẫu lần lượt là 8 triệu đồng, 10 triệu đồng và 12 triệu đồng. Tháng trước, đại lí bán được 100 chiếc gồm cả ba mẫu và thu được số tiền là 980 triệu đồng. Tính số lượng máy điều hoà mỗi mẫu đại lí bán được trong tháng trước, biết rằng số tiền thu được từ bán máy điều hoà mẫu  $A$  và mẫu  $C$  là bằng nhau.

**Bài 3.23.** Nhân dịp kỉ niệm ngày thành lập Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh, một trường Trung học phổ thông đã tổ chức cho học sinh tham gia các trò chơi. Ban tổ chức đã chọn 100 bạn và chia thành ba nhóm  $A, B, C$  để tham gia trò chơi thứ nhất. Sau khi trò chơi kết thúc, ban tổ chức chuyển  $\frac{1}{3}$  số bạn ở nhóm  $A$  sang nhóm  $B$ ;  $\frac{1}{2}$  số bạn ở nhóm  $B$  sang nhóm  $C$ ; số bạn chuyển từ nhóm  $C$  sang nhóm  $A$  và  $B$  đều bằng  $\frac{1}{3}$  số bạn ở nhóm  $C$  ban đầu. Tuy nhiên, người ta nhận thấy số bạn ở mỗi nhóm là không đổi qua hai trò chơi. Ban tổ chức đã chia mỗi nhóm bao nhiêu bạn? Một cửa hàng giải khát chỉ phục vụ ba loại sinh tố: xoài, bơ và măng cầu. Để pha mỗi li (cốc) sinh tố này đều cần dùng đến sữa đặc, sữa tươi và sữa chua với công thức cho ở bảng sau.

Sinh tố (li)	Sữa đặc (ml)	Sữa tươi (ml)	Sữa chua (ml)
Xoài	20	100	30
Bơ	10	120	20
Măng cầu	20	100	20

Ngày hôm qua cửa hàng đã dùng hết 2l sữa đặc; 12,8l sữa tươi và 2,9l sữa chua. Cửa hàng đã bán được bao nhiêu li sinh tố mỗi loại trong ngày hôm qua?

**Bài 3.24.** Ba tế bào  $A, B, C$  sau một số lần nguyên phân tạo ra 168 tế bào con. Biết số tế bào  $A$  tạo ra gấp bốn lần số tế bào  $B$  tạo ra và số lần nguyên phân của tế bào  $C$  nhiều hơn số lần nguyên phân của tế bào  $B$  là bốn lần. Tính số lần nguyên phân của mỗi tế bào.

**Bài 3.25.** Bà Hà có 1 tỉ đồng để đầu tư vào cổ phiếu, trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng. Cổ phiếu sinh lợi nhuận 12% năm, trong khi trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng cho lãi suất lần lượt là 8%/ năm và 4%/ năm. Bà Hà đã quy định rằng số tiền gửi tiết kiệm ngân hàng phải bằng tổng của 20% số tiền đầu tư vào cổ phiếu và 10% số tiền đầu tư vào trái phiếu. Bà Hà nên phân bổ nguồn vốn của mình như thế nào để nhận được 100 triệu đồng tiền lãi từ các khoản đầu tư đó trong năm đầu tiên?

**Bài 3.26.** Trên thị trường có ba loại sản phẩm  $A, B, C$  với giá mỗi tấn sản phẩm tương ứng là  $x, y, z$  (đơn vị: triệu đồng,  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ). Lượng cung và lượng cầu của mỗi sản phẩm được cho trong bảng dưới đây:

Sản phẩm	Lượng cung	Lượng cầu
$A$	$Q_{S_A} = 4x - y - z - 5$	$Q_{D_A} = -2x + y + z + 9$
$B$	$Q_{S_B} = -x + 4y - z - 5$	$Q_{D_B} = x - 2y + z + 3$
$C$	$Q_{S_C} = -x - y + 4z - 1$	$Q_{D_C} = x + y - 2z - 1$

Tìm giá bán của mỗi sản phẩm để thị trường cân bằng.

**Bài 3.27.** Tìm phương trình của parabol  $(P) : y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ , biết: a) Parabol  $(P)$  cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là  $x = -2; x = 1$  và đi qua điểm  $M(-1;3)$ ; b) Parabol  $(P)$  cắt trục tung tại điểm có tung độ  $y = -2$  và hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $-4$  tại  $x = 2$ .

**Bài 3.28.** Một viên lam ngọc và hai viên hoàng ngọc trị giá gấp 3 lần một viên ngọc bích. Còn bảy viên lam ngọc và một viên hoàng ngọc trị giá gấp 8 lần một viên ngọc bích. Biết giá tiền của bộ ba viên ngọc này là 270 triệu đồng. Tính giá tiền mỗi viên ngọc.

**Bài 3.29.** Bốn ngư dân góp vốn mua chung một chiếc thuyền. Số tiền người đầu tiên đóng góp bằng một nửa tổng số tiền của những người còn lại. Người thứ hai đóng góp bằng  $\frac{1}{3}$  tổng số tiền của những người còn lại. Người thứ ba đóng góp bằng  $\frac{1}{4}$  tổng số tiền của những người còn lại. Người thứ tư đóng góp 130 triệu đồng. Chiếc thuyền này được mua giá bao nhiêu?

**Bài 3.30.** Một quỹ đầu tư dự kiến dành khoản tiền 1,2 tỉ đồng để đầu tư vào cổ phiếu. Để thấy được mức độ rủi ro, các cổ phiếu được phân thành ba loại: rủi ro cao, rủi ro trung bình và rủi ro thấp. Ban Giám đốc của quỹ ước tính các cổ phiếu rủi ro cao, rủi ro trung bình và rủi ro thấp sẽ có lợi nhuận hàng năm lần lượt là 15%, 10% và 6%. Nếu đặt ra mục tiêu đầu tư có lợi nhuận trung bình là 9% / năm trên tổng số vốn đầu tư, thì quỹ nên đầu tư bao nhiêu tiền vào mỗi loại cổ phiếu? Biết rằng, để an toàn, khoản đầu tư vào các cổ phiếu rủi ro thấp sẽ gấp đôi tổng các khoản đầu tư vào các cổ phiếu thuộc hai loại còn lại.

## §4. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI



### LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

**Định nghĩa 3.5.** Tam thức bậc hai (đối với biến  $x$ ) là biểu thức có dạng  $ax^2 + bx + c$ , trong đó  $a, b, c$  là các số cho trước với  $a \neq 0$ .

**Định lí 3.1.** Cho tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ . Khi đó

- (a) Nếu  $\Delta < 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Nếu  $\Delta = 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \neq -\frac{b}{2a}$ .
- (c) Nếu  $\Delta > 0$  thì  $f(x)$  có hai nghiệm  $x_1 < x_2$ . Khi đó  $f(x)$  trái dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x$  nằm trong khoảng  $(x_1, x_2)$  và  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x$  nằm ngoài đoạn  $[x_1, x_2]$ .

Từ định lí về dấu của tam thức bậc hai ta có

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

**Ví dụ 3.19.** Xét dấu các tam thức sau:

(a)  $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$

(b)  $f(x) = 2x^2 + 3x + 12$

**Ví dụ 3.20.** Xác định  $m$  sao cho với mọi  $x \in \mathbb{R}$  ta có:

(a)  $(m - 1)x^2 + 2(m - 2)x + m + 3 > 0$

(b)  $(m + 1)x^2 + 2(m + 1)x + m - 2 \leq 0$

**Ví dụ 3.21.** Tìm  $m$  để bất phương trình

$$(m - 2)x^2 + 2(m - 2)x + m + 4 \leq 0$$

vô nghiệm.

**Ví dụ 3.22.** Tìm  $m$  để bất phương trình

$$(3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 < 0$$

có nghiệm.

**Ví dụ 3.23.** Cho tam thức bậc hai  $f(x) = x^2 + 2mx + m$ . Tìm  $m$  để

- (a)  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in (0, +\infty)$
- (b)  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in (-1, +\infty)$
- (c)  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ .



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 3.31.** Ứng dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai giải các bất phương trình sau:

- (a)  $x^2 - 4x + 3 \geq 0$
- (b)  $-2x^2 + 5x - 3 \geq 0$
- (c)  $\frac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 7} \geq 0$
- (d)  $\frac{(2 - x^2)(x^2 - 2x + 1)}{-x^2 + 3x + 4} > 0$

**Bài 3.32.** Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m \in \mathbb{R}$

- (a)  $4x^2 + 4(m + 2)x + 3m + 2 = 0$
- (b)  $mx^2 + (5m + 6)x + m - 1 = 0$
- (c)  $(3m - 1)x^2 + 3(m + 1)x + 1 = 0$

**Bài 3.33.** Chứng minh rằng các bất phương trình sau vô nghiệm

- (a)  $(m + 1)x^2 + 3(m + 1)x + 1 = 0$
- (b)  $(2m^2 - 7m + 10)x^2 + 2(m - 3)x + 1 = 0$

**Bài 3.34.** Định  $m$  sao cho các bất phương trình sau đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$  (tức có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ )

(a)  $mx^2 - 4(m+1)x + m - 5 > 0$

(g)  $-4 < \frac{2x^2 + mx - 4}{-x^2 + x - 1} < 6$

(b)  $(m-2)x^2 + 2(m-2)x + 2 \geq 0$

(c)  $(m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m-1)x + 2 \leq 0$

(h)  $|3(m+6)x^2 - 3(m+3)x + 2m - 3| \geq 3$

(d)  $(m-4)x^2 + (m+1)x + 2m - 1 < 0$

(e)  $\frac{x^2 - 6x + 40}{mx^2 + 2(m+3)x + m - 4} < 0$

(i)  $|\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + mx + 1}| \leq 3$

(f)  $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$

(j)  $|\frac{3x^2 - 4x}{x^2 + 2mx + 3m}| \geq 2$

**Bài 3.35.** Định  $m$  để các bất phương trình sau vô nghiệm

(a)  $(m-2)x^2 + (m-2)x + m \leq 0$

(b)  $(m+3)x^2 + 2(m-1)x + 4m < 0$

(c)  $(3-m)x^2 - 2(2m-5)x - 2m + 5 \geq 0$

(d)  $m(m+8)x^2 - 2(m+8)x + 8m + 1 > 0$

**Bài 3.36.** Định  $m$  để các bất phương trình sau có nghiệm:

(a)  $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 \leq 0$

(b)  $(m-2)x^2 + 2(m-2)x + 2 < 0$

(c)  $mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 \geq 0$

(d)  $(m+2)x^2 + 2(m+2)x + m + 4 > 0$

**Bài 3.37.** Tìm  $m$  để bất phương trình sau thỏa với điều kiện cho trước

(a)  $x^2 + 2(m+1)x - m + 3 \geq 0, \forall x \leq 0$

(b)  $x^2 + 2(m+1)x - m + 3 \leq 0, \forall x \geq 0$

(c)  $x^2 + 2mx + m > 0, \forall x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

(d)  $(2-m)x^2 + 2(m-4)x - m + 2 < 0, \forall x < 0$

(e)  $x^2 - 2(m-2)x + m - 2 \leq 0, \forall x \in [0, 1]$

(f)  $(m-2)x^2 - 2(m-2)x + m - 2 \leq 0, \forall x \in [0, 1]$

(g)  $(x - m + 1)(2x - m + 3) < 0, \forall x \in (1, 2)$

(h)  $(x - 3 + 4m)(x + 2m - 1) > 0, \forall x \in [3, +\infty)$

**Bài 3.38.** Tìm  $m$  để bất phương trình  $f(x) = mx^2 - 2(m - 1)x - m - 5 \leq 0$

(a) Có nghiệm.

(b) Có duy nhất một nghiệm.

(c) Có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 2.

**Bài 3.39.** Tìm  $m$  để để hàm số sau có tập xác định là  $\mathbb{R}$

(a)  $y = f(x) = \sqrt{m(m - 4)x^2 + 4mx + 3}$

(b)  $y = f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2 - 2mx + 5m - 4}}$

(c)  $y = f(x) = \sqrt{\frac{3x^2 - 4x}{x^2 + mx + m} - 2}$

(d)  $y = f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + mx + 4}{mx^2 + 2\sqrt{3}x + m - 2}}$

**Bài 3.40.** Tìm  $m$  sao cho hàm số  $y = f(x) = \sqrt{(m + 1)x^2 - 2mx + 3m - 3}$  xác định với mọi  $x > 1$ .

**Bài 3.41.** Tìm  $m$  sao cho  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3m(x + \frac{1}{x}) > 0, \forall x \neq 0$ .

**Bài 3.42.** Cho hệ bất phương trình  $\begin{cases} 3x^2 - x - 10 \leq 0 \\ mx + 2m - 1 \leq 0 \end{cases}$ . Tìm  $m$  để hệ có nghiệm

là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 3.

**Bài 3.43.** Định  $m$  để hệ  $\begin{cases} x^2 - 2x - 4m \leq 0 \\ x^2 - 4x + m \leq 0 \end{cases}$ .

(a) Có nghiệm.

(b) Có nghiệm duy nhất.

**Bài 3.44.** Định  $m$  để hệ  $\begin{cases} (m - 1)x^2 + (m - 1)x + m - 1 \geq 0 \\ mx^2 - 2x + 2m + 1 \leq 0. \end{cases}$

- (a) Có nghiệm.
- (b) Vô nghiệm.
- (c) Có nghiệm duy nhất.

## §5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI



### LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

**Định lí 3.2.** Nhị thức bậc nhất  $f(x) = ax + b (a \neq 0)$  cùng dấu với hệ số  $a$  khi  $x$  lớn hơn nghiệm và trái dấu với hệ số  $a$  khi  $x$  nhỏ hơn nghiệm.

Nói các khác, kết quả của định lí trên được tóm tắt trong bảng sau

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	trái dấu với $a$		0 cùng dấu với $a$

**Định nghĩa 3.6.** Tam thức bậc hai (đối với biến  $x$ ) là biểu thức có dạng  $ax^2 + bx + c$ , trong đó  $a, b, c$  là các số cho trước với  $a \neq 0$ .

**Định lí 3.3.** Cho tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ . Khi đó

- (a) Nếu  $\Delta < 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Nếu  $\Delta = 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \neq -\frac{b}{2a}$ .
- (c) Nếu  $\Delta > 0$  thì  $f(x)$  có hai nghiệm  $x_1 < x_2$ . Khi đó  $f(x)$  trái dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x$  nằm trong khoảng  $(x_1, x_2)$  và  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x$  nằm ngoài đoạn  $[x_1, x_2]$ .

**Ví dụ 3.24.** Giải các bất phương trình sau:

(a)  $\frac{1}{2}(x+1) - 2(x+3) < 2x+1.$

(c)  $2x^2 - 4x + \frac{1}{3} < 2(x+1)^2 - \frac{1}{3}x.$

(b)  $-\frac{1}{3}(4x+1) - 2(x+3) \geq 2x + \frac{1}{4}.$

(d)  $(x-1)^2 + (2x-3)^2 > (2x+1)^2 + (x-3)^2.$

**Ví dụ 3.25.** Giải các bất phương trình sau: Ứng dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai giải các bất phương trình sau:

(a)  $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

(c)  $4x^2 + 3x - 1 \geq 3x^2 + 2x - 30$

(b)  $-2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

(d)  $2 - x^2 - 2x \geq -x^2 + 3x + 4$



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 3.45.** Giải các bất phương trình sau

(a)  $2(4x + 1) - 4(5 - 2x) > 2(4x - 1) - 1;$

(b)  $(x^2 - 4x)x - x^3 > 3 - 3x - 4x^2;$

(c)  $\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} \geq \frac{x-3}{5} + \frac{5}{4};$

(d)  $\frac{2x(x^2 + 1) - x^2 - 4}{3} + x(x^2 - x + 1) > \frac{5}{3}(x^2 + 1).$

**Bài 3.46.** Giải các bất phương trình  $x$ .

(a)  $-x^2 + x + 1 > 0;$

(d)  $-x^2 + 2x + 4 < 0;$

(b)  $2x^2 - 4x - 3 > 0;$

(c)  $x^2 - 3 > 2x;$

(e)  $-3x^2 - 6x - 8 < 0.$

**Bài 3.47.** Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m \in \mathbb{R}$

(a)  $4x^2 + 4(m + 2)x + 3m + 2 = 0$

(b)  $mx^2 + (5m + 6)x + m - 1 = 0$

(c)  $(3m - 1)x^2 + 3(m + 1)x + 1 = 0$

**Bài 3.48.** Chứng minh rằng các bất phương trình sau vô nghiệm

(a)  $(m + 1)x^2 + 3(m + 1)x + 1 = 0$

(b)  $(2m^2 - 7m + 10)x^2 + 2(m - 3)x + 1 = 0$

## §6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH-CHỨA ẨN Ở MẪU



### LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

**Ví dụ 3.26.** Giải bất phương trình sau

$$(2x + 1)(x - 2)(4 - 3x)(5 + 3x) < 0$$

**Ví dụ 3.27.** Giải bất phương trình sau

$$(2x + 1)^{15}(x - 2)^2(4 - 3x)^3(5 + 3x)^{10} < 0$$

**Ví dụ 3.28.** Giải bất phương trình sau

$$\frac{(3x + 2)(2x - 1)(3 - 2x)^4}{(x + 1)^3(2x - 4)} \geq 0$$

**Ví dụ 3.29.** Giải bất phương trình

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x^3 - 1} \leq 0$$



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 3.49.** Giải các bất phương trình sau:

$$(a) \frac{(x^2 - 4)(x + 2)}{x^2 - 8x + 12} > 0$$

$$(c) (x^2 - x + 1)(-4x^2 + 9x - 5) < 0$$

$$(b) \frac{x - 3}{x^2 - 12x + 35} \leq 0$$

$$(d) \frac{(2x^2 + 1)(25 - 9x^2)}{4 - 3x - x^2} \leq 0$$

**Bài 3.50.** Giải các bất phương trình sau

$$(a) \frac{2x - 5}{x^2 - 6x - 7} < \frac{1}{x - 3}$$

$$(c) \frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} \geq \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$$

$$(b) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} \leq \frac{x + 1}{x}$$

**Bài 3.51.** Giải các hệ bất phương trình sau:

$$(a) \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x - 16 < 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(d) -4 \leq \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1$$

$$(b) \begin{cases} 3x^2 + 8x - 3 \leq 0 \\ 17x - 7 - 6x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} (x - 2)(6 - x) \geq 0 \\ (-\sqrt{3}x + 2)(x + 1)(4x - 5) \geq 0 \end{cases}$$

## §7. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LŨY THỪA

Mục đích của phương pháp lũy thừa là làm mất dấu căn thức để đưa về phương trình dạng đa thức bậc cao, giải phương trình đó ta sẽ có được nghiệm của phương trình ban đầu. Trong quá trình biến đổi chú ý các biến đổi dạng "suy ra", ta phải thử lại nghiệm. Sau đây ta xét các ví dụ sau:

**Ví dụ 3.30.** Giải phương trình:

$$(a) \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 2x - 5$$

$$(b) \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x}$$

**Ví dụ 3.31.** Giải phương trình  $\sqrt{7 - x^2 + x\sqrt{x + 5}} = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ .

**Ví dụ 3.32.** Giải phương trình  $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$ .

**Ví dụ 3.33.** Giải phương trình  $\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2\sqrt{x^2}$ .

**Ví dụ 3.34.** Giải phương trình  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$ .

**Ví dụ 3.35.** Giải phương trình  $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2}$ .

**Ví dụ 3.36.** Giải phương trình  $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$ .



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 3.52.** Giải các phương trình sau;

(a)  $\sqrt{x^2 + 3x + 4} - 3x = 1$

(b)  $1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{6-x}$

(c)  $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 2x - 5$

(d)  $x - \sqrt{4-x^2} = 0$

**Bài 3.53.** Giải các phương trình sau:

(a)  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+2} = 1$

(b)  $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-4}$

(c)  $x^2 - 2x + 4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 0$ .

(d)  $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}} - 3 = 0$

**Bài 3.54.** Giải các phương trình sau:

(a)  $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$

(b)  $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x} = 1$

(c)  $\sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2\sqrt{x^2}$

(d)  $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x + 2$

**Bài 3.55.** Giải các phương trình sau

(a)  $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$

(b)  $\sqrt[3]{2x-5} + \sqrt[3]{3x+7} = \sqrt[3]{5x+2}$

**Bài 3.56.** Giải các phương trình sau:

(a)  $\sqrt{x^2-3x+4} + 1 - x - \sqrt{3-x} = 0$

(b)  $\sqrt{x^2+3x+4} + 1 + x - \sqrt{3+x} = 0$

(c)  $\sqrt{x^2-3x+3} + 1 - x - \sqrt{2-x} = 0$

(d)  $\sqrt{4x^2-10x+7} + 2 - 2x - \sqrt{3-2x} = 0$

## §8. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

**Lưu ý 3.4.** Mục đích của phương pháp đặt ẩn phụ là đưa phương trình đã cho về phương trình hoặc hệ phương trình đơn giản hơn và các phương trình đã biết cách giải trước đó.

**Ví dụ 3.37.** Giải phương trình  $\sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt{-x^2 + x + 2} = 1$ .

**Ví dụ 3.38.** Giải phương trình  $2x^2 - 6x + 7 = 5\sqrt{x^2 - 3x + 5}$ .

**Ví dụ 3.39.** Giải phương trình  $(x - 1)^2 + 2(x + 1)\sqrt{\frac{x - 3}{x + 1}} = 12$ .

Trên đây là các phương trình mà ta thấy rõ được biểu thức  $f(x)$  lặp đi lặp lại, trong một số trường hợp khác  $f(x)$  không xuất hiện một cách tường minh, mà phải thông qua một số biến đổi thì mới xuất hiện. Ta xem các ví dụ sau:

**Ví dụ 3.40.** Giải phương trình  $x^2 + 3x\sqrt{x - \frac{4}{x}} = 10x + 4$ .

**Ví dụ 3.41.** Giải phương trình  $\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x} = 3\sqrt[4]{1-x^2}$

Trong một số trường hợp phức tạp hơn, ta đặt ẩn phụ một biểu thức, và tính các biểu thức còn lại theo ẩn phụ. Ta xem ví dụ sau:

**Ví dụ 3.42.** Giải phương trình  $\sqrt{11-x} + \sqrt{x+2} + 2\sqrt{22+9x-x^2} = 17$ .

Sau đây là cách đặt ẩn phụ để đưa phương trình thành một phương trình hai ẩn, từ đó giải ẩn này theo ẩn kia để thiết lập một phương trình đơn giản hơn phương trình đã cho.

**Ví dụ 3.43.** Giải phương trình  $x^2 + 16x - 16 = (2x + 1)\sqrt{3x^2 + 4}$ .

**Ví dụ 3.44.** Giải phương trình  $\sqrt{x^2 + 1} + 2\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 3\sqrt{x^2 + 4x + 5}$ .

**Ví dụ 3.45.** Giải phương trình  $\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x} - 3\sqrt{1-x^2} = x - 3$ .

**Ví dụ 3.46.** Giải phương trình  $x^2 + 5x - 3 = 2(2x + 3)\sqrt{x - 1}$ .

Ngoài ra còn có cách đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình, ta xét ví dụ sau:

**Ví dụ 3.47.** Giải phương trình:  $\sqrt[3]{7+x} - \sqrt{2-x} = 1$



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 3.57.** Giải các phương trình sau

(a)  $\sqrt{2x^2 - 4x + 8} + \sqrt{2x^2 - 4x + 3} = 5$

(b)  $(x + 5)(2 - x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$

(c)  $(x + 4)(x + 1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$

(d)  $4x^2 + 10x + 9 = 5\sqrt{2x^2 + 5x + 3}$

**Bài 3.58.** Giải các phương trình sau:

(a)  $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$

(b)  $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$

(c)  $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

(d)  $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16.$

**Bài 3.59.** Giải các phương trình sau

(a)  $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$

(b)  $\frac{4x - 1}{\sqrt{4x - 3}} + \frac{11 - 2x}{\sqrt{5 - x}} = \frac{15}{2}$

(c)  $\frac{3 - x}{\sqrt{13 - 6x}} + \frac{3 + x}{\sqrt{13 + 6x}} = 2$

**Bài 3.60.** Giải các phương trình sau:

(a)  $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$

(b)  $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$

(c)  $\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x + 20} = 5\sqrt{x + 1}$

(d)  $(x^2 - 6x + 11)\sqrt{x^2 - x + 1} = 2(x^2 - 4x + 7)\sqrt{x - 2}$

**Bài 3.61.** Giải các phương trình sau:

$$(a) 2\sqrt{\frac{3x-1}{x}} = \frac{x}{3x-1} + 1$$

$$(b) (x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$$

$$(c) 2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2 - 2x - 1$$

$$(d) (x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+6} + 4 = 0$$

$$(e) (x-1)(x+2) + 2(x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = 8$$

$$(f) \sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}} = 2.$$

## §9. PHƯƠNG PHÁP NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP

Phương pháp nhân lượng liên hợp được sử dụng khi phương trình có độ phức tạp cao, lệch bậc nhiều ở các biểu thức chứa căn và nghiệm của phương trình thường dễ đoán và có ít nghiệm.

Nội dung phương pháp là ta phải đoán được nghiệm, thêm bớt (tách) và nhóm các số hạng phù hợp và nhân chia với biểu thức liên hợp để xuất hiện nhân tử. Ta xét các ví dụ sau.

**Ví dụ 3.48.** Giải phương trình:

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3(x^2 - x - 1)} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

**Ví dụ 3.49.** Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} + x = \sqrt{x^3 - 1}$$

**Ví dụ 3.50.** Giải phương trình  $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = 2x^2 - 5x - 1$ .

**Ví dụ 3.51.** Giải phương trình  $x^2 + x - 1 = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ .



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 3.62.** Giải các phương trình sau:

(a)  $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x - 6$

(b)  $\sqrt{x+1} + 1 = 4x^2 + \sqrt{3x}$

(c)  $\sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}$

(d)  $\frac{2x^2}{(3 - \sqrt{9+2x})^2} = x + 21$

(e)  $9(x+1)^2 = (3x+7)(1 - \sqrt{3x+4})^2$

**Bài 3.63.** Giải các phương trình sau:

(a)  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

(b)  $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{3}$

(c)  $\sqrt{x^2+12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2+5}$

(d)  $x^2 - 4x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 7} + \sqrt{5x - 6} = 0$

(e)  $3\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2+8} - 2 = \sqrt{x^2+15}$

**Bài 3.64.** Giải các phương trình sau:

(a)  $\sqrt{2x^2 - x + 3} - \sqrt{21x - 17} + x^2 - x = 0$

(b)  $x(x+1)(x-3) + 3 = \sqrt{4-x} + \sqrt{1+x}$

(c)  $\sqrt{3x+1} + 2\sqrt[3]{19x+8} = 2x^2 + x + 5$

(d)  $\sqrt{3-x} + \sqrt{2+x} = x^3 + x^2 - 4x - 4 + |x| + |x-1|$

**Bài 3.65.** Giải các phương trình sau

(a)  $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$

(b)  $3x^2 - 8x + 3 = 3\sqrt{x+1}$

(c)  $2x^2 - x - 2 = \sqrt{5x+6}$

(d)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = x^2 - x - 1$

**Bài 3.66.** Giải các phương trình sau

(a)  $x^2 - 3x + 4 = 2\sqrt{x-1}$

(b)  $\sqrt{2x^2 + 8} - 2\sqrt{2x-3} + x - 4 = 0$

(c)  $x^2 - 9x + 24 = 2\sqrt{x-3} + 2\sqrt{9-2x}$

**Bài 3.67.** Giải các phương trình sau:

(a)  $x^2 - x + 1 - \sqrt{2x-1} = 0$

(b)  $x^2 - x + 2 - 2\sqrt{x} = 0$

(c)  $2x + 1 = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}$

# CHƯƠNG

## 4



## TỔ HỢP - XÁC SUẤT

---

---

### §1. QUY TẮC CỘNG - QUY TẮC NHÂN



#### LÝ THUYẾT - VÍ DỤ

**Định nghĩa 4.1.** Để thực hiện một công việc có thể sử dụng một trong  $k$  phương án  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Nếu phương án  $A_1$  có  $a_1$  cách thực hiện,  $A_2$  có  $a_2$  cách thực hiện... $A_k$  có  $a_k$  cách thực hiện. Khi đó số cách thực hiện công việc là:  $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ .

**Ta có thể định nghĩa theo cách sau:** Tập  $A_1$  có  $a_1$  phần tử,  $A_2$  có  $a_2$  phần tử, ...,  $A_k$  có  $a_k$  phần tử,  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j$ . Khi đó số phần tử của tập  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  là  $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ .

**Định nghĩa 4.2.** (Quy tắc bù trừ) Cho hai tập hợp  $A$  và  $B$ . Khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Khi  $A \subset X$  thì  $|\bar{A}| = |X| - |A|$

**Định nghĩa 4.3. Quy tắc nhân.** Để thực hiện một công việc, ta cần thực hiện lần lượt qua các giai đoạn  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Nếu  $A_1$  có  $a_1$  cách thực hiện,  $A_2$  có  $a_2$  cách thực hiện, ...,  $A_k$  có  $a_k$  cách thực hiện. Khi đó số cách thực hiện công việc là  $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_k$ .

**Ta có thể định nghĩa theo cách sau:** Cho tập  $A_1$  có  $a_1$  phần tử,  $A_2$  có  $a_2$  phần tử, ...,  $A_k$  có  $a_k$  phần tử. Khi đó số phần tử của tích Descartes  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) | x_i \in A_i \forall i = 1, 2, \dots, k\}$  là  $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_k$ .

**Ví dụ 4.1.** Cho tập  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Từ tập  $A$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên

- (a) Có 5 chữ số khác nhau.
- (b) Không lớn hơn 4000.
- (c) Có bao nhiêu số lẻ có các chữ số khác nhau.

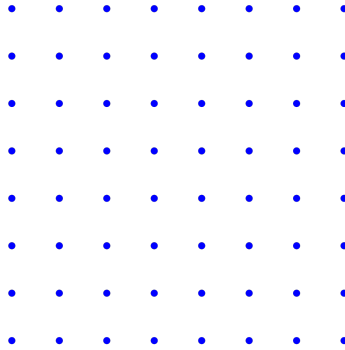
(d) Có bao nhiêu số có 4 chữ số, mà các chữ số không nhất thiết phải khác nhau.

(e) Có bao nhiêu số có 5 chữ số không có số 1 hoặc không có số 2.

**Ví dụ 4.2.** Có thể tạo ra được bao nhiêu hình vuông từ bảng các điểm đã cho như hình sau ( $8 \times 8$ ). Biết rằng:

(a) Cạnh hình vuông song song với cạnh hình vuông lớn.

(b) Bất kì.



**Ví dụ 4.3.** Cho  $n$  có phân tích thành thừa số nguyên tố như sau

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

Tính số ước nguyên dương của  $n$ .

**Ví dụ 4.4.** Có bao nhiêu số tự nhiên không lớn hơn 1000

(a) Có ít nhất một chữ số 1. (272)

(b) Không chia hết cho 2 hoặc 3 hoặc 5.



## BÀI TẬP

**Bài 4.1.** Đội tình nguyện viên của trường PTNK gồm 6 bạn lớp 10, 3 bạn lớp 11 và 5 bạn lớp 12. Cần chọn ra 3 bạn làm ban chỉ huy trong đó có 1 đội trưởng, một đội phó và 1 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thỏa:

(a) Chọn tùy ý.

(b) Bạn tổ trưởng lớp 11.

**Bài 4.2.** Thầy dạy toán có một số bài tập gồm: 6 bài toán khó, 5 bài toán trung bình và 7 bài toán dễ và 4 bài siêu dễ. Thầy muốn lập một đề thi gồm 1 câu hỏi khó, 1 câu hỏi trung bình, 1 câu hỏi dễ và 1 câu siêu dễ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn bài.

**Bài 4.3.**

- (a) Có bao nhiêu dãy nhị phân có độ dài  $n$ .
- (b) Có bao nhiêu tập con của tập có  $n$  phần tử.

**Bài 4.4.** Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số:

- (a) Có các chữ số chẵn lẻ xen kẽ.
- (b) Có chữ số 1 và 2 nhưng không đứng cạnh nhau.
- (c) Có các chữ số khác nhau và có chữ số 1.
- (d) Có 4 chữ số không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 0.
- (e) Số chẵn có 5 chữ số khác nhau và chữ số 3 và 0 không đồng thời có mặt.
- (f) Có 5 chữ số có chữ số 1 hoặc có chữ số 2.

**Bài 4.5.** Cho  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  và  $B = \{a, b, c\}$ . Có bao nhiêu ánh xạ  $f$  từ  $A$  vào  $B$ .

**Bài 4.6.** Có bao nhiêu cặp số  $(a, b)$  mà bội chung nhỏ nhất của  $a, b$  là  $2017^3 2018^5 2019^4$

**Bài 4.7.** Lớp 10 Toán có 6 bạn nữ và 6 bạn nam được xếp ngồi trên hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 6 ghế. Có bao nhiêu cách xếp thỏa:

- (a) Xếp bất kì.
- (b) Mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ.

**Bài 4.8.** Có 5 bạn vào rạp xem phim, trong rạp chỉ còn một dãy ghế gồm 8 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách để các bạn ngồi, biết rằng mỗi người đều được ngồi vị trí bất kì.

**Bài 4.9.** Cho tập  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Có bao nhiêu số mà các chữ số thuộc  $A$  thỏa:

- (a) Số chẵn có 5 chữ số khác nhau.
- (b) Số có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 9. (Số chia hết cho 9 khi và chỉ khi tổng các số chia hết cho 9)
- (c) Số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 25.

(d) Số có 5 chữ số có dạng  $\overline{abcba}$  ( $a, b, c$  đôi một khác nhau).

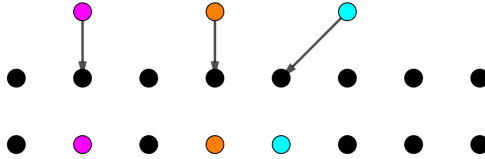
(e) Số có 6 chữ số có dạng  $\overline{12abab}$  và chia hết cho 5.

## §2. CHỈNH HỢP - HOÁN VỊ - TỔ HỢP



### CHỈNH HỢP - HOÁN VỊ

**Định nghĩa 4.4.** Mỗi cách sắp xếp  $k$  phần tử (phân biệt) vào  $n$  vị trí phân biệt ( $n \geq k$ ) được gọi là một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$ .

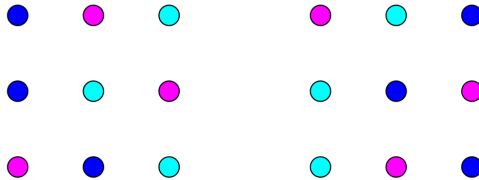


**Định lí 4.1.** Số chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  là

$$A_n^k = \frac{(n!)}{(n-k)!}$$

**Định nghĩa 4.5.** Khi  $k = n$ , thì mỗi chỉnh hợp chập  $n$  của  $n$  được gọi là một hoán vị, hay mỗi cách sắp xếp  $n$  phần tử vào  $n$  vị trí được gọi là một hoán vị của  $n$  phần tử.

**Định lí 4.2.** Số hoán vị của  $n$  phần tử là  $P_n = n!$ .



Hoán vị của 3 phần tử

**Định nghĩa 4.6.** Cho tập  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ . Mỗi song ánh từ  $A$  vào  $A$  được gọi là một hoán vị.

**Ví dụ 4.5.** Có 8 bạn nam và 2 bạn nữ được xếp thành một hàng dài. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thỏa:

- (a) Xếp bất kì.

(b) 8 bạn nam kề nhau, 2 bạn nữ kề nhau.

(c) Các bạn nam giữa hai bạn nữ.

**Ví dụ 4.6.** Có 8 bạn nam và 4 bạn nữ. Có bao nhiêu cách sắp xếp các bạn này thành một hàng sao cho không có hai bạn nữ nào đứng kề nhau.

**Ví dụ 4.7.** Cho tập  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Từ  $A$  có thể lập được bao nhiêu số

(a) Là số chẵn có 4 chữ số khác nhau.

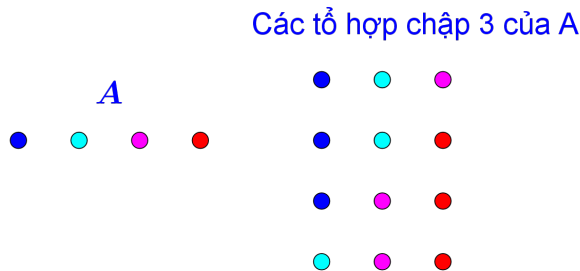
(b) Là số lẻ có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

## **B** TỔ HỢP

**Định nghĩa 4.7.** Cho tập hợp  $A$  có  $n$  phần tử. Một tập hợp con có  $k$  phần tử của  $A$  được gọi là một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử.

**Tính chất 4.1.** Số tổ hợp có chập  $k$  của  $n$  là:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$



**Ví dụ 4.8.** Đội văn nghệ của trường gồm 4 bạn học sinh lớp 10, 5 học sinh lớp 11, 4 học sinh lớp 12.

(a) Có bao nhiêu cách chọn ra hai bạn hát song ca?

(b) Có bao nhiêu cách chọn ra 3 bạn hát tam ca mà mỗi khối có một học sinh?

(c) Có bao nhiêu cách chọn ra một đội múa gồm 5 bạn trong đó có ít nhất 2 học sinh lớp 11.

**Ví dụ 4.9.** Cho tập  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $C = \{x, y, z\}$ .

- (a) Có bao nhiêu song ánh từ  $A$  vào  $B$ .
- (b) Có bao nhiêu ánh xạ từ  $A$  vào  $C$ ? Có bao nhiêu đơn ánh từ  $C$  vào  $A$ .
- (c) Có bao nhiêu đơn ánh từ  $C$  và  $A$  sao cho  $f(x) + f(y) + f(z)$  là số chẵn.



## BÀI TẬP

**Bài 4.10.** Cho tập  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, a, b, c, d\}$

- (a) Có bao nhiêu hoán vị của  $A$ .
- (b) Có bao nhiêu hoán vị của  $A$  mà các chữ số đứng kề nhau.

**Bài 4.11.** Cho tập  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- (a) Có bao nhiêu hoán vị của  $A$  mà hai chữ số lẻ không đứng kề nhau.
- (b) Từ  $A$  có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số mà chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

**Bài 4.12.** Xếp  $m$  bạn nam và  $n$  bạn nữ thành 1 hàng, với  $m, n \in \mathbb{N}$ . Hỏi có bao nhiêu cách xếp nếu:

- (a) Không có bạn nam nào đứng cạnh nhau ( $m \leq n + 1$ );
- (b)  $n$  bạn nữ đứng liền kề nhau;
- (c) Một bạn nam  $A$  và một bạn nữ  $B$  đứng cạnh nhau.

**Bài 4.13.** Tính:  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!, n \in \mathbb{N}$ .

**Bài 4.14.** Tính:  $\frac{1}{(1+1)!} + \frac{2}{(2+1)!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$  với  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bài 4.15.** Cho  $n, r \in \mathbb{N}$  với  $r \leq n$ . Chứng minh rằng:

- (a)  $A_n^r = n A_{n-1}^{r-1}$ ;
- (b)  $A_n^r = (n - r + 1) A_n^{r-1}$ ;
- (c)  $A_n^r = \frac{n}{n-r} A_n^{r-1}$ , với  $r < n$ ;
- (d)  $A_{n+1}^r = A_n^r + r A_n^{r-1}$ ;
- (e)  $A_{n+1}^r = r! + r \left( A_n^{r-1} + A_{n-1}^{r-1} + \dots + A_r^{r-1} \right)$ .

**Bài 4.16.** Một nhóm có 15 học sinh, trong đó có 5 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 9 học sinh sao cho có đúng 3 học sinh nữ:

- (a) để thành lập một hội đồng.
- (b) để thành lập một hội đồng với 9 vị trí khác nhau.

**Bài 4.17.** Có 10 cái ghế được xếp thành một hàng. 7 học sinh được xếp vào 7 cái ghế sao cho không có 2 học sinh nào ngồi chung một cái ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho không có 2 cái ghế trống nào liền nhau.

**Bài 4.18.** Có 8 cái hộp được xếp thành hàng. Hỏi có bao nhiêu cách đặt 5 viên bi khác nhau vào các hộp nếu mỗi hộp chứa nhiều nhất 1 viên bi và không có hai hộp không chứa bi nào đứng cạnh nhau?

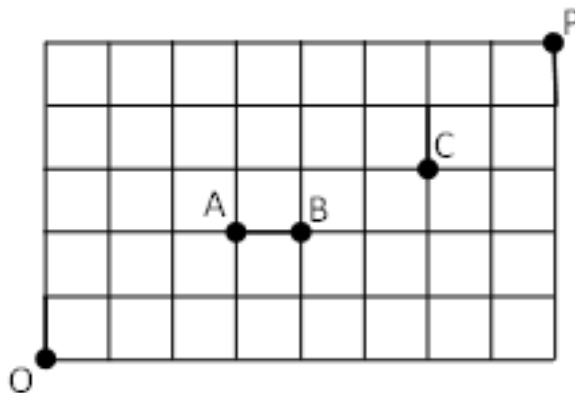
**Bài 4.19.** Xếp một nhóm có 20 học sinh, trong đó có 3 bạn nữ là: A, B, C và 4 bạn nam: X, Y, Z, T thành 2 hàng, mỗi hàng 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho 3 bạn nữ luôn ở hàng trước, còn 4 bạn nam ở hàng phía sau.

**Bài 4.20.** Hỏi có bao nhiêu cách xếp 7 bạn nam và 2 bạn nữ thành một hàng sao cho các bạn gái cách nhau bởi đúng 3 bạn nam?

**Bài 4.21.** Tìm số  $(m + n)$ -nhị phân là một dãy chữ số với  $m$  số 0 và  $n$  số 1 sao cho không có 2 số 1 nào đứng kề nhau, khi  $n \leq m + 1$ .

**Bài 4.22.** Lớp A có 10 bạn nữ và 15 bạn nam và lớp B có 4 nữ và 10 nam. Một hội đồng gồm 7 thành viên được chọn từ 2 lớp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các thành viên sao cho có đúng 4 bạn của lớp B và có đúng 5 bạn nam.

**Bài 4.23.** Trong mỗi trường hợp sau, tìm số tuyến đường ngắn nhất từ  $O$  đến  $P$  trong sơ đồ được cho dưới đây:



- (a) Tuyến đường phải đi qua  $A$ .
- (b) Tuyến đường phải qua đoạn  $AB$ .
- (c) Tuyến đường phải đi qua  $A$  và  $C$ .

**Bài 4.24.** Tìm số cách chọn một nhóm gồm  $2k$  người từ  $n$  cặp đôi, với  $k, n \in \mathbb{N}$  và  $2k \leq n$ , trong mỗi trường hợp sau đây:

- (a) Có  $k$  cặp đôi trong nhóm đó.
- (b) Không có cặp đôi nào trong nhóm đó.
- (c) Có ít nhất một cặp đôi được chọn trong nhóm.
- (d) Có đúng 2 cặp đôi được chọn trong nhóm đó.

**Bài 4.25.** Cho một đa giác có 10 đỉnh.

- (a) Có bao nhiêu đường chéo.
- (b) Có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh thuộc đa giác.
- (c) Có bao nhiêu tam giác có đúng 1 cạnh trùng với cạnh của đa giác.
- (d) Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào trùng với cạnh của đa giác.
- (e) Biết rằng không có 3 đường chéo nào đồng quy. Tìm số giao điểm của các đường chéo.

**Bài 4.26.** Cho đa giác đều có 100 cạnh. Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật tạo ra từ các đỉnh của đa giác trên.

**Bài 4.27.** Cho  $A$  là tập hợp các số nguyên dương từ 1 đến 100. Hỏi có bao nhiêu tập con có 3 phần tử của  $A$  thỏa:

- (a) Tổng các số chia hết cho 3
- (b) Tổng các số chia hết cho 4.

**Bài 4.28.** Chung kết cuộc thi tiếng hát học đường có 3 bạn vào chung kết, mỗi bạn hát 2 bài khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chương trình sao cho không có ai hát liên tiếp.

**Bài 4.29.** Có bao nhiêu cách chọn ra 3 số từ tập  $A = \{1, 2, \dots, 100\}$  sao cho một số là trung bình cộng của hai số còn lại.

### §3. NHỊ THỨC NEWTON

**Định lí 4.3.** Với  $n \in \mathbb{N}^*$  ta có

$$(a + b^n) = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n.$$

**Ví dụ 4.10.** Khai triển các nhị thức sau:

- (a)  $(x + 2y)^5$
- (b)  $(2x - \frac{3}{y})^7$
- (c)  $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^{10}$

**Ví dụ 4.11.** Tìm số hạng trong khai triển

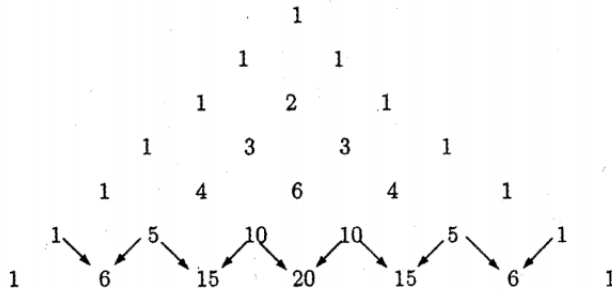
- (a)  $(3x^3 - \frac{2}{x^2})$  chứa  $x^{10}$
- (b)  $(\frac{x}{4} - \frac{12}{x})^{12}$  chứa  $x^4$

**Ví dụ 4.12.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{25}y^{10}$  trong khai triển  $(x^3 - xy)^{15}$



### TAM GIÁC PASCAL

Muốn khai triển  $(a + b)^n$  ta có thể dùng nhị thức Newton như trên, ngoài ra ta còn có thể sử dụng bảng số sau đây (được gọi là tam giác Pascal)



Các số trong hàng thứ  $n$  của tam giác Pascal là dãy gồm  $n + 1$  số

$$C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$$



### BÀI TẬP

**Bài 4.30.** Tìm hệ số của  $x^9$  trong khai triển

$$P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14}$$

**Bài 4.31.** Tìm hệ số của  $x^{16}$  trong khai triển  $(x^2 - 2x)^{10}$ .

**Bài 4.32.** Tìm hệ số của  $x^{1008}$  trong khai triển  $(x^2 + \frac{1}{x^2})^{2018}$ .

**Bài 4.33.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^5$  trong khai triển  $x(2-3x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$

**Bài 4.34.** Trong khai triển  $(2x+3)^2(2x^2+1)^{10}$  hãy tìm số hạng chứa  $x^{12}$ .

**Bài 4.35.** Tìm  $n$  biết hệ số của  $x^{n-2}$  trong khai triển  $(x - \frac{1}{4})^n$  là 31.

**Bài 4.36.** Tìm hệ số của  $x^8$  trong khai triển  $[1+x^2(1-x)]^8$ .

**Bài 4.37.** Xác định hệ số của  $x^3$  trong khai triển  $(1+2x+3x^2)^{10}$

**Bài 4.38.** Tìm hệ số của  $x^{16}$  trong khai triển  $[1-x^2(1-x^2)]^{16}$ .

**Bài 4.39.** Tìm hệ số của  $x^{11}$  trong khai triển  $(1+x^2+x^3)^5$

**Bài 4.40.** Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển

(a)  $(xy^2 - \frac{1}{xy})^8$

(b)  $(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}})^{16}$

(c)  $(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3})^{17}$

**Bài 4.41.** Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

$(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{x^5})^n$  chứa  $x^8$ , biết  $C_{n+1}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$

**Bài 4.42.** Trong khai triển  $(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}})^n$ . Hãy tìm hệ số của số hạng không phụ thuộc vào  $x$ . Biết  $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$ .

**Bài 4.43.** Trong khai triển  $(2^{\frac{x-1}{2}} + x^{-\frac{x}{3}})^n$  biết  $C_n^3 = 5C_n^1$  và số hạng thứ 4 bằng  $20n$ . Tính  $n, x$ .

**Bài 4.44.** Tìm  $x$  biết rằng trong khai triển của nhị thức  $(2^x + 2^{\frac{1}{2}-x})^n$  có tổng số hạng thứ 2 và thứ 5 bằng 135, còn tổng hệ số của 3 số hạng cuối bằng 122.

**Bài 4.45.** Biết tổng các hệ số trong khai triển  $(x^3 + \frac{1}{x})^n$  bằng 1024. Tìm hệ số của số hạng thứ 7.

**Bài 4.46.** Cho biết tổng tất cả các hệ số trong khai triển  $(x^2+1)^n$  bằng 1024. Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{12}$ .

**Bài 4.47.** Tìm số hạng có hệ số hữu tỷ trong khai triển  $(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5})^{3n+1}$  biết

$$C_n^n + 2C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = C_{n+2}^{2n-3}$$

**Bài 4.48.** Tìm số hạng chứa  $x, y$  với số mũ hữu tỉ trong khai triển  $(\sqrt[3]{xy^2} + \sqrt{xy})^{12}$

**Bài 4.49.** Giả sử  $n$  là số nguyên dương và  $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . Biết tồn tại số nguyên  $1 \leq k \leq n-1$  thoả  $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$ . Hãy tính  $n$ .

**Bài 4.50.** Sau khi rút gọn trong khai triển  $(x - \frac{1}{x^2})^{20} + (x^3 - \frac{1}{x})^{10}$  thì biểu thức còn lại mấy số hạng.

**Bài 4.51.** Biết khai triển  $(1 - 2x)^{18} = a_0 + a_1x + \dots + a_{18}x^{18}$ . Tính

$$S = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{18}|.$$

**Bài 4.52.** Cho khai triển nhị thức

$$(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}.$$

(a) Hãy tìm số hạng  $a_k$  lớn nhất.

(b) Tính  $a_0 + a_1 + \dots + a_n$

(c) Tính  $a_0 + a_2 + a_4 + \dots$

(d) Tính  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$

**Bài 4.53.** Giả sử  $P(x) = (1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  thoả mãn

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096.$$

Hãy tìm  $\max\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ .

**Bài 4.54.** Cho  $P(x) = (1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  thoả mãn

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 2^{12}.$$

Tìm  $\max\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ .

**Bài toán tính tổng và chứng minh đẳng thức bằng nhị thức Newton**

**Bài 4.55.** Cho  $n$  là số nguyên dương. Hãy tính

(a)  $S_1 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \dots + 2^5C_5^5$

(b)  $S_2 = C_5^0 - 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \dots - 2^5C_5^5$

(c)  $S_3 = C_{20}^1 + C_{20}^2 + C_{20}^3 + \dots + C_{20}^{20}$

(d)  $S_4 = C_{20}^1 - C_{20}^2 + C_{20}^3 + \dots - C_{20}^{20}$

(e)  $S_5 = 2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + \dots + C_n^n$

(f)  $S_6 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$

(g)  $S_7 = 3C_n^1 + 3^3C_n^3 + \dots + 3^{n-1}C_n^{n-1}$

(h)  $S_8 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n}$

**Bài 4.56.** Tính các tổng sau

(a)  $C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}$

(b)  $C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$

(c)  $C_{30}^{14} - C_{30}^{15} + C_{30}^{16} - C_{30}^{17} + \dots - C_{30}^{29} + C_{30}^{30}$

**Bài 4.57.** Chứng minh với mọi số nguyên dương  $m, n, 0 \leq p \leq \min\{m, n\}$ .

Ta luôn có

$$C_m^p + C_m^{p-1}C_n^1 + C_m^{p-2}C_n^2 + \dots + C_m^{p-q}C_n^q + \dots + C_m^0C_n^p$$

**Bài 4.58.** Giả thiết các điều kiện có nghĩa. Chứng minh rằng

(a)  $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ .

(b)  $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$

(c)  $1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k = (-1)^k C_{n-1}^k$

(d)  $(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + (C_{2n}^2)^2 - \dots + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n C_{2n}^n$

(e)  $3^n [C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{3^2}C_n^2 + \dots + \frac{1}{3^n}C_n^n] = 4^n$

**Bài 4.59.** Chứng minh các hệ thức sau

$$(a) 1 - 10C_{2n}^1 + 10^2C_{2n}^2 - 10^3C_{2n}^3 + \dots - 10^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + 10^{2n} = 81^n$$

$$(b) C_{2n}^0 + 3^2C_{2n}^2 + 3^4C_{2n}^4 + \dots + 3^{2n}C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n} + 1)$$

$$(c) C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n = 4^nC_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^{n-2} - \dots + (-1)^nC_n^n$$

**Bài 4.60.** Chứng minh

$$(a) 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$$

$$(b) 2 \cdot 1C_n^2 + 3 \cdot 2C_n^3 + \dots + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$$

$$(c) (C_{2n+1}^0)^2 - (C_{2n+1}^1)^2 + (C_{2n+1}^2)^2 - \dots - (C_{2n+1}^{2n+1})^2 = 0$$

$$(d) 4^nC_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^2 - \dots + (-1)^nC_n^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n$$

**Bài 4.61.** Tính tổng các hệ số của các số hạng trong khai triển

$$(a) (3x + \frac{2}{\sqrt[3]{x}})^{10}$$

$$(b) (1 - 2x + \sqrt{x^2})^8$$

**Bài 4.62.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{26}$  trong khai triển  $(\frac{1}{x^4} + x^7)^n$ . Biết

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$$

**Bài 4.63.** Xác định hệ số  $a_n$  của  $x^n$  trong khai triển

$$(1 + x + 2x^2 + \dots + nx^n)^2.$$

Tìm  $n$  biết  $a_n = 6n$

**Bài 4.64.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển của  $(x^2 + 2)^n(3x^3 + 1)^n$ . Biết

$$C_{2n}^{2n} - 3C_{2n}^{2n-1} + \dots + (-1)^k 3^k C_{2n}^{2n-k} + \dots + 3^{2n} C_{2n}^0 =$$

**Bài 4.65.** Tìm hệ số hạng thứ 11 trong khai triển  $(2 + x)^n$ . Biết

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$$

**Bài 4.66.** Trong khai triển  $(1 - 2x + x^3)^n$  tìm  $a_6$  biết

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{3n}}{2^{3n}} = (\frac{1}{2})^{15}.$$

**Bài 4.67.** Xác định hệ số của  $x^{n-1}, x^{n-2}$  trong khai triển của

$$(x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2^2})(x + \frac{1}{x^3}) \dots (x + \frac{1}{x^n}).$$

**Bài 4.68.** Tìm hệ số chứa  $x^{18}$  trong khai triển  $(x + 2)^{13}(x^2 - 2x + 4)^n$  biết  $n$  là số nguyên dương thỏa

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$$

**Bài 4.69.** Tính các tổng sau

$$(a) S_0 = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$$

$$(b) S_2 = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$$

$$(c) S_3 = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$$

$$(d) S_4 = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n$$

$$(e) S_5 = 5^n C_n^0 + 5^{n-1} C_n^1 + \dots + C_n^n$$

$$(f) S_6 = C_n^0 + 2^2 C_n^2 + 2^4 C_n^4 + \dots$$

**Bài 4.70.** Cho  $n$  là số nguyên dương chẵn. Hãy tính các tổng sau

(a)  $S_0 = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \dots + 3^n C_n^n$

(b)  $S_1 = C_n^0 + 3^2C_n^2 + 3^4C_n^4 + \dots + 3^n C_n^n$

(c)  $S_2 = 3.C_n^1 + 3^3C_n^3 + 3^5C_n^5 + \dots + 3^{n-1}C_n^{n-1}$

**Bài 4.71.** Tính các tổng sau:

(a)  $S_1 = C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$

(b)  $S_2 = 3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - \dots + C_{16}^{16}$

**Bài 4.72.** Tính tổng

(a)  $S_0 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$

(b)  $S_1 = 2C_{2n}^2 + 4C_{2n}^4 + \dots + 2nC_{2n}^{2n}$

(c)  $S_2 = C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \frac{1}{5}C_{2n}^4 + \dots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$

**Bài 4.73.** Cho  $0 \leq k, n \in \mathbb{Z}$ . Chứng minh rằng

$$C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_n^{k+1} + \dots + C_n^{n-k} C_n^n = \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!} \frac{C_n^2}{1^2} + \frac{2C_n^3}{(n-1)^3} + \frac{3C_n^4}{(n-1)^4} + \dots + \frac{(n-1)C_n^n}{(n-1)^n}$$

**Bài 4.74.** Cho  $0 \leq k, n \in \mathbb{Z}$ . Chứng minh rằng

$$C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + \dots + C_{k+n}^k = C_{n+k+1}^n$$

**Bài 4.75.** Với số nguyên dương  $n$ .

Chứng minh

$$\left(\frac{C_n^0}{1}\right)^2 + \left(\frac{C_n^1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{C_n^n}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2} (C_{2(n+1)}^{n+1})$$

**Bài 4.76.** Cho số nguyên dương  $n$ .

Chứng minh

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \dots + (-1)^k \frac{1}{k}C_{2n}^{k-1} + \dots + (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$$

**Bài 4.77.** Cho  $n$  là số nguyên dương.

Chứng minh rằng

$$\frac{C_n^0}{C_{n+2}^1} + \frac{C_n^1}{C_{n+3}^2} + \dots + \frac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

**Bài 4.78.** Cho  $n$  là số nguyên dương.

Chứng minh rằng

$$C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + 3\frac{C_n^3}{C_n^2} + \dots + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Bài 4.79.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n \geq 2$  ta có

**Bài 4.80.** Chứng minh rằng

$$\frac{1}{C_{2019}^1} + \frac{1}{C_{2019}^2} + \dots + \frac{1}{C_{2019}^{2019}} = \frac{1010}{2019} \left( \frac{1}{C_{2018}^1} + \frac{1}{C_{2018}^2} + \dots + \frac{1}{C_{2018}^{2018}} \right)$$

## §4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ



### LÍ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

**Định nghĩa 4.8.** **Phép thử ngẫu nhiên** (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà

- Kết quả của nó không đoán trước được.
- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là **không gian mẫu** của phép thử và kí hiệu bởi chữ  $\Omega$ .

**Định nghĩa 4.9.** **Biến cố A liên quan đến phép thử T** là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của biến cố A làm cho T xảy ra được gọi là một **kết quả thuận lợi** cho A.

Tập hợp tất cả các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là  $\Omega_A$ . Khi đó người ta nói **biến cố A được mô tả bởi tập  $\Omega_A$** .

Nói cách khác: một biến cố A liên quan đến phép thử T là một tập con  $\Omega_A$  của không gian mẫu  $\Omega$  của phép thử đó.

**Định nghĩa 4.10.** Giả sử phép thử T có không gian mẫu  $\Omega$  là một tập hữu hạn và kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan đến phép thử T và  $\Omega_A$  là tập tất cả các mô tả A thì xác suất của A là một con số ký hiệu  $P(A)$  được xác định bởi công thức

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}.$$

**Lưu ý:** Từ định nghĩa trên ta có

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega = 1), P(\emptyset) = 0$

**Định nghĩa 4.11.** Xét biến cố A liên quan đến phép thử T. Trong N lần thực hiện phép thử T thì số lần xuất hiện của biến cố A được gọi là **tần số** của A.

Tỷ số giữa tần số của A với N gọi là **tần suất** của A trong N lần thực hiện phép thử T, số này được gọi là **xác suất thực nghiệm** của A

**Ví dụ 4.13.** Gieo một con súc sắc là một thí nghiệm ngẫu nhiên. Không gian mẫu là  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**Ví dụ 4.14.** Gieo hai đồng xu đồng chất là một thí nghiệm ngẫu nhiên. Không gian mẫu là  $\Omega = \{SN, NS, NN, SS\}$

**Ví dụ 4.15.** Giả sử T là phép thử "Gieo một con súc sắc". Gọi A là biến cố "Số chấm xuất hiện là số chẵn". Khi đó  $\Omega_A = \{2, 4, 6\}$ .



## VÍ DỤ

**Ví dụ 4.16.**

- (a) Tính xác suất số chấm xuất hiện là số chẵn khi gieo một con súc sắc.
- (b) Tính xác suất có nhiều nhất một mặt sấp xuất hiện khi gieo hai đồng xu.

**Ví dụ 4.17.** Một vé xổ số có 4 chữ số. Khi quay số nếu vé trùng hoàn toàn với kết quả thì vé đó trúng giải nhất. Nếu vé trúng đúng 3 số so với kết quả (kể cả vị trí) thì vé đó trúng giải nhì.

- (a) Tính xác suất một vé số trúng giải nhất.
- (b) Tính xác suất một vé số trúng giải nhì

**Ví dụ 4.18.** Nếu ta gieo một đồng xu cân đối thì xác suất xuất hiện mặt ngửa là 0,5. Tuy nhiên trong thực tế không có một đồng xu nào cân đối và đồng chất. Nhà toán học người Pháp là Buffon đã thí nghiệm việc gieo đồng xu nhiều lần và đạt kết quả như sau

Số lần gieo	Tần số xuất hiện mặt ngửa	Tần suất xuất hiện mặt ngửa
4 040	2 048	0,5070
12 000	6 019	0,5016
24 000	12 012	0,5005



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 4.81.** Danh sách của lớp học được đánh số thứ tự từ 1 đến 32. Bạn Huy có số thứ tự 20.

- (a) Giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp trả bài. Tính xác suất để Huy được chọn (0,03125).

(b) Giáo viên chọn ngẫu nhiên 5 bạn trả bài. Tính xác suất để 5 bạn này có số thứ tự nhỏ hơn Huy (0,06).

**Bài 4.82.** Chọn ngẫu nhiên 13 lá bài từ 52 lá. Tính xác suất để chọn được 5 lá chuồn, 4 lá cơ, 3 lá rô và 1 lá bích (0,005).

**Bài 4.83.** Gieo đồng thời 2 con súc sắc. Tính xác suất để:

(a) Tổng số chấm xuất hiện trên hai con là 9. (1/9)

(b) Số chấm xuất hiện trên 2 con hơn kém nhau 2. (2/9)

**Bài 4.84.** Gieo đồng thời 3 con súc sắc. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên 3 con là 10. (1/8)

**Bài 4.85.** Trong giờ thể dục 1 lớp có 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ tập trung ngẫu nhiên thành 1 hàng dọc. Tính xác suất để người đứng đầu hàng và cuối hàng đều là học sinh nam. (7/22)

**Bài 4.86.** Một hộp có 5 bi xanh, 7 bi đỏ và 8 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 8 viên bi từ hộp. Tính xác suất để 8 viên bi có đủ 3 màu. (4529/4845)

**Bài 4.87.** Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ chia hết cho 10. (99/667)

**Bài 4.88.** Có 30 tấm thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 30. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các chữ số trên 3 thẻ chia hết cho 3. (68/203)

**Bài 4.89.** Một đoàn tàu có 4 toa đỗ ở sân ga. Có 4 hành khách từ sân ga lên tàu, mỗi người độc lập với nhau chọn 1 toa.

(a) Tìm xác suất mỗi toa có đúng 1 người lên tàu. (3/32)

(b) Tìm xác suất để 1 toa có 1 người, 1 toa có 3 người và 2 toa không có người. (3/16)

**Bài 4.90.** Một người bỏ ngẫu nhiên 3 lá thư vào 3 phong bì đã ghi địa chỉ. Tính xác suất để có ít nhất một lá thư bỏ đúng phong bì của nó. (2/3)

## §5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT



### QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

**Định nghĩa 4.12.** Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra" kí hiệu là  $A \cup B$  được gọi là **hợp của hai biến cố** A và B. Biến cố hợp còn được gọi là biến cố tổng.

Khi đó  $\Omega_{A \cup B} = \Omega_A \cup \Omega_B$ .

Một cách tổng quát: Cho  $k$  biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_k$  cùng liên quan đến phép thử T. Biến cố "có ít nhất một trong các biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_k$  xảy ra", kí hiệu là  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  được gọi là hợp của  $k$  biến cố đó.

**Ví dụ 4.19.** Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Gọi A là biến cố "Học sinh này biết chơi bóng đá" và B là biến cố "Học sinh này biết chơi bóng bàn". Khi đó  $A \cup B$  là biến cố "học sinh này biết chơi bóng đá hoặc bóng bàn"

**Định nghĩa 4.13.** Cho hai biến cố A, B cùng liên quan đến phép thử T. Hai biến cố A, B được gọi là **xung khắc** nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Nói cách khác  $\Omega_A \cap \Omega_B = \emptyset$ .

**Ví dụ 4.20.** Gieo một con súc sắc. Gọi A là biến cố "mặt xuất hiện là mặt chẵn", B là biến cố "mặt xuất hiện là mặt lẻ", C là biến cố "mặt xuất hiện là số nguyên tố". Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc nhưng A và C, B và C không phải là hai biến cố xung khắc.

**Định lí 4.4.** Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Một cách tổng quát nếu  $A_1, A_2, \dots, A_k$  là các biến cố đôi một xung khắc thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k).$$

**Định nghĩa 4.14.** Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "A không xảy ra" kí hiệu  $\bar{A}$  được gọi là **biến cố đối** của biến cố A

**Lưu ý:** Hai biến cố đối của nhau là hai biến cố xung khắc. Điều ngược lại nói chung không đúng.

**Định lí 4.5.** Cho biến cố A. Xác suất của biến cố đối  $\bar{A}$  là

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

**Ví dụ 4.21.** Một cái hộp có 100 quả cầu được đánh số từ 1 đến 100. Rút ngẫu nhiên ra hai quả cầu rồi nhân các con số ở hai quả cầu này lại. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.

**Ví dụ 4.22.** Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh và 7 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên một lần 3 viên bi. Tính xác suất 3 viên ấy chỉ có 2 màu.



## QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

**Định nghĩa 4.15.** Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A và B cùng xảy ra" kí hiệu AB (hoặc  $A \cap B$ ) được gọi là **giao của hai biến cố** A và B (biến cố này còn được gọi là biến cố tích).

Khi đó  $\Omega_{AB} = \Omega_A \cap \Omega_B$ .

Một cách tổng quát: Cho  $k$  biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_k$  cùng liên quan đến phép thử T. Biến cố "Tất cả  $A_1, A_2, \dots, A_k$ " cùng xảy ra được gọi là biến cố tích. Kí hiệu là  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ .

**Ví dụ 4.23.** Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Gọi A là biến cố "học sinh này biết chơi bóng đá", B là biến cố "học sinh này biết chơi bóng bàn". Khi đó biến cố AB là biến cố "học sinh biết chơi cả hai môn bóng đá và bóng bàn".

**Định nghĩa 4.16.** Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Một cách tổng quát: Cho  $k$  biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_k$ ;  $k$  biến cố này được gọi là **độc lập** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi biến cố không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại

**Ví dụ 4.24.** Xét phép thử gieo một con súc sắc liên tiếp 2 lần. Gọi A là biến cố "mặt xuất hiện là số chẵn", B là biến cố "mặt xuất hiện là số lẻ". Khi đó A và B là hai biến cố độc lập.

**Định lí 4.6.** Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Một cách tổng quát: Nếu  $k$  biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_k$  độc lập với nhau thì

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_k).$$

**Lưu ý:** Nếu hai biến cố A, B độc lập với nhau thì  $A$  và  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  và B,  $\bar{A}$  và  $\bar{B}$  cũng độc lập với nhau.

**Ví dụ 4.25.** Hai xạ thủ cùng bắn vào một mục tiêu với xác suất lần lượt là 0,7 và 0,5. Tính xác suất

- (a) Cả hai người bắn trúng
- (b) Có ít nhất một người bắn trúng
- (c) Có đúng một người bắn trúng
- (d) Không ai bắn trúng



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 4.91.** Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Gọi A là biến cố "Bạn đó học giỏi Văn", B là biến cố "Bạn đó học giỏi Toán".

- (a) A và B có phải là hai biến cố xung khắc hay không?
- (b) Biến cố  $A \cup B$  là gì?

**Bài 4.92.** Một hộp đựng 2 bi xanh, 3 bi đỏ, 4 bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi. Gọi A là biến cố "chọn được 2 bi xanh", B là biến cố "chọn được 2 bi đỏ" và C là biến cố "chọn được 2 bi vàng".

- (a) Các biến cố A, B, C có đôi một xung khắc hay không?
- (b) Biến cố "chọn được 2 bi cùng màu" là gì?
- (c) Biến cố E "chọn được 2 bi cùng màu" và biến cố F "chọn được 2 bi khác màu" có quan hệ gì?

**Bài 4.93.** Gieo 1 con súc sắc liên tiếp 2 lần. Gọi A là biến cố "lần gieo thứ nhất được số chẵn" và B là biến cố "lần gieo thứ 2 được số lẻ".

- (a) Hai biến cố A, B có độc lập không?
- (b) Giao của hai biến cố A, B là gì?

**Bài 4.94.** Hai xạ thủ bắn mỗi người một viên đạn vào bia. Gọi A là biến cố "Người thứ nhất bắn trúng bia" và B là biến cố "Người thứ hai bắn trúng bia". Hãy mô tả biến cố:  $A \cap B, A \cup B, \overline{A \cup B}, A \cup \overline{B}$ .

**Bài 4.95.** Một hộp chứa 6 viên bi trong đó có 1 bi xanh, 2 bi vàng và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Và cho các biến cố A: "Hai viên bi cùng màu", B: "Hai viên bi khác màu", C: "Hai viên bi trong đó có ít nhất 1 viên bi vàng".

(a) Xác định các biến cố  $A \cup B, A \cap B, A \cup C, A \cap C$ .

(b) Xét biến cố D: "Trong hai viên bi có đúng 1 viên bi vàng". Chứng minh rằng A và D xung khắc.

**Bài 4.96.** Ba người bắn vào cái bia. Gọi  $A_k$  là biến cố "Người thứ k bắn trúng";  $k=1,2,3$ . Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố  $A_1, A_2, A_3$ .

(a) A: "Có ít nhất một người bắn trúng".

(b) B: "Cả 3 đều bắn trúng"

(c) C: "Chỉ một người bắn trúng".

**Bài 4.97.** Một lớp có 27 học sinh nữ và 21 học sinh nam. Cần chọn ra 5 học sinh để lập một đội văn nghệ. Tính xác suất để chọn được ít nhất một học sinh nữ. (1691955/1712304)

**Bài 4.98.** Trong đợt thi học sinh giỏi của thành phố môn Toán có 5 em đạt giải trong đó có 4 nam và 1 nữ, môn Văn có 5 em đạt giải trong đó có 1 nam và 4 nữ, môn Hoá có 5 em đạt giải trong đó có 2 nam và 3 nữ, môn Lý có 5 em đạt giải trong đó có 3 nam và 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mỗi môn 1 học sinh đi dự đại hội thi đua? Tính xác suất để có cả học sinh nam lẫn học sinh nữ đi dự đại hội? (577/625)

**Bài 4.99.** Biết trong 10 vé xổ số có 2 vé trúng thưởng. Khi đó một người khác rút ngẫu nhiên 5 vé. Tính xác suất sao cho trong 5 vé có một vé trúng thưởng. (7/9)

**Bài 4.100.** Một lớp có 40 học sinh gồm 15 học sinh nam giỏi toán và 8 học sinh nữ giỏi văn. Tính xác suất để chọn được một học sinh nam giỏi toán hoặc một học sinh nữ giỏi văn (23/40).

**Bài 4.101.** Chọn ngẫu nhiên 8 lá bài. Tính xác suất chọn được ít nhất 3 lá già.

**Bài 4.102.** Gieo một con súc sắc. Gọi A là biến cố "mặt xuất hiện là số chẵn", B là biến cố "mặt xuất hiện là bội của 3". Hãy kiểm chứng công thức

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

**Bài 4.103.** Một lớp học gồm 40 học sinh trong đó có 15 học sinh giỏi Toán, 10 học sinh giỏi Lý và 5 học sinh giỏi Toán lẫn Lý. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Tính xác suất học sinh được chọn giỏi Toán hoặc Lý. (0,5)

**Bài 4.104.** Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số. Tìm xác suất của vé ấy không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5.  $(2(\frac{9}{10})^5 - (\frac{8}{10})^5)$

**Bài 4.105.** Một bình đựng 2 bi xanh, 4 bi đỏ. Lần lượt lấy 1 bi liên tiếp 3 lần và mỗi lần trả lại bi vào bình.

- (a) Tính xác suất lấy được 3 bi xanh.  $(1/27)$
- (b) Tính xác suất lấy được 3 bi đỏ.  $(8/27)$
- (c) Tính xác suất lấy được 3 bi không cùng màu.  $(2/3)$

**Bài 4.106.** Một bình đựng 5 bi xanh, 6 bi đỏ. Bốc đồng thời 3 viên bi. Tính xác suất có đúng 2 bi đỏ, tính xác suất bốc được 2 bi đỏ.

**Bài 4.107.** Một bình đựng 5 bi xanh, 6 bi đỏ. Bốc lần lượt 3 viên bi. Tính xác suất có đúng 2 bi đỏ, tính xác suất bốc được 2 bi đỏ.

**Bài 4.108.** Một cái hộp đựng 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy lần lượt 2 viên bi từ hộp. Tính xác suất để lần thứ 2 lấy được bi xanh.  $(4/10)$

**Bài 4.109.** Cho hai biến cố xung khắc A, B biết  $P(A) = 0.3, P(B) = 0.5$ . Tính  $P(A \cap B), P(A \cup B), P(\bar{A}), P(\bar{B})$ .

**Bài 4.110.** Cho hai biến cố bất kỳ A, B. Chứng minh  $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$ .

**Bài 4.111.** Chọn ngẫu nhiên 1 lá bài sau đó trả lại, tiếp tục rút ngẫu nhiên 1 lá nữa. Tính xác suất để được già bích và già cơ  $(1/2704)$

**Bài 4.112.** Bắn liên tiếp vào một mục tiêu đến khi viên đạn đầu tiên trúng đích thì ngừng lại. Tính xác suất sao cho phải bắn đến viên đạn thứ 6. Biết xác suất mỗi viên đạn trúng đích là 0.2 và các lần bắn độc lập với nhau.  $(0.065536)$

**Bài 4.113.** Hai xạ thủ A và B cùng nhắm bắn vào 1 con thỏ. Xác suất để xạ thủ A bắn trúng là  $\frac{2}{7}$ , xác suất để xạ thủ B bắn trúng là  $\frac{1}{8}$ . Tính xác suất để:

- (a) Cả hai đều bắn trúng.  $(1/28)$
- (b) Chỉ một trong hai người bắn trúng.  $(19/56)$
- (c) Ít nhất một trong hai người bắn trúng.  $(3/8)$
- (d) Cả hai xạ thủ bắn trượt.  $(5/8)$

**Bài 4.114.** Một công nhân phải theo dõi hoạt động của hai máy dệt A và B. Xác suất để người công nhân can thiệp máy dệt A trong vòng 1h là  $\frac{1}{7}$  và máy dệt B trong cùng thời gian trên là  $\frac{1}{2}$ . Tính xác suất để người công nhân không phải can thiệp máy dệt nào trong vòng 1h.

**Bài 4.115.** Xác suất để người xạ thủ bắn trúng bia là 0.2. Tính xác suất để trong 3 lần bắn người xạ thủ bắn trúng bia đúng 1 lần. (0.384)

**Bài 4.116.** Hai người cùng bắn vào một mục tiêu. Xác suất bắn trúng của từng người là 0,8 và 0,9. Tìm xác suất chỉ có 1 người bắn trúng mục tiêu. (0,26)

**Bài 4.117.** Có 5 hộp bánh, mỗi hộp đựng 8 bánh gồm 5 bánh mặn và 3 bánh ngọt. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 2 bánh. Tính xác suất biến cố trong 5 lần lấy ra đó có 4 lần lấy được 2 bánh mặn và một lần lấy được 2 bánh ngọt. (9375/1075648)

**Bài 4.118.** Gieo 1 cặp 2 con súc sắc 10 lần. Tìm xác suất để có ít nhất một lần 2 con đều ra mặt số 5.  $(1 - (\frac{35}{36})^{10})$

**Bài 4.119.** Một máy bay có 5 động cơ, trong đó có 3 động cơ ở cánh phải và 2 động cơ ở cánh trái. Mỗi động cơ ở cánh phải có xác suất bị hỏng là 0.1, mỗi động cơ ở cánh trái có xác suất bị hỏng là 0.05. Các động cơ hoạt động độc lập. Tìm xác suất để máy bay thực hiện chuyến bay an toàn biết chuyến bay chỉ an toàn nếu mỗi cánh có ít nhất một động cơ hoạt động. (0.9965)

**Bài 4.120.** Một người say rượu bước 8 bước. Mỗi bước anh ta tiến lên trên 1m hoặc lùi về sau 1m với xác suất như nhau. Tìm xác suất để:

(a) Anh ta trở lại điểm xuất phát. (70/256)

(b) Anh ta cách điểm xuất phát hơn 4m. (9/128)

**Bài 4.121.** Một bài thi trắc nghiệm gồm 12 câu hỏi, mỗi câu có 5 phương án trả lời nhưng chỉ có 1 phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 4đ và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 1đ. Một học sinh làm bài bằng cách đánh ngẫu nhiên kết quả. Tìm xác suất để:

(a) Học sinh đó được 13đ. (0,0532)

(b) Học sinh đó bị điểm âm. (0,5583)

**Bài 4.122.** Một vận động viên bắn súng bắn 3 viên đạn. Xác suất để trúng cả 3 viên vào vòng 10đ là 0.008, xác suất để 1 viên trúng vòng 8 là 0.15, xác suất để 1 viên trúng vòng dưới 8 là 0.4. Tìm xác suất để vận động viên đạt ít nhất 28đ. (0,0935)

**Bài 4.123.** Gọi X là tập hợp các số có hai chữ số được lập từ tập  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Lấy ngẫu nhiên 2 phần tử của X. Tính xác suất để hai số lấy được đều chẵn. (1/3)

**Bài 4.124.** Gọi S là tập các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau được lập từ  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Chọn ngẫu nhiên 2 số từ S. Tính xác suất để tích hai số được chọn là số chẵn. (5/6)

**Bài 4.125.** Một tổ có 5 học sinh nữ và 8 học sinh nam xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để không có 2 học sinh nữ nào đứng cạnh nhau. (14/143)

**Bài 4.126.** Cho  $X = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ . Ký hiệu  $G$  là tập các số có 4 chữ số có 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ  $X$  mà chia hết cho 5. Lấy ngẫu nhiên một tập trong  $G$ , tính xác suất để số này không lớn hơn 4000. (4/11)

**Bài 4.127.** Từ tập  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Viết ngẫu nhiên lên bảng 2 số tự nhiên, mỗi số gồm 3 chữ số khác nhau lập từ  $A$ . Tính xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5. (12/25)

**Bài 4.128.** Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số có 4 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 1 trong các số được lập. Tính xác suất số lấy được có 2 chữ số chẵn và có hai chữ số lẻ. (3/5)

**Bài 4.129.** Một lớp có 30 học sinh. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hoạt động của Đoàn trường. Xác suất chọn được 2 nam và 1 nữ là  $\frac{12}{29}$ . Tính số học sinh nữ của lớp. (14)

**Bài 4.130.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số phân biệt được lập từ  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Chọn một số ngẫu nhiên từ  $S$ . Tính xác suất để số được chọn có chứa số 5. (21/25)

**Bài 4.131.** Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số có 4 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất số được lấy ra có 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ. (3/5)

**Bài 4.132.** Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong một lớp có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ để tham gia văn nghệ. Tính xác suất để 5 học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ mà số học sinh nữ ít hơn số học sinh nam. (325/506)

**Bài 4.133.** Gọi  $M$  là tập các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập  $M$ , tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là một số lẻ. (8/15)

**Bài 4.134.** Trong lớp học có 6 bóng đèn, mỗi bóng có xác suất cháy là  $\frac{1}{4}$ . Lớp học đó đủ sáng nếu có ít nhất 4 bóng đèn sáng. Tính xác suất để lớp có đủ ánh sáng. (1701/2048)

**Bài 4.135.** Gieo một con súc sắc liên tiếp 6 lần. Tìm xác suất để có ít nhất một lần ra mặt 6 chấm.  $(1 - (\frac{5}{6})^6)$

**Bài 4.136.** Gieo 2 con súc sắc 2018 lần. Tính xác suất có ít nhất một lần ra hai con đều có mặt 6 chấm.  $(1 - (\frac{35}{36})^{2018})$

**Bài 4.137.** Gieo đồng thời 3 con súc sắc. Bạn là người thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất 2 con có mặt 6 chấm. Tìm xác suất để trong 5 lần chơi bạn thắng ít nhất 3 lần. (52032/27<sup>5</sup>)

**Bài 4.138.** Có 3 xạ thủ bắn vào tấm bia. Xác suất trúng đích lần lượt là 0.6, 0.7 và 0.8. Tính xác suất để có ít nhất một người bắn trúng bia. (0,976)

**Bài 4.139.** Huy và Trúc thi đấu bóng bàn với nhau, ai thắng trước 3 séc thì thắng trận. Xác suất Huy thắng là 0.4 (không có séc hoà). Tính xác suất Huy thắng trận. (0,31744)

**Bài 4.140.** Một nhóm xạ thủ gồm 10 người trong đó có 3 xạ thủ loại I, 7 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích trong mỗi lần bắn của xạ thủ loại I và loại II lần lượt là 0.9 và 0.8. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ trong 10 người và cho bắn 1 viên đạn. Hãy tính xác suất để viên đạn trúng đích. (0,83)

**Bài 4.141.** Có 3 lô hàng, người ta lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng 1 sản phẩm. Biết xác suất để được 1 sản phẩm tốt từ mỗi lô hàng là 0.5, 0.6 và 0.7. Tính xác suất để trong 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất 1 sản phẩm có chất lượng tốt. (0.94)

**Bài 4.142.** Một hộp chứa 11 viên bi đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 viên bi một cách ngẫu nhiên, rồi cộng các số trên 6 bi này lại. Tính xác suất số vừa tính là số lẻ. (118/231)

**Bài 4.143. A, A1 2014** Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số thứ tự từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều có số chẵn. (1/26)

**Bài 4.144. ĐH 2016** Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có 2 nút nào ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên đã nhấn ngẫu nhiên 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để mở được cửa phòng học đó. (8/720)

**Bài 4.145. ĐH 2015** Trong đợt ứng phó dịch MERS-CoV, sở y tế thành phố chọn ngẫu nhiên 3 đội phòng chống dịch cơ động trong số 5 đội của trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để có ít nhất hai đội của các trung tâm y tế cơ sở được chọn. (209/230)

**Bài 4.146. A2014** Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn? (1/26)

**Bài 4.147. B2014** Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa người ta gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm lấy ngẫu nhiên 3 hộp để kiểm nghiệm. Tính xác suất 3 hộp có đủ 3 loại sữa. (3/11)

**Bài 4.148. B2013** Có hai chiếc hộp chứa bi . Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng ,hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng . Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi . Tính xác suất để lấy được hai viên bi cùng màu . (10/21)

**Bài 4.149. A2013** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của  $S$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ , tính xác suất để số được chọn là số chẵn. (3/7)

PHẦN



---

---

HÌNH HỌC

# CHƯƠNG

## 5



## HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

### §1. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC $\alpha$ VỚI $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$



#### LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 5.1.** Định nghĩa tỉ số lượng giác của một góc  $\alpha$  có số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ . Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  có nửa đường tròn tâm  $O$  bán kính 1 nằm phía trên trục hoành, xét tia  $Ot$  sao cho  $\angle xOt = \alpha$ , tia  $Ot$  cắt nửa đường tròn tại điểm  $M(x_m; y_m)$ . Khi đó

$$x_m = \cos \alpha, y_m = \sin \alpha, \frac{x_m}{y_m} = \tan \alpha, \frac{y_m}{x_m} = \cot \alpha$$

Từ định nghĩa này ta có các tính chất sau:

#### Tính chất 5.1.

Ta có các tính chất sau:

- $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$
- $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$
- $\tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$
- $\cot \alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$

**Tính chất 5.2.** Với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  ta có:

- $0 \leq \sin \alpha \leq 1$  và  $-1 \leq \alpha \leq 1$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$



#### BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

**Ví dụ 5.1.** Cho  $\alpha$  thỏa  $\sin \alpha = \frac{1}{3}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ .

**Ví dụ 5.2.** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính:

(a)  $A = \frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$

(b)  $B = \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha}$

**Ví dụ 5.3.** Chứng minh các đẳng thức sau:

(a)  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$

(b)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

**Ví dụ 5.4.** Chứng minh các biểu thức

(a)  $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$       (b)  $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

**Ví dụ 5.5.** Rút gọn các biểu thức:

(a)  $A = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \left[ 1 - \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} \right]$ .

(b)  $B = \left( 1 + \cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right) \left( 1 + \cot \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} \right)$ .



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 5.1.**

(a) Cho  $\cos \alpha = \frac{-1}{5}$ . Tính  $\sin \alpha, \cot \alpha$ .

(b) Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính  $\cos \alpha, \sin \alpha$ .

**Bài 5.2.** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính

(a)  $\frac{3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha}{\cos \alpha - 4 \sin \alpha}$ .

(b)  $\frac{3 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ .

**Bài 5.3.** Cho  $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$ . Tính

(a)  $\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$ .

(b) Tính  $\tan \alpha$ .

(c)  $\sin \alpha, \cos \alpha$ .

**Bài 5.4.** Chứng minh các biểu thức

$$(a) \frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1.$$

$$(c) 1 - \cot^4 x = \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^4 x}.$$

$$(b) \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2 \tan^2 x.$$

$$(d) (1 - \cos x)(1 + \cot^2 x) = \frac{1}{1 + \cos x}.$$

**Bài 5.5.** Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$

$$(a) \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$$

$$(b) \cos^4 x(2 \cos^2 x - 3) + \sin^4 x(2 \sin^2 x - 3)$$

$$(c) \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$$

$$(d) \cos^2 x \cot^2 x + 5 \cos^2 x - \cot^2 x + 4 \sin^2 x$$

**Bài 5.6.** Tính tổng:

$$S = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 180^\circ.$$

**Bài 5.7.** Cho  $\triangle ABC$ , chứng minh rằng:

$$(a) \cos(A + B - C) = -\cos 2C.$$

$$(b) \sin \frac{A + B + 3C}{2} = \cos C.$$

**Bài 5.8.** Rút gọn các biểu thức:

$$(a) A = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot \cot \alpha.$$

$$(b) B = \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \cot^2 \alpha}.$$

**Bài 5.9.** Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1}{\sin \alpha - \sqrt{\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha}}, \text{ với } \alpha \in (0^\circ; 180^\circ).$$

**Bài 5.10.** Rút gọn biểu thức:

$$(a) A = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}.$$

$$(b) B = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} - \cot^2 \alpha \cdot \cot^2 \beta.$$

**Bài 5.11.** Chứng minh rằng:

$$(a) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

$$(b) \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

**Bài 5.12.** Chứng minh rằng:

$$(a) (1 + \tan \alpha)(1 + \cot \alpha) \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$(b) (1 + \tan \alpha) \cos^2 \alpha + (1 + \cot \alpha) \sin^2 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2.$$

**Bài 5.13.** Cho  $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ . Chứng minh:

$$(a) \frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$$

$$(b) \frac{\sin^{10} x}{a^4} + \frac{\cos^{10} x}{b^4} = \frac{1}{(a+b)^4}$$

**Bài 5.14.** Cho  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của các biểu thức sau:

$$(a) A = 2 \sin \alpha + 1.$$

$$(b) B = 3 \cos \alpha + 4 \sin \alpha.$$

$$(c) C = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$(d) D = \sin^2 \alpha - 5 \cos \alpha + 1.$$

## §2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC



### LÝ THUYẾT

**Định lí 5.1.** (Định lý cosin) Cho tam giác  $ABC$ , đặt  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Khi đó:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$

**Chứng minh.** Ta xét trường hợp tam giác  $ABC$  có  $A$  nhọn. Vẽ đường cao  $BK$ ,  $K$  thuộc đoạn  $AC$ . Ta có  $BK = AB \sin BAC, AK = AB \cos BAC$ .

Suy ra  $BC^2 = BK^2 + CK^2 = (AB \sin A)^2 + (AC - AB \cos A)^2 = AB^2 \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cos A + AB^2 \cos^2 A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .

Trường hợp góc  $A$  tù và  $K$  thuộc tia đối tia  $A$  ta cũng làm tương tự, khi đó  $AK = -AB \sin BAC$  và  $CK = AC - AB \sin BAC$ , ta cũng có điều cần chứng minh.

**Định lí 5.2.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khi đó

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

**Chứng minh.** Vẽ đường kính  $BD$ , ta có  $\sin A = \sin BDC = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$ , suy ra  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .

Các đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

**Định lí 5.3.** (Độ dài đường trung tuyến) Trong tam giác  $ABC$ , gọi  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ  $A, B, C$ . Khi đó

- $m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$ .
- $m_b^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) - \frac{1}{4}b^2$ .
- $m_c^2 = \frac{1}{2}(b^2 + a^2) - \frac{1}{4}c^2$ .

**Chứng minh.** Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Áp dụng định lý cosin cho tam giác  $ABM$ , ta có  $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos ABM$  (1).

Hơn nữa  $\cos ABM = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot AC}$ ,  $BM = \frac{1}{2}BC$ , thế vào (1) ta có  $AM^2 =$

$$AB^2 + \frac{1}{4}BC^2 - 2AB \cdot \frac{1}{2}BC \cdot \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2.$$

$$\text{Hay } m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2.$$

**Định lý 5.4.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $S$  là diện tích tam giác,  $p$  là nửa chu vi. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= rp \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

**Chứng minh.** Ta có  $S = \frac{1}{2}h_b \cdot b$ , mà  $h_b = c \sin A$  nên  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ .

Theo định lý sin ta có  $\sin A = \frac{a}{2R}$ , do đó  $S = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$ .

Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, khi đó

$$S = S_{IAB} + S_{IAC} + S_{IBC} = \frac{1}{2}r \cdot c + \frac{1}{2}r \cdot b + \frac{1}{2}r \cdot a = \frac{1}{2}r \cdot (a + b + c) = rp$$

Ta có

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{2}bc \sqrt{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}$$

Từ  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  ta có

$$(1 + \cos A) = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{2bc}$$

và

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2bc}$$

Mặt khác

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2(p - c), a + c - b = 2(p - b), b + c - a = 2(p - a)$$

Kết hợp lại ta có

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



## BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

### 1 DẠNG TÍNH TOÁN

**Ví dụ 5.6.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 5, AC = 8, \angle BAC = 120^\circ$ .

- (a) Tính  $BC$  và độ dài đường trung tuyến  $AM$ .
- (b) Tính diện tích tam giác  $ABC$  và bán kính đường tròn ngoại tiếp.

**Ví dụ 5.7.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle A = 60^\circ, \angle B = 45^\circ$  và  $BC = 4$ .

- (a) Tính độ dài cạnh  $AC, AB$ .
- (b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Ví dụ 5.8.** Tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn đường kính  $BC = 2R, \angle ABC = 60^\circ$ .  $D$  là điểm chính giữa cung  $BC$  không chứa  $A$ .

- (a) Tính độ dài  $AD$ .
- (b) Tính diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác  $ABD$ .

### 2 CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

**Ví dụ 5.9.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

- (a)  $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$
- (c)  $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$
- (b)  $S = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$
- (d)  $rr_a = (p - b)(p - c)$

**Ví dụ 5.10.** Cho  $\triangle ABC$ . Chứng minh rằng

- (a)  $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$
- (b)  $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$
- (c)  $S = \frac{r^2(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$

### 3 CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**Ví dụ 5.11.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

- (a)  $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b + c}$ .
- (b)  $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ .

## 4 NHẬN DIỆN TAM GIÁC

**Ví dụ 5.12.** Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  khi và chỉ khi  $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$ . (1)

**Ví dụ 5.13.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn điều kiện:  $a = 2b \cos C$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  cân.

**Ví dụ 5.14.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a^4 = b^4 + c^4$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  nhọn.

**Ví dụ 5.15.** Cho  $\triangle ABC$ , diện tích bằng  $S$ , các đường cao  $h_a, h_b, h_c$ . Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  đều khi và chỉ khi:

$$S = \frac{1}{6} (a \cdot h_b + b \cdot h_c + c \cdot h_a).$$



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 5.15.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle A = 60^\circ, BC = 3$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Bài 5.16.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 13, AC = 14, BC = 15$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ ,  $\sin A$  và độ dài trung tuyến kẻ từ  $C$  của tam giác  $ABC$ .

**Bài 5.17.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 1, AC = 2, \angle A = 120^\circ$ .

(a) Tính  $BC$  và diện tích tam giác  $ABC$ .

(b) Tính độ dài đường cao  $AH$  và trung tuyến  $BK$  của tam giác  $ABC$ .

**Bài 5.18.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle A = 60^\circ, AB = 9, AC = 3$ .

(a) Tính diện tích tam giác và bán kính đường tròn ngoại tiếp.

(b) Gọi  $M$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $C$ . Tính  $AM$ .

**Bài 5.19.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6, AC = 10, BC = 14$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ , tính độ dài  $AM$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$  và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Bài 5.20.** Giải tam giác  $ABC$ . Biết

(a)  $c = 20, b = 16, a = 12$

(b)  $a = 8, c = 5, \hat{B} = 60^\circ$

**Bài 5.21.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 120^\circ, b = 2, c = 1$ .

(a) Tính  $BC$ .

(b) Trên  $CA$  kéo dài lấy điểm  $D$  sao cho  $BD = 2$ . Tính  $AD$ .

**Bài 5.22.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 12, CA = 13$ , trung tuyến  $AM = 8$ .

(a) Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

(b) Tính góc  $B$ .

**Bài 5.23.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 60^\circ, a = 10, r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ .

(a) Tính  $R$

(b) Tính  $b, c$ .

**Bài 5.24.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 4, AC = 5, BC = 6$ .

(a) Tính các góc  $A, B, C$ .

(b) Tính độ dài đường trung tuyến, độ dài đường cao và diện tích tam giác

(c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác.

**Bài 5.25.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A$  là góc tù,  $AB = 4, AC = 5, S = 4\sqrt{6}$ . Tính  $BC$  và bán kính đường tròn nội và ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Bài 5.26.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A, AB = 3, AC = 4, AH$  là đường cao.

(a) Tính  $BC, BH, CH, AH$ .

(b) Gọi  $I$  là điểm thuộc  $AB$  sao cho  $AI = 2BI$ ,  $CI$  cắt  $AH$  tại  $E$ . Tính  $CE$

(c) Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCM$ .

**Bài 5.27.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , gọi  $N$  là trung điểm  $CD$ ,  $M$  là điểm trên  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ .

(a) Tính các cạnh tam giác  $BNM$ .

(b) Tính diện tích tam giác  $BNM$ .

(c) Gọi  $I = BN \cap AC$ . Tính  $CI$ .

(d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BNM$ .

**Bài 5.28.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ ,  $AB = x$ .

(a) Tính  $\cos A, \cos B, \cos C$  theo  $R, x$

(b) Tính  $r$  theo  $R, x$

(c) Định  $x$  để diện tích tam giác  $ABC$  lớn nhất.

**Bài 5.29.** Cho  $\triangle ABC$ . Chứng minh rằng

(a) 
$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

(b) 
$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

(c) 
$$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

**Bài 5.30.** Cho  $\triangle ABC$ . Chứng minh rằng

(a) 
$$S = \frac{1}{2}R(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$$

(b) 
$$S = p(p - a) \tan \frac{A}{2}$$

**Bài 5.31.** Cho  $\triangle ABC$  có  $\frac{b}{c} = \frac{m_c}{m_b} \neq 1$ . Chứng minh  $\cot A = \frac{1}{2}(\cot B + \cot C)$ .

**Bài 5.32.** Cho  $\triangle ABC$  có  $a^2 + b^2 = 2c^2$ . Chứng minh  $m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$ .

**Bài 5.33.** Cho  $\triangle ABC$ . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ  $B$  và  $C$  vuông góc với nhau là  $b^2 + c^2 = 5a^2$ .

**Bài 5.34.** Cho tam giác  $ABC$  có  $b + c = 2a$ . Chứng minh

(a)  $2 \sin A = \sin B + \sin C$

(b) 
$$\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

(c)  $6Rr = bc$

**Bài 5.35.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $r_a, r_b, r_c$  là bán kính đường tròn bàng tiếp góc  $A, B, C$ . Chứng minh rằng

$$(a) r_a = p \tan \frac{A}{2}$$

$$(b) \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$(c) r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

**Bài 5.36.** Cho tam giác  $ABC$  có các trung tuyến  $BM$  và  $CN$  cắt nhau tại  $G$ . Biết  $BM = \frac{3}{2}, CN = 3, \angle BGC = 120^\circ$ . Tính độ dài các cạnh của tam giác  $ABC$ .

**Bài 5.37.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $6a$ .  $D$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $BD = 2a$ . Trung trực của  $AD$  cắt  $AB, AC$  tại  $E, F$ . Tính độ dài  $EF$  theo  $a$ .

**Bài 5.38.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 10$ . Gọi  $(I)$  là đường tròn tâm  $I$  thuộc cạnh  $BC$  và tiếp xúc với  $AB, AC$ .

(a) Biết  $IA = 3, 2IB = 3IC$ . Tính độ dài các cạnh  $AB, AC$ .

(b) Biết  $(I)$  có bán kính bằng 3 và  $2IB = 3IC$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  và các cạnh  $AB, AC$ .

**Bài 5.39.** Cho hình thang cân  $ABCD$  với đáy lớn  $AB$  ngoại tiếp đường tròn bán kính  $r$ .

(a) Đặt  $\angle BAD = \alpha$ . Tính độ dài các cạnh đáy và đường chéo theo  $r, \alpha$ .

(b) Gọi  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình thang. Biết  $\frac{R}{r} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ . Tính góc  $\angle BAD$ .

**Bài 5.40.** Chứng minh rằng trong tam giác  $ABC$  ta có:

$$(a) \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$(b) \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

**Bài 5.41.** Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  và một điểm  $A$  bên ngoài đường tròn  $(O)$ . Một đường thẳng thay đổi qua  $A$  cắt đường tròn tại hai điểm  $B$  và  $C$ . Đặt  $\angle BOA = \alpha, \angle COA = \beta$ . Chứng minh rằng  $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}$  không đổi.

**Bài 5.42.** Cho tam giác  $ABC$  có diện tích là  $S$ .

$$(a) \text{ Chứng minh } \cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

(b) Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Đặt  $\angle AMB = \phi$ . Chứng minh  $\cot C - \cot B = 2 \cot \phi$ .

(c) Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Đặt  $\angle BGC = \alpha$ . Chứng minh  $\cot \alpha = \frac{5bc \cos A - 2(b^2 + c^2)}{3bc \sin A}$

**Bài 5.43.** Chứng minh trong tam giác  $ABC$  có

(a)  $b^2 + c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \cot B + \cot C = 2 \cot A$ .

(b)  $b^4 + c^4 = a^4 \Leftrightarrow \tan B \tan C = 2 \sin^2 A$ .

**Bài 5.44.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle B > \angle C$  và  $O, I, O_1$  là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và đường tròn bàng tiếp góc  $\angle A$ . Chứng minh

$$\tan \angle IOO_1 = \frac{2(\sin B - \sin C)}{2 \cos A - 1}$$

**Bài 5.45.** Cho tam giác  $ABC$  và  $D, E$  là các điểm trên cạnh  $BC$  sao cho:  $BD = DE = EC = \frac{BC}{3}$ . Đặt  $\angle BAD = \alpha, \angle DAE = \beta, \angle EAC = \lambda$ . Chứng minh

$$(\cot \alpha + \cot \beta)(\cot \beta + \cot \lambda) = 4(1 + \cot^2 \beta)$$

# CHƯƠNG

## 6



## VECTƠ

---

---

### §1. VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN



#### LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 6.1.** Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.

Nếu vectơ có điểm đầu là  $M$  và điểm cuối là  $N$  ta kí hiệu vectơ đó là  $\overrightarrow{MN}$ .

Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là **vectơ-không**.

**Định nghĩa 6.2.** Đường thẳng  $AB$  được gọi là giá của vectơ  $\overrightarrow{AB}$ . Với vectơ-không  $\overrightarrow{AA}$  thì mọi đường thẳng qua  $A$  đều là giá của nó.

- Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương thì **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.
- Vectơ không thì cùng phương cùng hướng với mọi vectơ.

**Định nghĩa 6.3.** Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối. Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là độ dài đoạn thẳng  $AB$ . Kí hiệu  $|\overrightarrow{AB}|$ . Độ dài vectơ-không bằng 0.

**Định nghĩa 6.4.** Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng nhau kí hiệu là  $\vec{a} = \vec{b}$ .

**Định nghĩa 6.5.** (Tổng hai vectơ) Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy một điểm  $A$  nào đó rồi xác định các điểm  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . Khi đó vectơ  $\overrightarrow{AC}$  được gọi là tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Kí hiệu

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

**Tính chất 6.1.** Phép cộng có các tính chất sau:

- (a) Tính chất giao hoán  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(b) Tính chất kết hợp  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

(c) Tính chất của vectơ không:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

**Tính chất 6.2.**

(a) (**Quy tắc 3 điểm**) Với 3 điểm  $A, B, C$  ta có  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .

(b) (**Quy tắc hình bình hành**) Với hình bình hành  $ABCD$ , ta có  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ .

**Tính chất 6.3.** Cho  $\vec{a}$ . Vectơ  $\vec{b}$  được gọi là vectơ đối của  $\vec{a}$  nếu  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .

**Nhận xét:** Nếu vectơ  $\vec{b}$  và  $\vec{b}'$  cùng là vectơ đối của  $\vec{a}$  thì  $\vec{b} = \vec{b}'$ . Thật vậy, vì theo định nghĩa, ta có  $\vec{b} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b} + \vec{a} + \vec{b}' = \vec{0} + \vec{b}' = \vec{b}'$ .

Từ đó ta thấy mỗi vectơ  $\vec{a}$  có một vectơ đối duy nhất, kí hiệu là  $-\vec{a}$ .

**Nhận xét:** Vectơ đối của  $\vec{0}$  là  $\vec{0}$ . Nếu  $\vec{a} \neq \vec{0}$  thì  $-\vec{a}$  ngược hướng và cùng độ dài với  $\vec{a}$ .

**Định nghĩa 6.6.** (Hiệu hai vectơ) Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta định nghĩa

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

**Tính chất 6.4.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Khi đó ta có

(a)  $\vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$ .

(b)  $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$ .

(c)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ .

(d)  $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ .

**Tính chất 6.5.** Với 3 điểm  $A, B, C$  thì

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

**Định nghĩa 6.7.** (Phép nhân của một vectơ với một số) Cho vectơ  $\vec{a}$  và số thực  $k$ . Phép nhân của  $\vec{a}$  và số thực  $k$ , kí hiệu  $k \cdot \vec{a}$  được xác định như sau:

- Nếu  $k = 0$  hoặc  $\vec{a} = \vec{0}$  thì  $k \cdot \vec{a} = \vec{0}$ .
- Các trường hợp khác thì  $k \cdot \vec{a}$  là một vectơ cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$ , và  $|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ .

**Tính chất 6.6.** Cho các vec tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  và các số thực  $k, m$ . Khi đó

$$(a) k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}.$$

$$(b) k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a} = (k + m) \cdot \vec{a}.$$

$$(c) k \cdot (m \cdot \vec{a}) = (km) \cdot \vec{a}.$$

$$(d) k \cdot \vec{a} = \vec{0} \text{ khi và chỉ khi } k = 0 \text{ hoặc } \vec{a} = \vec{0}.$$



## CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 6.1.** Cho 3 điểm  $A, B, C$  phân biệt. Xét vị trí của các điểm  $A, B, C$  biết rằng

$$(a) \text{Vectơ } \vec{AB} \text{ cùng phương với vectơ } \vec{AC}.$$

$$(b) \text{Vectơ } \vec{AB} \text{ cùng hướng với vectơ } \vec{AC}.$$

$$(c) \text{Vectơ } \vec{AB} \text{ bằng vectơ } \vec{BC}.$$

**Ví dụ 6.2.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Dựng và tính độ dài của các vec tơ sau:

$$(a) \vec{u} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$(b) \vec{v} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{DB}$$

**Ví dụ 6.3.** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh rằng

$$\vec{AB} + \vec{DC} = \vec{AC} + \vec{DB} = 2\vec{MN}$$

**Ví dụ 6.4.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác,  $M$  là trung điểm  $BC$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $G$  qua  $M$ .

$$(a) \text{Chứng minh } \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GD}$$

$$(b) \text{Chứng minh } \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}.$$

$$(c) \text{Cho điểm } O. \text{ Chứng minh rằng } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3 \cdot \vec{OG}.$$

(d) Cho tam giác  $A'B'C'$  có trọng tâm  $G'$ . Chứng minh rằng

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = 3\vec{GG'}$$

Từ đó suy ra điều kiện để 2 tam giác có cùng trọng tâm.

**Ví dụ 6.5.** Tam giác  $ABC$  là tam giác gì nếu thỏa mãn  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$

**Ví dụ 6.6.** Cho ngũ giác đều  $ABCDE$  tâm  $O$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$$

**Ví dụ 6.7.** Cho tam giác  $ABC$ .  $M$  thuộc cạnh  $BC$  thỏa  $MB = 2MC$ .

(a) Chứng minh  $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$ .

(b) Chứng minh  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

**Ví dụ 6.8.** Cho tam giác  $ABC$  đều.  $M$  là điểm nằm trong tam giác  $ABC$ . Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Gọi  $D', E', F'$  lần lượt là điểm đối xứng của  $M$  qua  $BC, AC, AB$ . Chứng minh  $O$  là trọng tâm tam giác  $D'E'F'$  và  $\overrightarrow{MD'} + \overrightarrow{ME'} + \overrightarrow{MF'} = 3 \cdot \overrightarrow{MO}$ .

**Ví dụ 6.9.** Cho các vec tơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Chứng minh rằng

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Tìm điều kiện để đẳng thức xảy ra.

**Ví dụ 6.10.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$  bán kính 1, trên nửa đường tròn lấy các điểm  $A, B, C$  phân biệt. Chứng minh rằng

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| \geq 1$$



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 6.1.** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Chứng minh

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$$

**Bài 6.2.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh rằng nếu  $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$  thì  $AC \perp BD$ .

**Bài 6.3.** Cho tam giác  $ABC$ . Về phía ngoài tam giác  $ABC$ , dựng các hình bình hành  $ABIJ, BCPQ, CARS$ .

Chứng minh rằng  $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$ .

**Bài 6.4.** Cho 5 điểm  $A, B, C, D$  và  $E$ . Chứng minh rằng:

$$(a) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

$$(b) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DE}$$

**Bài 6.5.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Chứng minh rằng  $|\vec{a} - \vec{b}| \geq |\vec{a}| - |\vec{b}|$ .

**Bài 6.6.** Cho tam giác  $ABC$ .  $M$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $C$ .

$$(a) \text{ Chứng minh } \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}.$$

$$(b) \text{ Chứng minh } \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{BA}.$$

**Bài 6.7.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Các điểm  $M, N$  theo thứ tự thuộc cạnh  $AD, BC$  sao cho  $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = \frac{x}{y}$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{x+y}(y\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{DC})$ .

**Bài 6.8.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $O$  là điểm bất kì. Gọi  $D, E, F$  lần lượt là điểm đối xứng của  $O$  qua trung điểm các cạnh  $BC, AC, AB$  của tam giác  $ABC$ . Tìm vị trí điểm  $O$  để hai tam  $ABC$  và  $DEF$  có cùng trọng tâm.

**Bài 6.9.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$ .  $M$  là điểm nằm trong lục giác. Gọi  $P, Q, R, S, T, U$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên các cạnh  $AB, BC, CD, DE, EF, FA$ . Chứng minh rằng hai tam giác  $PQT$  và  $QSU$  có cùng trọng tâm.

**Bài 6.10.** Cho nửa đường tròn  $O$  bán kính 1. Trên nửa đường tròn lấy 2025 điểm phân biệt  $A_1, A_2, \dots, A_{2025}$ . Chứng minh rằng

$$|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2025}}| \geq 1$$

## §2. SỰ BIỂU DIỄN VECTO



### LÝ THUYẾT

**Định lí 6.1.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  trong đó  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Khi đó  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số thực  $k$  thỏa  $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ .

**Chứng minh.**

- (a) **Chiều thuận.** Rõ ràng nếu  $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$  thì theo định nghĩa, hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương.
- (b) **Chiều đảo.** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương.

- **Trường hợp 1.** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng. Đặt  $k = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ , ta chứng minh

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b}. \text{ Thực vậy:}$$

Do  $k > 0$  nên  $k \cdot \vec{b}$  cùng hướng  $\vec{b}$  mà  $\vec{b}$  cùng hướng  $\vec{a}$  nên  $k \cdot \vec{b}$  cùng hướng  $\vec{a}$ ;

$$\text{Và } |k \cdot \vec{b}| = |k| \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}|.$$

- **Trường hợp 2.** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng. Đặt  $k = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ , chứng minh tương tự như trên ta cũng có  $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ .

**Hệ quả 6.1.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  là hai vectơ không cùng phương và các số thực  $x, y$ . Khi đó  $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{0}$  khi và chỉ khi  $x = y = 0$ .

**Hệ quả 6.2.** Cho 3 điểm  $A, B, C$  phân biệt.

Khi đó  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại  $k$  sao cho  $\vec{AB} = k \cdot \vec{AC}$ .

**Hệ quả 6.3.** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  là điểm nằm giữa  $A$  và  $B$ , khi đó

$$\vec{MA} = -\frac{MA}{MB} \cdot \vec{MB} \quad \text{và} \quad \vec{AM} = \frac{AM}{AB} \cdot \vec{AB}$$

**Định lí 6.2.** Cho 2 vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương. Khi đó với mọi  $\vec{c}$  thì tồn tại duy nhất cặp số  $(x; y)$  sao cho

$$\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$$

**Chứng minh.** • Lấy điểm  $O$  ta dựng các vectơ  $\vec{AO} = \vec{a}; \vec{OB} = \vec{b}; \vec{OC} = \vec{c}$ .

- Từ  $C$  dựng các đường thẳng song song với  $OB, OA$  cắt  $OA, OB$  tại  $D$  và  $E$ . Khi đó  $\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OE}$ .
- Mà  $\vec{OD}$  và  $\vec{OA}$  cùng phương nên tồn tại  $x$  thỏa  $\vec{OD} = x \cdot \vec{OA} = x \cdot \vec{a}$ ; tương tự tồn tại  $y$  sao cho  $\vec{OE} = y \cdot \vec{OB} = y \cdot \vec{b}$ .
- Do đó  $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$ .
- Giả sử tồn tại  $x', y'$  thỏa  $\vec{c} = x' \cdot \vec{a} + y' \cdot \vec{b}$ . Khi đó  $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = x' \cdot \vec{a} + y' \cdot \vec{b} \Leftrightarrow (x - x') \vec{a} + (y - y') \vec{b} = \vec{0}$ . Theo hệ quả 1.4.3 thì  $x = x', y = y'$ .

**Hệ quả 6.4.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương. Các vectơ  $\vec{c}, \vec{d}$ , giả sử  $\vec{c} = x_1 \cdot \vec{a} + y_1 \cdot \vec{b}$  và  $\vec{d} = x_2 \cdot \vec{a} + y_2 \cdot \vec{b}$ .

Khi đó

(a)  $\vec{c} = \vec{d} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$ .

(b)  $\vec{c}, \vec{d}$  cùng phương khi và chỉ khi  $x_1 = k \cdot x_2, y_1 = k \cdot y_2$ , hay  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$  nếu  $x_2, y_2 \neq 0$ .

**Chứng minh.**

(a) Ta có  $\vec{c} = \vec{d} \Leftrightarrow x_1 \cdot \vec{a} + y_1 \cdot \vec{b} = x_2 \cdot \vec{a} + y_2 \cdot \vec{b}$   
 $\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \vec{a} + (y_1 - y_2) \vec{b} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$

(b)  $\vec{c}, \vec{d}$  cùng phương, khi và chỉ khi

$$\vec{c} = k \cdot \vec{d} \Leftrightarrow x_1 \cdot \vec{a} + y_1 \cdot \vec{b} = k y_1 \cdot \vec{a} + k y_2 \cdot \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = k y_1, x_2 = k y_2$$

**Hệ quả 6.5.** Cho 3 điểm  $A, B, C$  và hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương. Giả sử  $\vec{AB} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$  và  $\vec{AC} = x' \cdot \vec{a} + y' \cdot \vec{b}$ .

Khi đó  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại  $k$  thỏa  $x = kx', y = ky'$  hay  $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$  nếu  $x', y' \neq 0$ .

**Hệ quả 6.6.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đôi một không cùng phương.

(a) Khi đó tồn tại  $x, y, z$  không đồng thời bằng 0 và

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

(b) Nếu tồn tại  $x, y, z$  và  $x', y', z'$  khác 0 thỏa mãn

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = x' \cdot \vec{a} + y' \cdot \vec{b} + z' \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

thì

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

**Chứng minh.**

(a) Ta có  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương nên với  $\vec{c}$  thì tồn tại  $x, y$  thỏa  $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} \Rightarrow x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ , với  $z = -1$ .

(b) Từ đẳng thức ta có  $\vec{c} = \frac{-x}{z} \vec{a} - \frac{-y}{z} \vec{b} = \frac{-x'}{z'} \vec{a} - \frac{y'}{z'} \vec{b}$ .

Suy ra  $\frac{x}{z} = \frac{x'}{z'}$  và  $\frac{y}{z} = \frac{y'}{z'}$ , suy ra  $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ .

Từ đó ta có điều cần chứng minh.



## VÍ DỤ

**Ví dụ 6.11.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $D$  thỏa mãn  $\vec{AD} = \frac{3}{4} \vec{AC}$ ,  $I$  là trung điểm của  $BD$ .

(a) Biểu diễn  $\vec{AI}$  theo  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

(b) Biểu diễn  $\vec{AM}$  theo  $x$  và  $\vec{AB}, \vec{AC}$

**Ví dụ 6.12.** Cho tam giác  $ABC$  gọi  $M$  là điểm thỏa  $\vec{MA} + 3\vec{MB} = \vec{0}$ . Giả sử  $\vec{CM} = x \cdot \vec{CA} + y \cdot \vec{CB}$ . Tính  $x, y$ .

**Ví dụ 6.13.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ ,  $N$  thỏa  $\vec{NA} + 2\vec{NC} = \vec{0}$  và  $P$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $C$ .

a) Chứng minh  $\vec{AN} = \frac{2}{3} \vec{AC}$

b) Chứng minh  $\vec{NM} = \frac{1}{2} \vec{AB} - \frac{2}{3} \vec{AC}$ .

c) Chứng minh  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Ví dụ 6.14.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  thuộc cạnh  $AD, BC$  sao cho  $AM = 2MD, BN = 2NC$ . Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng  $AB, MN$  và  $CD$  thẳng hàng.

**Ví dụ 6.15.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ ,  $I$  là trung điểm của  $BD$ .  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Tính  $\overrightarrow{AI}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .
- Tính  $\overrightarrow{AM}$  theo  $x$  và  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$
- Tìm  $x$  để  $A, I, M$  thẳng hàng.

**Ví dụ 6.16.** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ , điểm  $O$  là điểm nằm ngoài đường thẳng  $AB$ . Nếu  $M$  thỏa  $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$ , trong đó  $x, y$  không đồng thời bằng 0, khi đó  $M$  thuộc đường thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $x + y = 1$ .

**Nhận xét:** Trong ví dụ trên, nếu thay  $z \cdot \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$  thì  $z = x + y$ .

**Ví dụ 6.17.** Cho tam giác  $ABC$ . Một đường thẳng qua trọng tâm  $G$  của tam giác cắt các cạnh  $AB, AC$  tại  $D$  và  $E$ . Chứng minh

$$\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = 3$$

**Ví dụ 6.18.** Cho một tam giác  $ABC$  với  $AB \perp BC$ . Đường cao  $BH$  cắt các phân giác  $AD$  và  $CE$  lần lượt tại  $Q$  và  $P$ . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của các đoạn thẳng  $QD$  và  $PE$  song song với  $AC$ .

**Ví dụ 6.19.** Cho tam giác  $ABC$ . Một đường tròn đi qua hai điểm  $B$  và  $C$  cắt lại các cạnh  $AB$  và  $AC$  lần lượt tại  $N$  và  $M$ . Xét các điểm  $P$  và  $Q$  lần lượt nằm trên các đoạn thẳng  $MN$  và  $BC$  sao cho các góc  $\angle BAC$  và  $\angle PAQ$  có cùng phân giác trong.

- Chứng minh rằng:

$$\frac{PM}{PN} = \frac{QB}{QC}$$

- Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng  $BM, CN$  và  $PQ$  thẳng hàng.



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 6.11.** Cho tam giác  $ABC$  có  $I$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $C$ ,  $J$  là trung điểm  $AC$ ,  $K$  thuộc  $AB$  thỏa  $AB = 3AK$ .

- Tính  $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BK}$  theo  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ .

(b) Tính  $\vec{IJ}, \vec{IK}$  theo  $\vec{BA}, \vec{BC}$ .

**Bài 6.12.** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, AC$ .  $L$  là điểm thoả mãn  $2\vec{LA} + 5\vec{LB} + 3\vec{LC} = \vec{0}$ .

(a) Tính  $\vec{BM}, \vec{BM}, \vec{BL}$  theo  $\vec{BA}, \vec{BC}$ .

(b) Tính  $\vec{MN}, \vec{ML}$  theo  $\vec{BA}, \vec{BC}$ .

**Bài 6.13.** Cho tam giác  $ABC$  và các điểm  $I, J$  thoả mãn  $2\vec{CI} + 3\vec{BI} = \vec{0}, 5\vec{JB} - 2\vec{JC} = \vec{0}$ .

a) Tính  $\vec{AI}, \vec{AJ}$  theo  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

b) Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tính  $\vec{AG}$  theo  $\vec{AI}, \vec{AJ}$ .

**Bài 6.14.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1$  theo thứ tự là chân các đường phân giác kẻ từ  $A, B, C$ .

(a) Tính  $\vec{AA_1}$  theo  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

(b) Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  là tam giác đều nếu  $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$ .

**Bài 6.15.** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi hệ thức:  $\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}, \vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MN \parallel AC$ .

**Bài 6.16.** Cho  $3\vec{OA} + 2\vec{OB} - 5\vec{OC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $A, B, C$  thẳng hàng.

**Bài 6.17.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$  và  $K$  là trung điểm  $AC$  sao  $AK = \frac{1}{3}AC$ .

(a) Biểu diễn các vectơ  $\vec{BI}, \vec{BK}$  theo  $\vec{BA}, \vec{BC}$ .

(b) Chứng minh các điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

**Bài 6.18.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $I, J$  là hai điểm xác định bởi  $\vec{IA} = 2\vec{IB}, 3\vec{JA} + 2\vec{JC} = \vec{0}$ .

(a) Tính  $\vec{IJ}, \vec{IG}$  theo  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

(b) Chứng minh  $I, J, G$  thẳng hàng.

**Bài 6.19.** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy các điểm  $M, N, P$  thoả mãn

$$\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}, 3\vec{AN} - 2\vec{AC} = \vec{0}, \vec{PB} = 2\vec{PC}.$$

Chứng minh  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Bài 6.20.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = 3MC$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $C$ .

(a) Tính  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

(b) Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$ ,  $J$  là điểm trên  $AN$  sao cho  $AJ = kAC$ . Xác định  $k$  để  $B, I, J$  thẳng hàng.

**Bài 6.21.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ ,  $I$  là trung điểm của  $DB$ .  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Tính  $\overrightarrow{AI}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

(b) Tính  $\overrightarrow{AM}$  theo  $x$  và  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

(c) Tìm  $x$  sao cho  $A, I, M$  thẳng hàng.

**Bài 6.22.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Đặt  $\overrightarrow{AC} = \vec{a}, \overrightarrow{BD} = \vec{b}$ .

(a) Tính  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$  theo  $\vec{a}, \vec{b}$ .

(b) Hai điểm  $M, N$  lần lượt trên hai đường thẳng  $AB, CD$ . Giả sử  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AD}$ . Tìm điều kiện của  $x, y$  để  $M, N, B$  thẳng hàng.

### §3. TÂM TỈ CỤ CỦA MỘT HỆ ĐIỂM



#### LÝ THUYẾT

**Tính chất 6.7.** Cho hai điểm  $A, B$  phân biệt và các số thực  $m, n$  có tổng khác 0. Khi đó tồn tại duy nhất điểm  $O$  sao cho

$$m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

**Chứng minh.** Ta có  $m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow m \cdot OA + n \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (m+n)\overrightarrow{AO} = n\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

Đẳng thức (1) cho ta xác định sự tồn tại điểm  $O$ .

Giả sử có  $O'$  cũng thỏa  $m \cdot \overrightarrow{O'A} + n \cdot \overrightarrow{O'B} = \vec{0}$ .

$$\text{Khi đó ta có } m \cdot \overrightarrow{O'A} + m \cdot \overrightarrow{O'B} = m \cdot \overrightarrow{O'A} + n \cdot \overrightarrow{O'B} \Rightarrow (m+n)\overrightarrow{OO'} = \vec{0} \Rightarrow O' \equiv O.$$

(2) Từ (1) và (2) ta có điểm  $O$  tồn tại và duy nhất.

**Tính chất 6.8.** Cho 3 điểm  $A, B, C$  và các số thực  $m, n, p$  không đồng thời bằng 0 và có tổng khác 0. Khi đó tồn tại duy nhất điểm  $O$  thỏa:

$$m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB} + p \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

**Chứng minh.** Làm tương tự như trên ta có  $\overrightarrow{AO} = \frac{n}{m+n+p} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{p}{m+n+p} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

**Tính chất 6.9.** Cho  $n$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  và  $n$  số thực  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  không đồng thời bằng 0 và có tổng khác 0.

(a) Chứng minh tồn tại duy nhất điểm  $O$  thỏa

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \overrightarrow{OA_i} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

Điểm  $O$  được gọi là **tâm tỉ cự** của hệ điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tương ứng với các hệ số  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

(b) Với điểm  $O$  được xác định như trên, khi đó mọi điểm  $M$  ta có  $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

**Chứng minh.** a) Ta có  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_i}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \cdot \overrightarrow{OA_1} + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_1A_i} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA_1} = -\frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_1A_i} (*)$$

Đẳng thức (\*) xác định duy nhất điểm  $O$  thỏa mãn.

b) Khi đó với điểm  $M$  thì  $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}$ , từ đó

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \overrightarrow{OA_i} = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MO}$$

Do đó  $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

**Tính chất 6.10.** Cho  $n$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  và  $n$  số thực  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  không đồng thời bằng 0 và có tổng bằng 0. Khi đó

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{OA_n}$$

không phụ thuộc vào điểm  $O$ .



## VÍ DỤ

**Bài 6.23.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $N, M$  thỏa:

(a)  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ .

(b)  $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ .

**Bài 6.24.** Cho tam giác  $ABC$ . Hãy tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện:

(a)  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

(b)  $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ .

**Bài 6.25.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $G_a, G_b, G_c, G_d$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $BCD, ACD, ABD, BCD$ . Chứng minh rằng  $AG_a, BG_b, CG_c, DG_d$  cùng đi qua một điểm.

**Bài 6.26. (Định lý Jacobi)** Cho tam giác  $ABC$ .  $M$  là điểm nằm trong tam giác  $ABC$ . Đặt  $S_a = S_{MBC}$ ,  $S_b = S_{MAC}$ ,  $S_c = S_{MAB}$ ,  $S = S_{ABC}$ . Chứng minh rằng

$$S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

**Bài 6.27.** Cho tam giác  $ABC$ .  $M$  là điểm nằm trong tam giác. Khi đó  $x, y, z$  thỏa mãn

$$\frac{x}{S_{MBC}} = \frac{y}{S_{MAC}} = \frac{z}{S_{MAB}}$$

khi và chỉ khi

$$x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MB} + z \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

**Bài 6.28.** Cho tam giác  $ABC$ . Đường tròn tâm  $I$  nội tiếp tam giác và tiếp xúc với các cạnh  $BC, AC, AB$  lần lượt là  $D, E, F$ . Đặt  $BC = a, AC = b, AB = c$ .

(a) Chứng minh rằng  $a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

(b) Chứng minh rằng  $a \cdot \overrightarrow{ID} + b \cdot \overrightarrow{IE} + c \cdot \overrightarrow{IF} = \vec{0}$ .

**Bài 6.29. (Định lý con nhím)** Cho đa giác lồi  $A_1A_2 \cdots A_n$  và các vectơ đơn vị  $\vec{e}_i (1 \leq i \leq n)$  theo thứ tự vuông góc với  $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$  (xem  $A_{n+1} \equiv A_1$ ), hướng ra phía ngoài đa giác. Chứng minh rằng

$$A_1A_2 \cdot \vec{e}_1 + A_2A_3 \cdot \vec{e}_2 + \dots + A_nA_1 \cdot \vec{e}_n = \vec{0} \text{ (định lí con nhím).}$$



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 6.30.** Cho tam giác  $ABC$ . Hãy tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa điều kiện sau:

(a)  $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{CA}| = \overrightarrow{BC}$ .

(b)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}|$ .

(c)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ .

(d)  $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$ .

e)  $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ .

**Bài 6.31.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định. Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn:

$$(a) |\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|.$$

$$(b) |2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|.$$

$$(c) |3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}|.$$

**Bài 6.32.** Cho tam giác  $ABC$  với  $BC = a$ ,  $AC = b$  và  $AB = c$ .  $AD$  là phân giác trong góc  $A$ . Khi đó ta có  $\overrightarrow{AD} = \frac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{DB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC}$

**Bài 6.33.** Cho  $M$  là điểm nằm trong tam giác  $ABC$  nhọn, khi đó ta có

$$(a) \text{ Khi } M \equiv O, \text{ ta có } \sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

$$(b) \text{ Khi } M \equiv H, \text{ ta có } \tan A \cdot \overrightarrow{HA} + \tan B \cdot \overrightarrow{HB} + \tan C \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$$

**Bài 6.34.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng điểm  $M$  nằm trong tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi tồn tại các số dương  $x, y, z$  thỏa  $x + y + z = 1$  và  $x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MB} + z \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ .

**Bài 6.35.** Cho tam giác  $ABC$  có đường tròn tâm  $I$  nội tiếp tam giác và tiếp xúc với  $BC, AC, AB$  lần lượt tại  $D, E$  và  $F$ . Chứng minh rằng

$$a \cdot \overrightarrow{ID} + b \cdot \overrightarrow{IE} + c \cdot \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{0}$$

**Bài 6.36.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I, H$  lần lượt là tâm nội tiếp và trực tâm của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  đều khi và chỉ khi

$$HA \cdot \overrightarrow{IA} + HB \cdot \overrightarrow{IB} + HC \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

**Bài 6.37.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $I_a$  là tâm đường tròn bàng tiếp góc  $A$ ,  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Chứng minh rằng

$$b \cdot \overrightarrow{I_a B} + c \cdot \overrightarrow{I_a C} - a \cdot \overrightarrow{I_a A} = \overrightarrow{0}$$

**Bài 6.38.** Cho tam giác  $ABC$  có đường tròn tâm  $I$  nội tiếp tam giác và tiếp xúc với các cạnh  $BC, AC$  và  $AB$  lần lượt tại  $D, E$  và  $F$ . Chứng minh rằng  $AD, BE$  và  $CF$  đồng quy tại điểm  $J$  và

$$(p-a)(p-c)\overrightarrow{JA} + (p-a)(p-b)\overrightarrow{JB} + (p-b)(p-a)\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}$$

Trong đó  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh  $BC, AC$  và  $AB$ ,  $p$  là nửa chu vi. Điểm  $J$  được gọi là điểm Gergonne của tam giác.

**Bài 6.39.** (Đường đối trung điểm điểm Lemoine) Đường thẳng đối xứng với đường trung tuyến qua đường phân giác xuất phát cùng đỉnh được gọi là đường đối trung của tam giác.

- (a) Trong một tam giác, 3 đường đối trung đồng qui tại một điểm L. Hơn nữa ta có hệ thức  $a^2 \cdot \overrightarrow{LA} + b^2 \cdot \overrightarrow{LB} + c^2 \cdot \overrightarrow{LC} = \vec{0}$
- (b) Trong một tam giác, điểm Lemoine là trọng tâm của của tam giác có các đỉnh là hình chiếu của điểm Lemoine trên các cạnh của tam giác đó.

**Bài 6.40.** Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý, gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hai điểm M, N di động thoả  $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ . Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 6.41.** Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ. Gọi  $G_a, G_b, G_c, G_m, G$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $MBC, MCA, MAB, G_a G_b G_c$ . Chứng minh  $MG_m$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 6.42.** Cho ngũ giác đều ABCDE. I là điểm thay đổi trên cạnh AB. Gọi M, N, P, Q là hình chiếu của I trên các đường thẳng chứa cạnh còn lại của ngũ giác. Gọi G là trọng tâm tứ giác MNPQ. Chứng minh rằng IG luôn đi qua một điểm cố định.

## §4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ



### LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 6.8.** (Góc của hai vectơ) Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Từ một điểm  $O$  ta dựng  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ . Khi đó  $\widehat{OAB}$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Kí hiệu  $(\vec{a}, \vec{b})$  hoặc  $(\vec{a}; \vec{b})$ .

Góc giữa vectơ  $\vec{0}$  với vectơ bất kì bằng  $0^\circ$ .

**Định nghĩa 6.9.** Nếu  $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$  ta nói hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  vuông góc nhau, kí hiệu  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

**Tính chất 6.11.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Đặt  $\alpha = (\vec{a}; \vec{b})$ . Khi đó  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ .

**Định nghĩa 6.10.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Khi đó tích vô hướng của hai vectơ kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  là một số được xác định bởi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$$

**Tính chất 6.12.** Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  tùy ý số thực  $k$ , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;
- $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$ ;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ;
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ ;
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ;
- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

**Tính chất 6.13.** (Công thức hình chiếu) Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Gọi  $\vec{a}'$  là hình chiếu của  $\vec{a}$  trên giá của vectơ  $\vec{b}$ . Khi đó

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}' \cdot \vec{b}$$



### VÍ DỤ

#### 1 DẠNG TÍNH TOÁN

**Nhận xét:** Cho hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$ . Nếu  $\vec{a} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$  và  $\vec{b} = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v}$ . Khi đó

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v})(x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v})$ .
- $\vec{a}^2 = (\vec{b} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v})^2$ . Suy ra  $|\vec{a}|$ .

$$\bullet \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**Ví dụ 6.20.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Tính giá trị các biểu thức sau theo  $a$ .

(a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

(b)  $\vec{AB}(2\vec{AB} - 3\vec{BC})$ .

**Ví dụ 6.21.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle BAC = 60^\circ, AB = 3, AC = 4$ .

(a) Tính  $BC$ .

(b) Lấy  $M$  thỏa  $\vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$ . Tính  $AM$ .

**Ví dụ 6.22.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 4, AC = 6$  và  $\angle BAD = 60^\circ$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm  $BC, CD$ .

(a) Tính  $AM, BN$ .

(b) Tính  $\vec{AM} \cdot \vec{BN}$ . Suy ra góc giữa hai vectơ  $\vec{AM}$  và  $\vec{BN}$ .

## 2 CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

**Ví dụ 6.23.** Cho hình vuông  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $AN \perp DM$ .

**Ví dụ 6.24.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Về phía ngoài tam giác dựng các tam giác  $ABD, ACE$  vuông cân tại  $A$ . Chứng minh rằng  $AM \perp DE$ .

**Ví dụ 6.25.** Cho tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(I)$ . Đường thẳng qua  $C$  vuông góc với  $BC$  cắt  $BI$  tại  $T$ ; đường thẳng qua  $C$  vuông góc với  $CD$  cắt  $DI$  tại  $S$ . Chứng minh rằng  $ST \perp AC$ .

## 3 CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

**Ví dụ 6.26.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng:

(a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2$ ;

(b)  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$ .

**Ví dụ 6.27.** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh rằng

$$\vec{DC} \cdot \vec{AB} + \vec{DA} \cdot \vec{BC} + \vec{DB} \cdot \vec{CA} = 0$$

Từ đó suy ra ba đường cao của tam giác đồng quy.

**Ví dụ 6.28.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ .

(a) Chứng minh  $AB^2 + 2AC^2 = 3AM^2 + MB^2 + 2MC^2$ .

(b) Chứng minh  $AM^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{2}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2$ .

**Ví dụ 6.29. (Định lý Stewart)** Cho tam giác  $ABC$  và  $D$  là một điểm thuộc cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng:

$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD = BC (AD^2 + BD \cdot CD)$$

**Ví dụ 6.30.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $I$  thỏa  $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$  ( $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ ). Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$  ta có:

$$\alpha MA^2 + \beta \cdot MB^2 + \gamma \cdot MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MI^2 + \alpha \cdot IA^2 + \beta \cdot IB^2 + \gamma \cdot IC^2$$

và

$$\alpha \cdot IA^2 + \beta \cdot IB^2 + \gamma \cdot IC^2 = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha\beta AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \alpha\gamma AC^2)$$

**Ví dụ 6.31.** Cho tam giác  $ABC$ , cạnh  $BC = a, CA = b, AB = c$ , điểm  $M$  bên trong tam giác. Đặt:

$$x = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}, y = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}}, z = \frac{S_{\Delta MBA}}{S_{\Delta ABC}}$$

Ta có  $x + y + z = 1$  và:

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

Chứng minh

$$OM^2 = x \cdot OA^2 + y \cdot OB^2 + z \cdot OC^2 - (xyc^2 + xzb^2 + yza^2)$$

**Ví dụ 6.32.** Cho tam giác  $ABC$  có  $I$  là tâm nội tiếp và  $O$  là tâm ngoại tiếp. Chứng minh rằng

(a)  $a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 = abc$ .

(b)  $IO^2 = 2Rr$

#### 4 CÁC BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

**Ví dụ 6.33.** Cho hai điểm  $A, B$  phân biệt và số thực  $k$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ .

**Ví dụ 6.34.** Cho vectơ  $\vec{u}$  và điểm  $A$  cố định,  $k$  là số thực cho trước. Tìm quỹ tích điểm  $M$  sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} = k$$

**Ví dụ 6.35.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Tìm điểm  $M$  sao cho

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = a^2$$

**Ví dụ 6.36.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ ,  $AB = a$ . Tìm điểm  $M$  thỏa

$$(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = a^2$$



#### BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 6.43.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 5, AC = 8, \angle A = 120^\circ$ .

- Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và độ dài  $BC$ .
- Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tính  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Bài 6.44.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3, AC = 6, \angle BAC = 60^\circ$ . Tính

- $BC$ .
- Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ .
- Tính  $AM$ .

**Bài 6.45.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Trên đường thẳng  $BC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BC}$ .

- Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN}$ .
- Tính  $\overrightarrow{AN}$ .

(c) Tính  $\vec{AC} \cdot \vec{AN}$ .

**Bài 6.46.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3, AC = 4, \angle BAC = 60^\circ$ . Điểm  $M$  thỏa  $\vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$ .

(a) Tính  $\vec{BM} \cdot \vec{BC}$ .

(b) Tính  $BC$ .

(c) Chứng minh  $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ . Tính độ dài  $AM$ .

**Bài 6.47.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A, AB = a$ .

a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}, \vec{AB} \cdot \vec{AB}$

b)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}, \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC})$

**Bài 6.48.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 4, AD = 6, \angle BAD = 60^\circ$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB$  và  $BC$ . Tính:

(a)  $\vec{CM} \cdot \vec{DN}$

(b) Độ dài các đoạn thẳng  $AC, BD$ .

(c) Góc giữa  $\vec{AC}$  và  $\vec{DB}$

(d) Độ dài  $MD, AN$  và  $\cos(\vec{DM}, \vec{AN})$

**Bài 6.49.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .

(a) Tính  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}, \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

(b) Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$ . Tính  $\vec{AM} \cdot \vec{AD}, \vec{AM} \cdot \vec{AN}$

(c) Chứng minh  $\vec{DM} \cdot \vec{AN} = 0$ . Suy ra  $DM \perp AN$ .

**Bài 6.50.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a, M, N$  là các điểm thuộc cạnh  $BC, CD$  sao cho  $MB = MC, ND = 2NC$ .

(a) Tính  $\vec{AM} \cdot \vec{AB}, \vec{AN} \cdot \vec{AD}$

(b) Tính  $\vec{AM} \cdot \vec{AN}$ . Suy ra góc  $\angle MAN$ .

(c) Tính  $\vec{DM} \cdot \vec{BN}$ , suy ra góc giữa hai đường thẳng  $DM$  và  $BN$ .

**Bài 6.51.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 7, AC = 5$  và  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ .

(a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

(b) Tính  $BC$ .

(c) Tính độ dài các trung tuyến  $AM, BN, CP$ .

**Bài 6.52.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = a, AC = 2a$ . Gọi  $D$  trung điểm cạnh  $AC$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ . Chứng minh  $BD$  vuông góc  $AM$ .

**Bài 6.53.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Trên 3 cạnh  $AB, BC, CA$  lần lượt lấy 3 điểm  $M, N, P$  sao cho  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AP} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$ .

(a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

(b) Tính  $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{AN}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

(c) Chứng minh  $MP$  vuông góc  $AN$ .

**Bài 6.54.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .

(a) Gọi  $M, N$  là trung điểm  $BC, CD$ . Chứng minh  $AM$  vuông góc  $BN$ .

(b) Gọi  $P, Q$  thuộc  $BC, CD$  sao cho  $BP = \frac{1}{4}BC, CD = \frac{1}{4}CD$ . Chứng minh  $AP$  vuông góc  $BQ$ .

**Bài 6.55.** Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trực tâm của các tam giác  $OAB$  và  $OCD$ ; gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh  $MN$  vuông góc  $HK$ .

**Bài 6.56.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Điểm  $O$  thỏa  $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ . Tính góc  $\angle AOC$ .

**Bài 6.57.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{BAC} = 60^\circ, AB = 4, AC = 6$ .

(a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  và độ dài  $BC$ .

(b) Lấy các điểm  $M, N$  xác định bởi  $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}; \overrightarrow{NB} + x\overrightarrow{NC} = \vec{0}, (x \neq -1)$ . Tìm  $x$  để  $AN$  vuông góc  $BM$ .

**Bài 6.58.** Cho tam giác đều cạnh  $3a$ . Lấy  $M, N, P$  lần lượt thuộc  $BC, CA, AB$  sao cho  $BA = a, CN = 2a, AP = x(0 < x < 3a)$ .

(a) Tính  $\overrightarrow{AM}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

(b) Chứng minh  $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB})$ .

(c) Định  $x$  để  $AM$  vuông góc  $NP$ .

**Bài 6.59.** Cho tam giác  $ABC$  có đường cao  $AH$ , trung tuyến  $AM$ . Chứng minh:

(a)  $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$

(b)  $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MH}$

(c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{BC^2}{4}$

(d)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ .

**Bài 6.60.** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh

(a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = MA^2 - MB^2$

(b)  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$

(c)  $MA^2 + MH^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$ .

**Bài 6.61.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  thoả mãn

(a)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$

(b)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 3a^2$

**Bài 6.62.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB = 3AD = 3a$ .

(a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

(b) Gọi  $M$  là một điểm tùy ý. Chứng minh  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ .

(c) Tìm tập hợp tất cả những điểm  $N$  sao cho  $(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC})(\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NA}) = (\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC})^2$

**Bài 6.63.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ ,  $AB = a$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  thoả mãn

(a)  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$

(b)  $MA^2 = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$

$$(c) 2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$$

$$(d) MA^2 - MB^2 + CA^2 + CB^2 = 0$$

$$(e) 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = 0$$

$$(f) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = MC^2 - MB^2 + BC^2.$$

**Bài 6.64.** Cho  $AB = a$ . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn:

$$(a) MA^2 + MB^2 = a^2$$

$$(b) 2MA^2 + MB^2 = a^2$$

$$(c) 2MA^2 - 3MB^2 = a^2$$

$$(d) MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

**Bài 6.65.** (Định lý Lagrange) Gọi G là tâm tỉ cự của hệ điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ứng với các hệ số  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Khi đó với điểm M bất kì ta có:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2$$

**Bài 6.66.** (Định lý Jacobi) Gọi G là tâm tỉ cự của hệ điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ứng với các hệ số  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Khi đó

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2 = \frac{1}{\alpha} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j A_i A_j^2$$

Trong đó  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$

**Bài 6.67.** (Định lý Lagrange - Jacobi) Gọi G là tâm tỉ cự của hệ điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ứng với các hệ số  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Khi đó với điểm M bất kì ta có:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j A_i A_j^2$$

**Bài 6.68.** Cho tam giác ABC có O, G, H, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh

$$(a) OI \geq OG \geq \frac{IH}{2}$$

$$(b) \quad OI \geq \frac{IG}{\sqrt{2}}$$

**Bài 6.69.** Bài toán 3 Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh:

$$(a) \quad R^2 \geq \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a)} [(p-a)a^2 + (p-b)b^2 + (p-c)c^2]$$

$$(b) \quad 4R^2 + Rr \geq \sqrt{a^2r_b r_c + b^2r_a r_c + c^2r_a r_b}$$

$$(c) \quad \frac{1}{2p} \geq \frac{\sqrt{r^2 + rR}}{R(r + 4R)}$$

trong đó  $r_a, r_b, r_c, r$  lần lượt là bán kính các đường tròn bàng tiếp và nội tiếp tam giác  $ABC$

## §5. BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG

# CHƯƠNG

## 7



## PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

---

---

### §1. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ



#### LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

**Định nghĩa 7.1.** Trục tọa độ (còn gọi là trục, hay trục số) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm  $O$  và một vectơ  $\vec{i}$  có độ dài bằng 1. Điểm  $O$  được gọi là **gốc tọa độ**, vectơ  $\vec{i}$  được gọi là vectơ đơn vị.

Kí hiệu  $(O; \vec{i})$  hoặc trục  $Ox$ .

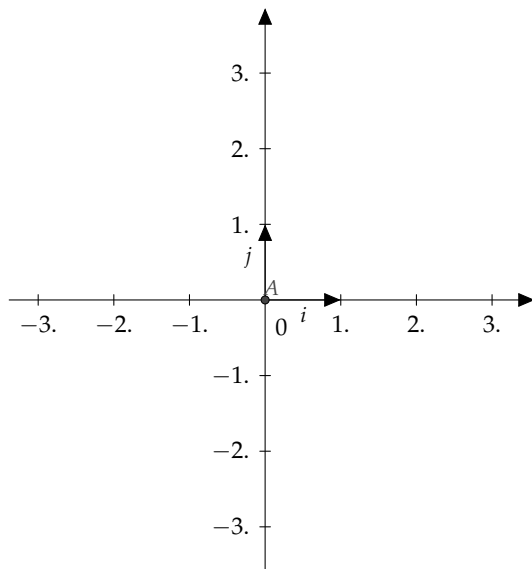
**Định nghĩa 7.2.** Cho vectơ  $\vec{u}$  nằm trên trục  $(O; \vec{i})$ , khi đó tồn tại duy nhất số  $a$  sao cho  $\vec{u} = a\vec{i}$ . Số  $a$  được gọi là tọa độ của vectơ  $\vec{u}$ .

**Định nghĩa 7.3.** Tọa độ điểm  $M$  là tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{OM}$ . Nếu  $M$  có tọa độ  $m$  ta kí hiệu  $M(m)$ .

**Tính chất 7.1.** Cho điểm  $A(a), B(b)$  thì  $\overrightarrow{AB} = (b - a)$ .

**Định nghĩa 7.4.** Nếu hai điểm  $A, B$  nằm trên trục  $Ox$  thì tọa độ của  $\overrightarrow{AB}$  là độ dài đại số của đoạn  $AB$ . Kí hiệu  $\overline{AB}$ .

**Định nghĩa 7.5.** Hệ trục tọa độ vuông góc là hệ gồm hai trục  $Ox, Oy$  vuông góc nhau tại  $O$ . Kí hiệu  $Oxy$  hoặc  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



$Ox$  được gọi là trục hoành,  $Oy$  được gọi là trục tung. Các định nghĩa và tính chất sau dựa vào các kiến thức vectơ đã được học ở chương 2.

**Định nghĩa 7.6.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vectơ  $\vec{a}$ . Khi đó tồn tại duy nhất cặp số  $(x, y)$  thỏa  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , cặp số  $(x, y)$  được gọi là tọa độ của  $\vec{a}$ . Kí hiệu  $\vec{a} = (x; y)$ .

**Định nghĩa 7.7.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tọa độ của vectơ  $\vec{OA}$  là tọa độ của điểm  $A$ . Kí hiệu  $A(x_A; y_A)$ .

**Tính chất 7.2.** Cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$ . Khi đó

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1$  và  $a_2 = b_2$ ;
- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$ ;
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$ ;
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$ ;
- $k\vec{a} + m\vec{b} = (ka_1 + mb_1; ka_2 + mb_2)$ .

**Chứng minh.** (a) Tính chất này dựa vào sự biểu diễn duy nhất của một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

(b) Ta có  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ , suy ra  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j}$ , suy ra  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$ .

(c) Tương tự thì  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$ .

(d)  $k\vec{a} = ka_1\vec{i} + ka_2\vec{j}$  nên  $k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$ .

(e) Kết hợp (2) và (4) ta có  $k\vec{a} + m\vec{b} = (ka_1 + mb_1; ka_2 + mb_2)$ .

**Tính chất 7.3.** Cho điểm  $A(x_A, y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$ . Khi đó  $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ ;

**Chứng minh.** Ta viết  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ .

**Tính chất 7.4.** Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ .

- $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại  $k$  sao cho  $a_1 = kb_1, a_2 = kb_2$ .
- Nếu  $b_1, b_2 \neq 0$  thì  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương khi và chỉ khi  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ .

**Chứng minh.** Theo định lý 2.1 ta có  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại  $k$  sao cho  $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ , từ đó ta có điều cần chứng minh.

Sau đây là biểu thức tọa độ của tích vô hướng, một công thức quan trọng.

**Tính chất 7.5.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ . Khi đó

(a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ ;

(b)  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ;

(c)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ ;

(d)  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ .

**Chứng minh.** (a) Ta có  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ , suy ra  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) = a_1b_1\vec{i}^2 + a_2b_2\vec{j}^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\vec{i} \cdot \vec{j} = a_1b_1 + a_2b_2$ .

(b) Theo trên ta có  $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2$ , suy ra  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ .

(c) Tự chứng minh

**Tính chất 7.6.** Nếu điểm  $A(x_A, y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$  thì

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



## BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

**Bài 7.1.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho  $\vec{a} = (1; -2)$ ,  $\vec{b} = (2; -4)$ ,  $\vec{c} = (-1; 3)$ .

- Chứng minh  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  cùng phương;  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  không cùng phương.
- Tính tọa độ của các vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{c}$  và  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ .
- Cho  $\vec{d} = (2; -2)$ . Giả sử  $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{c}$ . Tìm  $x, y$ .

**Bài 7.2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho 3 điểm  $A(0; 1)$ ,  $B(-2; 3)$  và  $C(2; 5)$ .

- Tìm tọa độ của các vectơ  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{AC}$ .
- Chứng minh 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.
- tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $BC$ .
- Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành.
- Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

**Bài 7.3.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho  $\vec{a} = (-1; 2)$ ,  $\vec{b} = (2; 4)$ .

- Tính  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ .
- Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và tính  $\cos$  góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- Cho  $\vec{c} = 4\vec{a} - \vec{b}$  và  $\vec{d} = m\vec{i} + (m-1)\vec{j}$ . Tìm  $m$  để  $\vec{c} \perp \vec{d}$ .

**Bài 7.4.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $A(0; 4)$ ,  $B(-1; -1)$  và  $C(5; -1)$ .

- Tính độ dài các đoạn thẳng  $AB, AC$ .
- Tính  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  và tính  $\cos(\vec{AB}, \vec{AC})$ .
- Tìm tọa độ điểm  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

**Bài 7.5.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 3)$ ,  $B(3; -1)$ ,  $C(5; 5)$ .

- Chứng minh tam giác  $ABC$  cân.
- Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ  $C$  lên  $AB$  của tam giác  $ABC$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .
- Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Bài 7.6.** Cho điểm  $A(2;4)$  và  $B(8;2)$ .

- (a) Tìm tọa độ điểm  $C \in Ox$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .
- (b) Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $Oy$  sao cho  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$
- (c) Tìm điểm  $M$  thuộc trục tung sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$  là nhỏ nhất.



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 7.7.** Cho 3 điểm  $A(3;2), B(-1;2), C(4;-1)$ .

- (a) Chứng minh  $A, B, C$  không thẳng hàng. Tìm tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$ .
- (b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho  $ABDC$  là hình bình hành.
- (c) Tìm tọa độ điểm  $K$  sao cho  $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD}$ .

**Bài 7.8.** Trong mặt phẳng tọa độ cho các vectơ sau:  $\vec{a}(1; -2), \vec{b}(2; 3), \vec{c}(-2; 1)$ .

- (a) Tìm tọa độ của các vectơ  $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}, \vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ .
- (b) Chứng minh hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương và biểu diễn vectơ  $\vec{c}$  theo hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$

**Bài 7.9.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;0), B(-4;2), C(3;-7)$ .

- (a) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$ .
- (b) Tìm tọa độ điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

**Bài 7.10.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(0;1), B(-2;2), C(1;5)$ .

- (a) Tìm tọa độ  $M$  thuộc trục hoành sao cho  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 10$ .
- (b) Tìm tọa độ điểm  $N$  thuộc đường thẳng  $x = 2$  sao cho  $|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC}|$  nhỏ nhất.

**Bài 7.11.** (HK1-LHP 2015) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(-4;1), B(0;8), C(4;1)$ . Tìm tọa độ trực tâm  $H$  và chân đường phân giác trong  $D$  của góc  $A$  của tam giác  $ABC$ .

**Bài 7.12.** (HK1-TDN 2105)

- (a) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(-2;-4), B(3;-4), C(-2;6)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn bàng tiếp góc  $A$  của tam giác  $ABC$ .

(b) Cho tam giác  $ABC$  có diện tích bằng  $S$ . Chứng minh rằng

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

**Bài 7.13.** (HK1 - LHP 2017)

(a) Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;2), B(3;5), C(4;7)$ . Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

(b) Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 7, AC = 8, BC = 13$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overleftarrow{AC}$ .

(c) Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3$  và  $\angle BAC = 120^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ , diện tích tam giác  $ABC$ , bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài đường phân giác trong  $AD$  của tam giác  $ABC$ .

**Bài 7.14.** (HK1-THTH 2018) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; -1), B(-1;3), C(6;4), I\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

(a) Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

(b) Tính  $\cos \widehat{BCA}$ .

(c) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABI$ .

**Bài 7.15.** (HK1 - TĐN 2018) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;1); B(3;1), C(2;4)$ .

(a) Tìm tọa độ chân đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$ .

(b) Tìm điểm  $N$  trên trục  $Oy$  sao cho tam giác  $NBC$  là tam giác cân tại  $N$ .

## §2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



### LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 7.8.** Vectơ  $\vec{n} \neq \vec{0}$  có giá vuông góc với đường thẳng  $\Delta$  gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng  $\Delta$ .

**Tính chất 7.7.** Ta có các tính chất sau:

- (a) Các vectơ pháp tuyến của cùng một đường thẳng thì cùng phương.
- (b) Hai đường thẳng song song thì vectơ pháp tuyến cùng phương.
- (c) Hai đường thẳng vuông góc thì vectơ pháp tuyến vuông góc.

**Định lý 7.1.** Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm  $I(x_0; y_0)$ , vectơ  $\vec{n}$ . Đường thẳng qua  $I$  nhận  $\vec{n} = (a; b)$  là vectơ pháp tuyến có phương trình:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

**Định lý 7.2.** Trong mặt phẳng tọa độ, mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng

$$ax + by + c = 0$$

với  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

Trong đó  $\vec{n} = (a; b)$  là vectơ pháp tuyến của đường thẳng.

**Định lý 7.3.** (Phương trình đoạn chắn) Phương trình đường thẳng qua điểm  $A(a; 0)$  và  $B(0; b)$  ( $a, b \neq 0$ ) là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

**Định nghĩa 7.9.** Xét đường thẳng  $\Delta : y = kx + m$  cắt  $Ox$  tại  $M$ . Tia  $Mt$  phía trên trục hoành. Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi tia  $Mt$  và tia  $Ox$ . Khi đó  $\tan \alpha$  được gọi là hệ số góc của  $\Delta$  và  $k = \tan \alpha$ .

**Tính chất 7.8.** Cho hai đường thẳng  $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0; \Delta : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Khi đó

- $\Delta_1, \Delta_2$  cắt nhau  $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ; Khi đó tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

**Định nghĩa 7.10.** Vectơ  $\vec{u} \neq \vec{0}$  có giá song song hoặc trùng với  $\Delta$  gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$ .

**Tính chất 7.9.** Vectơ chỉ phương có các tính chất sau:

- Các vectơ chỉ phương của một đường thẳng thì cùng phương với nhau và vuông góc với vectơ pháp tuyến.
- Hai đường thẳng song song thì vectơ chỉ phương của đường này là vectơ chỉ phương của đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng vuông góc thì vectơ chỉ phương của đường thẳng này là vectơ pháp tuyến của đường thẳng kia.

**Định lý 7.4.** Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm  $I(x_0; y_0)$ , vectơ  $\vec{u}$ . Đường thẳng qua  $I$  nhận  $\vec{u} = (a; b)$  là vectơ chỉ phương có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

**Tính chất 7.10.** Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$  có dạng

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

(Trong trường hợp trên ta cần có  $x_B \neq x_A, y_B \neq y_A$ ).



## BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

**Bài 7.16.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 1), B(2, -1), C(0, 4)$ .

- Viết phương trình đường cao  $AH$ .
- Viết phương trình đường trung trực của  $BC$ .
- Viết phương trình đường thẳng  $AB$ .

**Ví dụ 7.1.** Cho đường thẳng  $a : 2x - 3y + 1 = 0$  và điểm  $A(1; 2)$ .

- Viết phương trình đường thẳng qua  $A$  song song với  $a$ .
- Viết phương trình đường thẳng  $b$  qua  $A$  vuông góc với  $a$ . Tìm tọa độ giao điểm của  $a$  và  $b$ .

**Ví dụ 7.2.** Cho tam giác  $ABC$  có 3 đỉnh là  $A(1; 2), B(-1; 4), C(-2; 0)$ .

- Viết phương trình tham số của đường thẳng  $AB$ .
- Viết phương trình tham số của đường thẳng qua  $A$  song song với  $BC$ .
- Tìm điểm  $D$  thuộc  $BC$  sao cho  $AD$  vuông góc với  $BC$ .

**Ví dụ 7.3.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(0; 3)$ . Xác định tọa độ  $B, C$  biết:

- Phương trình hai đường trung tuyến từ  $B, C$  là  $4x - 9y - 1 = 0$  và  $x + 3y - 2 = 0$ .
- Có hai đường cao từ  $B$  và  $C$  là  $x - y + 1 = 0$  và  $2x + y - 3 = 0$ .

**Ví dụ 7.4.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 2)$ , đường cao  $CD : x + 2y + 2 = 0$  và trung tuyến  $BM : x - 3y - 3 = 0$ .

- Viết phương trình đường thẳng  $AB$ . Tìm tọa độ điểm  $B$ .
- Tìm tọa độ điểm  $C$ .

**Ví dụ 7.5.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  không phải vuông cân, trên cạnh  $AB$  và  $AC$  lấy  $M, N$  sao cho  $BM = CN$ . Chứng minh rằng đường trung trực của  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Ví dụ 7.6.** Cho góc  $Oxy$  vuông tại  $O$ .  $M$  là điểm bên trong góc sao cho khoảng cách từ  $M$  đến  $Ox, Oy$  lần lượt là 3 và 4. Tìm điểm  $A$  trên  $Ox, B$  trên  $Oy$  sao cho  $AB$  qua  $M$  và  $OA + OB$  là nhỏ nhất.



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 7.17.** Cho tam giác  $ABC$  có phương trình 3 cạnh lần lượt là  $(AB) : x + 4y - 7 = 0$ ,  $(AC) : x + y - 3 = 0$ ,  $(BC) : 3x + 8y + 1 = 0$ .

- (a) Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.
- (b) Tìm tọa độ điểm đối xứng của  $A$  qua  $BC$ .

**Bài 7.18.** Cho đường thẳng  $d_1 : 2x + 3y - 5 = 0$  và điểm  $A(4;5)$ . Tìm tọa độ điểm  $B \in d_1$  sao cho  $AB = 5$ .

**Bài 7.19.** Cho đường thẳng  $(d) : 3x - 2y + 3 = 0$  và điểm  $A(2,3)$ .

- (a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng qua  $A$  song song với  $d$ .
- (b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng qua  $A$  vuông góc với  $d$ .

**Bài 7.20.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2)$ ,  $B(-3;4)$  và  $C(2;0)$ .

- (a) Viết phương trình đường trung tuyến  $AM$ .
- (b) Viết phương trình đường cao  $BK$ .
- (c) Viết phương trình đường trung trực của  $AB$ .

**Bài 7.21.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(0;1)$ ,  $B(-2;3)$  và  $C(2;0)$ .

- (a) Viết phương trình đường cao  $AD, BE$  và tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .
- (b) Viết phương trình trung trực của cạnh  $AB, AC$  và tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $ABC$ .
- (c) Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  và chứng minh  $H, I, G$  thẳng hàng.

**Bài 7.22.** Cho đường thẳng  $d : x + 2y - 3 = 0$  và điểm  $A(0,1)$ .

- (a) Viết phương trình tham số của  $d$ .
- (b) Tìm điểm  $M$  thuộc  $d$  sao cho  $AM = 1$ .

**Bài 7.23.** Cho hai điểm  $A(1;3)$  và  $B(3;7)$ .

- (a) Viết phương trình tham số của đường thẳng  $d$  là trung trực đoạn thẳng  $AB$ .

(b) Tìm trên  $d$  điểm  $M$  sao cho tam giác  $AMB$  vuông cân.

**Bài 7.24.** Cho đường thẳng  $d : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$  và điểm  $M(-2, 1)$ . Tìm điểm  $M$

trên  $d$  sao cho  $OM$  nhỏ nhất trong đó là  $O$  là gốc tọa độ.

**Bài 7.25.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2; 4), B(0, 2), C(8, 6)$ .

(a) Viết phương trình tham số các đường trung tuyến  $BM$  và  $CN$ .

(b) Cho điểm  $K(t; 2t - 1)$ . Tìm  $t$  sao cho trung điểm của  $BK$  thuộc đường thẳng  $CN$ .

**Bài 7.26.** Cho điểm  $A(1; 2)$  và đường thẳng  $d : 3x - 4y - 1 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $A'$  đối xứng của  $A$  qua  $d$ .

**Bài 7.27.** Cho điểm  $A(1; 1), B(7; 1)$  và đường thẳng  $d : x - 4y - 6 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $d$  sao cho:

(a)  $|MA - MB|$  lớn nhất.

(b)  $MA + MB$  nhỏ nhất.

**Bài 7.28.** (Môn Toán Khối B 2013): Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hình thang cân  $ABCD$  có hai đường chéo vuông góc với nhau và  $AD = 3BC$ . Đường thẳng  $BD$  có phương trình  $x + 2y - 6 = 0$  và tam giác  $ABD$  có trục tâm là  $H(-3; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $C$  và  $D$ .

**Bài 7.29.** Trong mặt phẳng tọa độ cho hai đường thẳng  $d_1 : x - y = 0, d_2 : 2x + y - 1 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông  $ABCD$  biết đỉnh  $A \in d_1, C \in d_2$  và  $B, D \in Ox$ .

**Bài 7.30.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  gọi  $E, F$  lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh  $B$  và  $C$  của tam giác  $ABC$ . Tìm tọa độ đỉnh  $A$  biết rằng  $E(7; 1), F\left(\frac{11}{5}; \frac{13}{5}\right)$ , phương trình đường thẳng  $BC : x + 3y - 4 = 0$  và điểm  $B$  có tung độ dương.

## §3. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH



### LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 7.11.** Cho hai đường thẳng  $a, b$  cắt nhau tạo thành 4 góc, khi đó góc nhỏ nhất trong 4 góc được gọi là góc của hai đường thẳng  $a$  và  $b$ .

Nếu hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì ta quy ước góc giữa chúng bằng  $0^\circ$ . Kí hiệu  $\widehat{(a, b)}$  hoặc  $(a, b)$ . Ta có  $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$ .

**Tính chất 7.11.** Nếu  $\vec{u}, \vec{v}$  lần lượt là vectơ chỉ phương (hoặc vectơ pháp tuyến) của hai đường thẳng  $a, b$ . Đặt  $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$ . Khi đó

- $(a, b) = \alpha$  nếu  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ .
- $(a, b) = 180^\circ - \alpha$  nếu  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ .
- $\cos(a, b) = |\cos \alpha|$

**Định lí 7.5.** Cho đường thẳng  $\Delta : ax + by + c = 0$  và điểm  $A(x_0; y_0)$ . Khi đó khoảng cách từ  $A$  đến  $\Delta$  là:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Tính chất 7.12.** (Phương trình đường phân giác). Cho hai đường thẳng cắt nhau

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1, d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Khi đó phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi  $d_1$  và  $d_2$  là:

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

**Tính chất 7.13.** Cho đường thẳng  $\Delta : ax + by + c = 0$  và hai điểm  $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$ . Khi đó

- $M, N$  nằm cùng phía đối với  $\Delta$  khi và chỉ khi  $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$
- $M, N$  nằm khác phía đối với  $\Delta$  khi và chỉ khi  $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$



## BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

**Ví dụ 7.7.** Cho đường thẳng  $d : 3x + 4y - 1 = 0$  và điểm  $A(-1;2)$  và  $B(0;-2)$ .

- Tính khoảng cách từ  $A$  và  $B$  đến  $d$ .
- Viết phương trình đường thẳng  $AB$  và tính khoảng cách từ  $O(0;0)$  đến  $AB$ .

**Ví dụ 7.8.** Cho hai đường thẳng  $a : 2x - y = 1$  và  $b : 2x - y - 4 = 0$ . Chứng minh  $a \parallel b$  và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$ .

**Ví dụ 7.9.** Cho đường thẳng  $a : 5x + 12y - 13 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng song song với  $a$  và cách  $a$  một khoảng cách bằng 13.

**Ví dụ 7.10.** Cho hai đường thẳng  $a : 3x + 4y - 7 = 0, 5x + 12y - 17 = 0$ . Chứng minh  $a$  và  $b$  cắt nhau và viết phương trình phân giác tạo bởi hai đường thẳng  $a$  và  $b$ .

**Ví dụ 7.11.** Cho hai đường thẳng  $a : x + y - 1 = 0, b : 3x + 4y - 2 = 0$ .

- Tính góc tạo bởi  $a$  và  $b$  với trục hoành.
- Tính  $\cos$  góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$ .



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 7.31.** Cho hai đường thẳng  $d_1 : 2x + 3y - 1$  và  $d_2 : -3x + y = 0$  và điểm  $A(1;2)$ .

- Tính khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến  $d_1$  và  $d_2$ .
- Tính góc giữa hai đường thẳng  $d_1, d_2$ .

**Bài 7.32.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;1), B(0,3), C(2;-1)$ .

- Viết phương trình đường thẳng  $BC$ .
- Tính độ dài đường cao hạ từ  $A$  và diện tích tam giác  $ABC$ .

**Bài 7.33.** Cho đường thẳng  $d_1 : 3x + 4y - 5 = 0$ .

- Tìm điểm  $A$  thuộc  $Ox$  sao cho khoảng cách từ  $A$  đến  $d_1$  bằng 2.
- Tìm điểm  $B$  thuộc  $Oy$  sao cho khoảng cách từ  $B$  đến  $d_1$  bằng 3.
- Viết phương trình đường thẳng song song với  $d_1$  và cách  $d_1$  một khoảng bằng 1.

**Bài 7.34.** Cho đường thẳng  $d : x - y - 1 = 0$ .

(a) Viết phương trình đường thẳng qua  $O$  và tạo với  $d$  một góc  $45^\circ$ .

(b) Cho hai điểm  $A(1;0)$  và  $B(-2;1)$ . Xét vị trí tương đối của  $A$  và  $B$  đối với  $d$ .

**Bài 7.35.** Cho điểm  $A(-1;2)$  và  $B(4;1)$ . Viết phương trình đường thẳng  $d$  qua  $A$  sao cho khoảng cách từ  $B$  đến  $d$  bằng  $\sqrt{13}$ .

**Bài 7.36.** Cho mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hình chữ nhật  $ABCD$  có diện tích bằng 48, đỉnh  $D(-3;2)$ . Đường phân giác của góc  $\widehat{BAD}$  có phương trình  $\Delta : x + y - 7 = 0$ . Tìm tọa độ đỉnh  $B$  biết đỉnh  $A$  có hoành độ dương.

Đáp số:  $A(5;2), B(5;8)$ .

**Bài 7.37.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 2AD$  đường  $AB : x - y + 1 = 0$ . Gọi  $N$  là điểm trên cạnh  $CD$  sao cho  $NC = 3ND$  điểm  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  là trung điểm cạnh  $BC$ , khoảng cách từ điểm  $B$  đến đường thẳng  $AN$  bằng 4. Tìm tọa độ  $A$ , biết  $x_A > 0$ .

Đáp số:  $A\left(\frac{\sqrt{166}}{4}; \frac{\sqrt{166}}{4} + 1\right)$

**Bài 7.38.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $A(0;2)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  lên  $AC$ . Trên tia đối của  $BH$ , lấy điểm  $E$  sao cho  $BE = AC$ . Biết phương trình đường thẳng  $DE : x - y = 0$ . Tìm  $B, C, D$ , biết  $S_{ABCD} = 6$  và  $y_B > 0$ .

Đáp số:  $B(0;5), C(2;5), D(2;2)$  hoặc  $B(3;2), C(0;3), D(2;2)$ .

**Bài 7.39.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hình thang cân  $ABCD$  có hai đáy  $AB, CD$ . Biết hai đường chéo  $AC, BD$  vuông góc với nhau. Biết  $A(0;3), B(3;4)$  và  $C$  nằm trên trục hoành. Xác định tọa độ đỉnh  $D$  của hình thang  $ABCD$ . Đáp số:  $D(0;-2)$ .

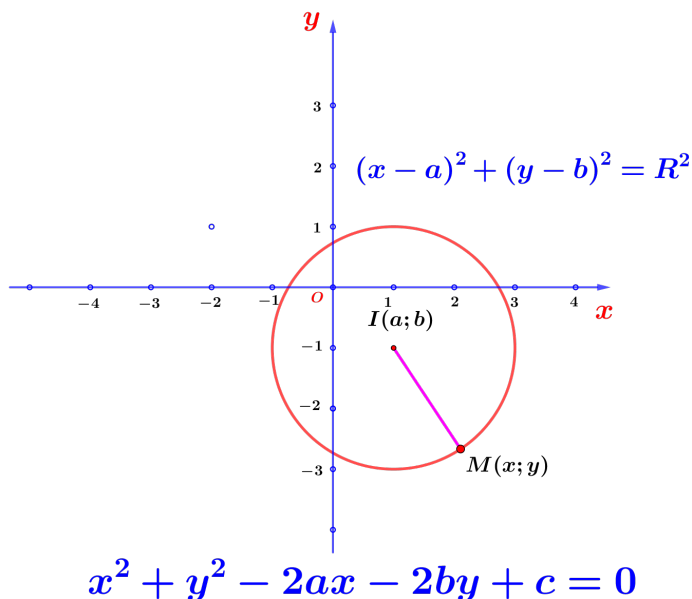
## §4. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN



### LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

**Định lí 7.6.** Đường tròn tâm  $I(a, b)$  có bán kính  $R$  có phương trình

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$



**Định lí 7.7.** Phương trình dạng  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$  là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi  $a^2 + b^2 > c$ . Khi đó tâm  $I(-a; -b)$  và bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

**Ví dụ 7.12.** Cho điểm  $I(1; 2)$  và  $A(-1; 4)$ .

- Viết phương trình đường tròn tâm  $I$  bán kính  $R = 3$ .
- Viết phương trình đường tròn tâm  $I$  bán kính  $IA$ .
- Xét vị trí tương đối của  $B(3; 1)$  với đường tròn tâm  $I$  bán kính  $IA$ .

**Ví dụ 7.13.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x + y^2 - 4my + 5m^2 = 0$ . (\*)

- Khi  $m = 0$ , (\*) có phải là phương trình đường tròn không? Tìm tọa độ tâm và tính bán kính.
- Tìm tất cả  $m$  để (\*) là phương trình của một đường tròn.

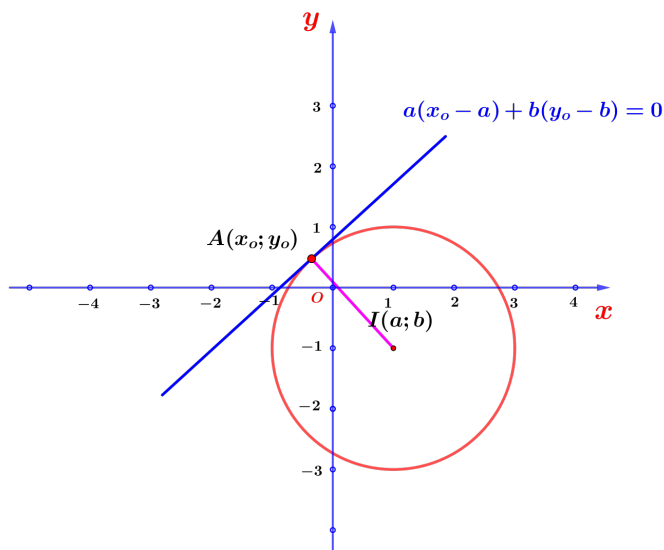
(c) Khi (\*) là phương trình đường tròn, chứng minh tâm  $I$  luôn thuộc một đường thẳng cố định.



## PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

**Định lí 7.8.** Cho đường tròn tâm  $I(a, b)$  bán kính  $R$ . Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm  $A(x_0, y_0)$  là:

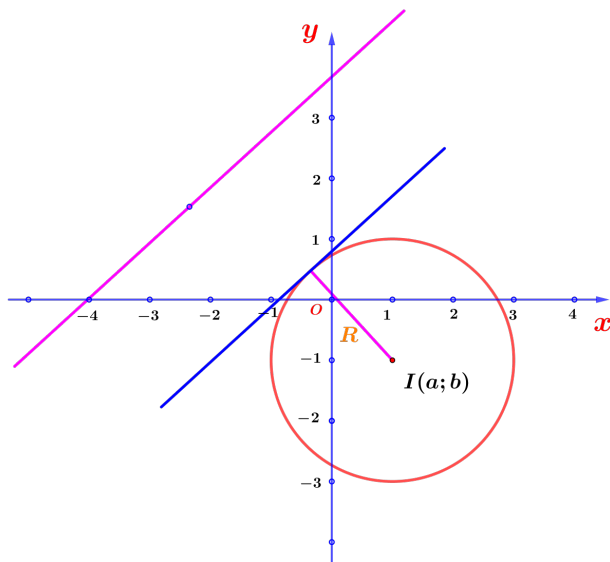
$$a(x_0 - a) + b(y_0 - b) = 0$$



**Ví dụ 7.14.** Cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ .

- Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của  $(C)$ .
- Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $A(2; 0)$ .

**Nhận xét:** Tiếp tuyến của đường tròn tâm  $I$  bán kính  $R$  là đường thẳng cách  $I$  một khoảng cách bằng  $R$ . Ta sử dụng tính chất này để viết phương trình tiếp tuyến trong một số trường hợp khác.



**Ví dụ 7.15.** Cho đường tròn  $(C) : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

- Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  biết tiếp tuyến song song với đường thẳng  $4x + 3y = 0$ .
- Viết phương trình tiếp tuyến  $(C)$  biết tiếp tuyến vuông góc với  $3x + 4y + 1 = 0$ .

**Ví dụ 7.16.** Cho hai đường tròn  $(C_1) : (x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$ ,  $(C_2) : (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 5$  và điểm  $A(4,1)$ .

- Chứng tỏ  $A$  là điểm chung của hai đường tròn.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua  $A$  và cắt hai đường tròn theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

**Ví dụ 7.17.** Cho hai đường tròn  $(C) : (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ ,  $(C') : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 16$ .

- Chứng minh 2 đường tròn ngoài nhau.
- Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

**Ví dụ 7.18.** Cho đường tròn  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  và điểm  $M(1,-1)$ .

- Viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua  $M$  và cắt đường tròn tại hai điểm  $A$ ,  $B$  sao cho  $M$  là trung điểm  $AB$ .

- (b) Viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua  $M$  và cắt đường tròn tại hai điểm  $A, B$  sao cho diện tích tam giác  $IAB$  lớn nhất với  $I$  là tâm đường tròn.



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 7.40.** Trong mặt phẳng Oxy cho  $A(3; 4), B(2; -1)$ . Viết phương trình đường tròn trong các trường hợp sau:

- (a) Tâm  $A$  bán kính  $R = 4$ .
- (b) Tâm  $B$  bán kính  $R = 5$ .
- (c) Tâm  $O(0; 0)$  bán kính  $OA$ .
- (d) Đường tròn đường kính  $AB$ .

**Bài 7.41.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 0), B(2; 2), C(2; -6)$ . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Bài 7.42.** Cho đường thẳng  $d : 4x - 3y - 1 = 0$  và điểm  $A(2; 1)$ .

- (a) Viết phương trình đường tròn tâm  $A$  và tiếp xúc với  $d$ .
- (b) Cho  $d$  cắt  $Ox$  tại  $B$ . Viết phương trình đường tròn tâm  $B$  tiếp xúc với  $Oy$ .

**Bài 7.43.** Cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ .

- (a) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính đường tròn.
- (b) Chứng minh  $A(4; -2)$  thuộc  $(C)$  và viết phương trình tiếp tuyến tại  $A$  của  $(C)$ .

**Bài 7.44.** Cho đường tròn  $(C) : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$ . Viết phương trình tiếp của  $(C)$  biết tiếp tuyến.

- (a) Song song với đường thẳng  $2x + y - 1 = 0$ .
- (b) Vuông góc với đường thẳng  $4x - y + 1 = 0$ .

**Bài 7.45.** Cho đường tròn  $(C) : (x - \frac{5}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{49}{4}$  và đường thẳng  $d : 2x + y + 2 = 0$ .

- (a) Tìm tọa độ giao điểm  $A, B$  của  $d$  và  $(C)$ .

- (b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại A và B. Tìm tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến.

**Bài 7.46.** Lập phương trình đường tròn trong các trường hợp sau:

- (a) Tâm I(-1,2) và tiếp xúc với đường thẳng  $d : x - 2y - 2 = 0$ .
- (b) Tâm thuộc đường thẳng  $x + y - 3 = 0$ , bán kính bằng 1 và tiếp xúc Ox.
- (c) Đi qua hai điểm  $A(0, 1), B(2, -3)$  và bán kính  $R = 5$ .
- (d) Đi qua hai điểm  $A(1, 2), B(3, 4)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $d : 3x + y - 3 = 0$ .
- (e) Đi qua gốc tọa độ, có bán kính  $R = \sqrt{5}$  và có tâm nằm trên đường thẳng  $x + y - 1 = 0$ .
- (f) Có bán kính  $R = \sqrt{5}$ , đi qua gốc tọa độ và tiếp xúc đường thẳng  $2x - y + 5 = 0$
- (g) Tiếp xúc với  $d_1 : x - 3y - 2 = 0, d_2 : x - 3y + 18 = 0$  và đi qua điểm  $A(4, -2)$ .
- (h) Tiếp xúc với  $d_1 : 2x + y - 1 = 0, d_2 : 2x - y + 2 = 0$  và có tâm thuộc đường thẳng  $d_3 : x - y - 1 = 0$ .
- (i) Tiếp xúc với  $d : x - y - 2 = 0$  tại  $M(1, -1)$  và có bán kính bằng 3.
- (j) Ngoại tiếp tam giác ABC biết  $A(-2, 4), B(6, -2), C(5, 5)$ .

**Bài 7.47.** Cho đường tròn (C) :  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$  và đường thẳng  $d : x - 4y + 1 = 0$ . Tìm điểm P nằm trên đường thẳng  $d$  sao cho có thể vẽ được hai tiếp tuyến PA, PB đến đường tròn mà:

- (a) Tam giác PAB đều.
- (b) Tam giác PAB vuông tại P.

**Bài 7.48.** Cho đường tròn  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$  và đường thẳng  $d : 3x - 4y + m = 0$ . Tìm  $m$  để trên  $d$  có duy nhất một điểm P mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB đến đường tròn sao cho tam giác PAB đều.

**Bài 7.49.** Cho đường tròn (C) :  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$  và điểm M(3,1). Gọi  $T_1, T_2$  lần lượt là các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng  $T_1T_2$ .

**Bài 7.50.** Cho đường tròn (C) có phương trình  $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$  và  $P(m, 0)$  là một điểm thay đổi trên trục hoành.

- (a) Tìm  $m$  để từ P kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn.
- (b) Với điều kiện của câu a, giả sử hai tiếp tuyến là PA, PB. Chứng minh AB luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển trên trục hoành, tìm tọa độ điểm cố định đó.

**Bài 7.51.** Cho đường tròn có phương trình  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$  và đường thẳng  $d : y = k(x + 4) + 3$ .

- (a) Chứng minh  $d$  luôn đi qua một điểm cố định.
- (b) Tìm  $k$  để  $d$  cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
- (c) Khi đường thẳng  $d$  cắt đường tròn tại A, B. Chứng minh trung điểm I của AB luôn thuộc một đường thẳng cố định, viết phương trình đường thẳng đó.

**Bài 7.52.** Cho đường tròn (C) :  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$  và đường thẳng  $d : x + y + 2 = 0$ . Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc  $d$ . Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C). Tìm tọa độ điểm M biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10.

**Bài 7.53.** Cho đường tròn (C) :  $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$  và đường thẳng  $d : x + my - 2m + 3 = 0$ . Gọi I là tâm đường tròn. Tìm  $m$  để  $d$  cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

**Bài 7.54.** Tìm tọa độ điểm M thuộc đường tròn  $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$  sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Biết:

- (a) A(-5,1)
- (b) A(-1,5)

**Bài 7.55.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(2;2)$  và cắt đường tròn (C) :  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$  tại hai điểm phân biệt A, B sao cho  $MA = 3MB$ .

**Bài 7.56.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(1; -3)$  và cắt đường tròn (C) :  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$  với tâm I tại A, B sao cho  $S_{\Delta IAB} = 8$  và cạnh AB là cạnh dài nhất của tam giác IAB?

**Bài 7.57.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$  với tâm là  $I$  và đường thẳng  $d : x + my - 2m + 3 = 0$ . Tìm  $m$  để đường thẳng  $d$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $S_{\Delta IAB}$  đạt giá trị lớn nhất?

**Bài 7.58.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 10 = 0$  có tâm  $I$ . Tìm  $m$  để đường thẳng  $d : x + y + 1 = 0$  cắt  $(C)$  tại  $A, B$  sao cho  $\Delta IAB$  đều?

## §5. CÁC ĐƯỜNG CONIC



### ĐƯỜNG ELIP

**Định nghĩa 7.12.** Cho hai điểm cố định  $F_1, F_2$  với  $F_1F_2 = 2c$  ( $c > 0$ ) và số  $2a$  ( $a > c$ ). Ellipse ( $E$ ) là tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $MF_1 + MF_2 = 2a$

$$(E) = \{M: MF_1 + MF_2 = 2a\}$$

- $F_1, F_2$  gọi là các *tiêu điểm*, khoảng cách  $F_1F_2 = 2c$  gọi là *tiêu cự* của ( $E$ ).
- Trung điểm  $I$  của  $F_1F_2$  là tâm của elip;
- Với điểm  $M$  thuộc elip thì các khoảng cách  $MF_1, MF_2$  được gọi là các bán kính qua tiêu của điểm  $M$ .

**Định lí 7.9 (Phương trình chính tắc).**

Nếu chọn hệ trục có  $Oxy$  sao cho  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$  thì ( $E$ ) có phương trình chính tắc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

với  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

**Chứng minh.**

Ta có

Điểm  $M(x, y) \in (E)$

$$\Leftrightarrow F_1M + F_2M = 2a(1)$$

Ta có :

$$F_1M^2 = (x + c)^2 + y^2(2)$$

$$F_2M^2 = (x - c)^2 + y^2(3)$$

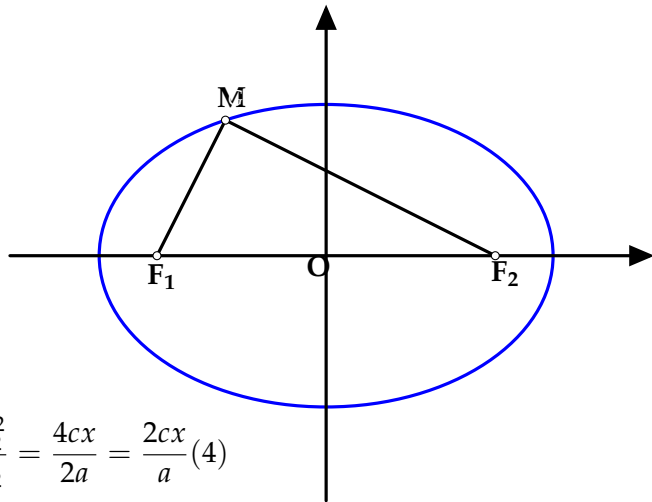
Từ đó:

$$F_1M^2 - F_2M^2 = 4cx$$

$$F_1M - F_2M = \frac{MF_1^2 - MF_2^2}{MF_1 + MF_2} = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}(4)$$

Từ (1) và (4) ta được:

$$F_1M = a + \frac{cx}{a}(5)$$



Thay (5) vào (2) ta được:

$$\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Đặt  $b^2 = a^2 - c^2$ , khi đó (6) được viết lại dưới dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Phương trình trên được gọi là phương trình chính tắc của Elíp (E).

**Tính chất 7.14.** Nếu elíp có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  thì

- Tính đối xứng: (E) có trục đối xứng là  $Ox, Oy$ , tâm đối xứng là gốc tọa độ.
- Trục lớn  $A_1A_2 = 2a$  nằm trên  $Ox$ , trục bé  $B_1B_2 = 2b$  nằm trên  $Oy$ .
- Các đỉnh  $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$ .
- Hai tiêu điểm  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ .
- Phương trình các cạnh hình chữ nhật cơ sở:  $x = \pm a, y = \pm b$ .
- Tâm sai  $e = \frac{c}{a}, 0 < e < 1$ . Vì  $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$  nên  $e$  càng gần 0 ellipse càng “tròn”,  $e$  càng gần 1 ellipse càng “dẹp”.
- Bán kính qua tiêu của điểm  $M(x_0, y_0)$  trên (E)

$$MF_1 = a + ex_0; MF_2 = a - ex_0$$

**Ví dụ 7.19.** Tìm phương trình chính tắc elíp biết rằng hai tiêu điểm là  $(\sqrt{3}, 0)$  and  $(-\sqrt{3}, 0)$  và đi qua điểm  $A(0, 3)$ .

**Ví dụ 7.20.** Cho elíp có phương trình (E) :  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

- Tìm tọa độ hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  của elíp.
- Tìm điểm  $M$  thuộc elíp sao cho  $MF_1 = 2MF_2$ .
- Tìm điểm  $M$  thuộc elíp sao cho  $\angle F_1MF_2 = 90^\circ$ .

**Ví dụ 7.21.** Cho Elíp (E) có phương trình (E):  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , với  $0 < b < a$  Hai tiêu điểm  $F_1, F_2$ . Đường thẳng di động (d) luôn đi qua  $F_2$  cắt (E) tại P, Q. Đặt  $(Ox, F_2P) = \alpha, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$

(a) Tính độ dài  $F_2P, F_2Q$  theo  $a, b, \alpha$ .

(b) CMR  $\frac{1}{F_2P} + \frac{1}{F_2Q}$  không đổi.

(c) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đoạn PQ.



## ĐƯỜNG PARABOL

**Định nghĩa 7.13.** Cho một điểm F và một đường thẳng  $\Delta$  cố định không đi qua F. Parabol (P) là tập hợp các điểm M cách đều F và  $\Delta$ . F gọi là tiêu điểm và  $\Delta$  gọi là đường chuẩn của parabol (P).

**Định lí 7.10.** Trong mặt phẳng Oxy, Parabol (P) có tiêu điểm F  $(\frac{p}{2}, 0)$  và đường chuẩn (d):  $x = -\frac{p}{2}$  có phương trình:

(P):  $y^2 = 2px$ .

**Chứng minh.** Ta có:

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (P) &\Leftrightarrow MF = d(M, (d)) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = 2px. \end{aligned}$$

Vậy phương trình Parabol (P) có dạng: (P) :  $y^2 = 2px$ .

**Tính chất 7.15.** • O gọi là đỉnh của parabol (P).

- Ox gọi là trục đối xứng của parabol (P).
- p gọi là tham số tiêu của parabol (P).
- Nếu  $M(x; y) \in (P)$  thì  $x \geq 0$  và  $M'(x; -y) \in (P)$ .

**Tính chất 7.16.** Cho parabol (P) có phương trình  $y^2 = 2px$ . Phương trình tiếp tuyến d của (P) tại điểm  $M_0(x_0; y_0)$  thuộc (P) là

$$y_0y = p(x_0 + x)$$

**Chứng minh.** Nếu tiếp tuyến  $d$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (a; b)$  thì phương trình

$$b^2 t^2 + 2(b y_0 - p a) t + y_0^2 - 2p x_0 = 0$$

phải có nghiệm kép.

Vì điểm  $M_0$  nằm trên  $(P)$  nên  $y_0^2 - 2p x_0 = 0$ , do đó phương trình trên trở thành

$$b^2 t^2 + 2(b y_0 - p a) t = 0$$

Để phương trình này có nghiệm kép, điều kiện cần và đủ là  $b \neq 0$  và  $b y_0 - p a = 0$ .

Vậy ta có thể lấy  $a = y_0, b = p$  và  $\vec{u} = (y_0; p)$ . Khi đó  $d$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (-p; y_0)$  và do đó có phương trình

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0 \text{ hay } y_0 y - y_0^2 = p x - p x_0.$$

Chú ý rằng  $y_0^2 - 2p x_0 = 0$ , ta đi đến phương trình tiếp tuyến là

$$y_0 y = p(x_0 + x)$$

**Ví dụ 7.22.** Viết phương trình chính tắc của parabol  $(P)$  có tiêu điểm  $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ .

**Ví dụ 7.23.** Cho parabol  $(P)$  có phương trình  $y^2 = 4x$ . Viết phương trình tiếp tuyến của  $(P)$  trong mỗi trường hợp sau đây :

- (a) Tiếp tuyến đi qua điểm  $(2; 3)$
- (b) Tiếp tuyến đi qua điểm  $(1; -1)$ .



## ĐƯỜNG HYPERBOL

**Định nghĩa 7.14.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho hai điểm cố định  $F_1, F_2$ , với  $F_1 F_2 = 2c > 0$ . Tập hợp những điểm  $M$  sao cho  $|MF_1 \cdot \cdot \cdot MF_2| = 2a$  ( $a$  là một số không đổi và  $a < c$ ) gọi là một Hypebol. Vậy:

$$(H) = \{M \mid |MF_1 + MF_2| = 2a\}$$

- Hai điểm  $F_1, F_2$  gọi là hai tiêu điểm của Hypebol.
- Khoảng cách  $F_1 F_2 = 2c$  gọi là tiêu cự của Hypebol.
- Trung điểm  $I$  của  $F_1 F_2$  gọi là tâm của Hypebol.

- Với điểm  $M$  thuộc Hypebol thì các khoảng cách  $MF_1$  và  $MF_2$  gọi là các bán kính qua tiêu của điểm  $M$ .

**Định lí 7.11.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , Hypebol ( $H$ ) có hai tiêu điểm  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$  và có tổng hai bán kính qua tiêu ứng với điểm tùy ý  $M(x, y) \in (H)$  là  $2a(a < c)$  có phương trình: (H):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

với  $b^2 = c^2 - a^2$ .

**Chứng minh.** Ta có:

$$M(x, y) \in (H) \Leftrightarrow |F_1M - F_2M| = 2a(1)$$

$$F_1M^2 = (x + c)^2 + y^2(2)$$

$$F_2M^2 = (x - c)^2 + y^2(3)$$

Từ đó:

$$F_1M^2 - F_2M^2 = 4cx$$

Từ (1) ta được:

$$F_1M - F_2M = \pm 2a.$$

- Với  $F_1M - F_2M = 2a(4)$

$$F_1M + F_2M = \frac{MF_1^2 - MF_2^2}{MF_1 - MF_2} = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}(5)$$

Từ (4) và (5) ta được:

$$F_1M = a + \frac{cx}{a}(6)$$

- Với  $F_1M - F_2M = -2a(7)$

$$F_1M + F_2M = \frac{MF_1^2 - MF_2^2}{MF_1 - MF_2} = -\frac{4cx}{2a} = -\frac{2cx}{a}(8)$$

Từ (7) và (8) ta được:

$$F_1M = -a - \frac{cx}{a}(9)$$

Vậy  $M(x, y) \in (H)$  được  $F_1M = \left| a + \frac{cx}{a} \right|$ . (10)

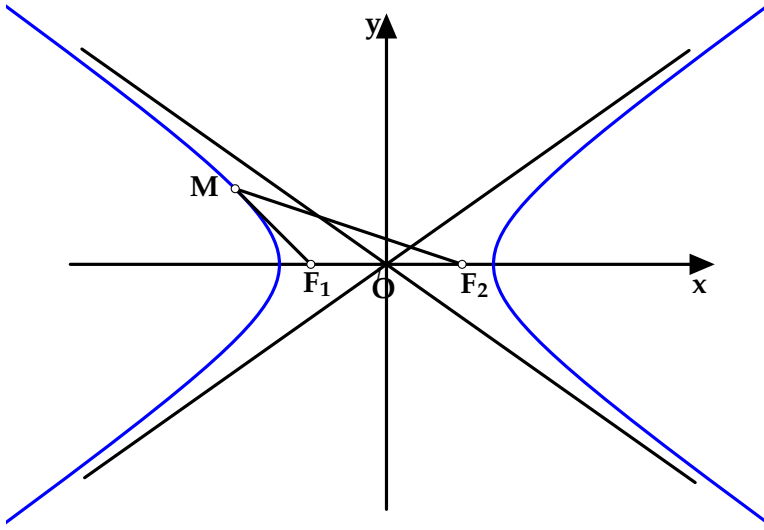
Thay (10) vào (2) ta được:

$$\left( a + \frac{cx}{a} \right)^2 = (x + c)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (11)$$

Đặt  $b^2 = c^2 - a^2$ , khi đó (11) được viết lại dưới dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vậy phương trình Hyperbol ( $H$ ) có dạng: (H):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  với  $b^2 = c^2 - a^2$ .



**Tính chất 7.17.** Hypebol có phương trình chính tắc

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

khi đó

- ( $H$ ) cắt  $Ox$  tại hai điểm  $A_1 = (-a; 0)$  và  $A_2 = (a; 0)$ . Nếu vẽ hai điểm  $B_1 = (-b; 0)$  và  $B_2 = (b; 0)$  vào hình chữ nhật  $OA_2PB_2$  thì  $OP = \sqrt{a^2 + b^2} = c$ .
- Các điểm  $A_1, A_2$  gọi là các đỉnh của hypebol.
- Đoạn thẳng  $A_1A_2$  gọi là trục thực, đoạn thẳng  $B_1B_2$  gọi là trục ảo của hypebol.
- Giao điểm  $O$  của hai trục là tâm đối xứng của hypebol.
- Nếu  $M(x; y) \in (H)$  thì  $x \leq -a$  hoặc  $x \geq a$ .

**Ví dụ 7.24.** Viết phương trình chính tắc của hypebol có độ dài trục thực bằng 16 và tiêu cự bằng 20 .

**Ví dụ 7.25.** Lập phương trình chính tắc và vẽ hình của Hyperbol biết:

- (a) Đi qua điểm  $M(2,2)$  và mỗi đường tiệm cận tạo với  $Ox$  một góc  $60^\circ$ .
- (b) Đi qua điểm  $N(\sqrt{2}, 2)$  và hai đường tiệm cận có phương trình  $y = \pm 2x$ .
- (c) Hai trục trùng với trục tọa độ và đi qua 2 điểm  $A(\sqrt{6}, -1)$  và  $B(4, \sqrt{6})$ .

**Ví dụ 7.26.** Cho Hypebol (H) có phương trình:  $(H) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ . Gọi (d) là đường thẳng qua  $O$  có hệ số góc  $k$ , (d') là đường thẳng qua  $O$  và vuông góc với (d).

- (a) Tìm điều kiện đối với  $k$  để (d) và (d') đều cắt (H).
- (b) Tính theo  $k$  diện tích hình thoi với 4 đỉnh là 4 giao điểm của (d), (d') và (H).
- (c) Xác định  $k$  để hình thoi ấy có diện tích nhỏ nhất.

**Ví dụ 7.27.** Cho Hypebol (H) có phương trình :  $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , Tiêu điểm  $F_1, F_2$  ( $F_2$  có hoành độ dương). Lập phương trình quỹ tích các trung điểm I của đoạn  $MF_2$  khi  $M$  di động trên (H).



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 7.59.** Cho  $(E) : \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Tìm điểm M trên (E) sao cho:

- (a)  $MF_1 = 2MF_2$
- (b) M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc  $60^\circ$ .

**Bài 7.60.** Cho  $ABCD$  là hình thoi có các đỉnh trùng với các đỉnh của elip. Bán kính đường tròn nội tiếp của hình thoi là  $\sqrt{2}$ . Viết phương trình chính tắc của elip biết tâm sai là  $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Bài toán có thể giải được không nếu ta chỉ biết 4 đỉnh của hình thoi nằm trên elip?

**Bài 7.61.** Cho  $(E) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$  và đường thẳng  $d : x - y\sqrt{2} + 2 = 0$ .

- (a) Chứng minh (d) luôn cắt (E) tại hai điểm A,B. Tính AB.
- (b) Tìm điểm (C) trên (E) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

**Bài 7.62.** Tìm trên  $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{13} = 1$  hai điểm M, N sao cho tam giác  $F_1MN$  đều.

**Bài 7.63.** Cho  $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Tìm A, B thuộc  $(E)$  có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

**Bài 7.64.** Cho  $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ . Tìm điểm M trên  $(E)$  sao cho:

(a)  $2MF_1 = 3MF_2$

(b)  $\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{MF_2} = \frac{6}{F_1F_2}$

(c)  $MF_1^3 + MF_2^3 = 182$

**Bài 7.65.** Cho  $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  và điểm M(2,1).

(a) Chứng minh M nằm trong  $(E)$

(b) Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt  $(E)$  tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm AB.

(c) Tính khoảng cách từ các tiêu điểm đến đường thẳng AB.

**Bài 7.66.** Cho  $(E) : x^2 + 2y^2 = 2$  và đường thẳng  $d : x + y + m = 0$ . Tìm  $m$  để:

(a) Đường thẳng  $(d)$  cắt  $(E)$  tại hai điểm phân biệt. Khi đó:

(i) Tìm tập hợp trung điểm của AB.

(ii) Tìm  $m$  để độ dài AB lớn nhất.

(iii) Tìm  $m$  để khoảng cách từ gốc tọa độ đến AB bằng nửa độ dài đoạn AB.

(b) Đường thẳng  $(d)$  có một điểm chung duy nhất với  $(E)$ .

**Bài 7.67.** Cho  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$ .

(a) Gọi A, B là hai điểm trên  $(E)$  sao cho OA vuông góc OB. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

(b) Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

**Bài 7.68.** Cho  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$ . Gọi  $F_1, F_2$  là hai tiêu điểm và  $A_1, A_2$  là hai đỉnh trên trục lớn. M là một điểm tùy ý trên  $(E)$  có hình chiếu trên Ox là H. Chứng minh rằng:

$$(a) MF_1.MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$$

$$(b) (MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$$

$$(c) MH^2 = -\frac{b^2}{a^2} \overline{HA_1.HA_2}$$

**Bài 7.69.** Cho  $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ . Gọi  $A, B$  là hai điểm trên  $(E)$  sao cho  $OA$  vuông  $OB$ . Xác định vị trí của  $AB$  sao cho tam giác  $OAB$  có diện tích lớn nhất.

**Bài 7.70.** Cho  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$  và đường thẳng  $d : Ax + By + C = 0$ .

(a) Tìm điều kiện của  $a, b, A, B, C$  để  $(E)$  và  $d$  có duy nhất một điểm chung, không có điểm chung.

(b) Khi  $(E)$  và  $d$  không có điểm chung. Tìm những điểm  $M$  thuộc  $(E)$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến  $d$  đạt GTLN, GTNN.

**Bài 7.71.** Cho  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$  và điểm  $M(x_0, y_0)$  nằm trên  $(E)$ .

(a) Chứng minh  $a \leq OM \leq b$

(b) Chứng minh  $|x_0 + y_0| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

(c) Tìm những điểm thuộc  $(E)$  sao cho khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm phải lớn nhất, nhỏ nhất.

**Bài 7.72.** Cho điểm  $M\left(1, -\frac{1}{2}\right)$  và Elíp  $(E)$  có phương trình:  $(E) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ . Lập phương trình đường thẳng  $(d)$  qua  $M$  cắt  $(E)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho:

(a)  $M$  là trung điểm  $AB$ .

(b)  $AB = \sqrt{20}$ . Từ đó lập phương trình đường tròn đường kính  $AB$  trong mỗi trường hợp.

**Bài 7.73.** Cho 2 Elíp  $(E_1)$  và  $(E_2)$  có phương trình:

$$(E_1) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ và } (E_2) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$$

(a)  $CMR(E_1) \cap (E_2) = \{A, B, C, D\}$  và  $ABCD$  là hình chữ nhật.

(b) Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật  $ABCD$ .

**Bài 7.74.** Cho 2 Elíp ( $E_1$ ) và ( $E_2$ ) có phương trình:

$$(E_1) : \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ và } (E_2) : x^2 + 9y^2 - 6x - 27 = 0$$

- (a) Tìm giao điểm của ( $E_1$ ) và ( $E_2$ ).
- (b) Chuyển phương trình Elíp ( $E_2$ ) về dạng chính tắc, từ đó xác định các thuộc tính của nó và vẽ ( $E_1$ ), ( $E_2$ ) trên cùng một hệ trục tọa độ

**Bài 7.75.** Lập phương trình Parabol ( $P$ ) có đỉnh là gốc tọa độ và có đường chuẩn là  $y = -1$  Tìm giao điểm của đường thẳng ( $d$ ) :  $x - y - 1 = 0$  với Parabol trên.

**Bài 7.76.** Cho đường thẳng ( $d$ ) có phương trình: ( $d$ ):  $x + 2y = 0$ .

- (a) Lập phương trình Parabol ( $P$ ) có đỉnh là gốc tọa độ, nhận trục hoành làm trục đối xứng và chắn trên đường thẳng ( $d$ ) một đoạn bằng  $4\sqrt{5}$ .
- (b) Gọi  $F$  là tiêu điểm của Parabol ( $P$ ). Lập phương trình đường tròn tâm  $F$  và tiếp xúc với đường thẳng ( $d$ ).

**Bài 7.77.** Cho Parabol ( $P$ ) và đường thẳng ( $d$ ) có phương trình:

$$(P): y^2 = 4x \text{ và } (d) : 2x - y - 4 = 0.$$

Tìm các điểm  $M \in (d)$  để từ đó:

- (a) Không kẻ được tiếp tuyến nào tới ( $P$ ).
- (b) Kẻ được một tiếp tuyến tới ( $P$ ).
- (c) Kẻ được hai tiếp tuyến tới ( $P$ ).

**Bài 7.78.** Cho Parabol ( $P$ ) và đường thẳng ( $d$ ) có phương trình:

$$(P) : x^2 = 4y \text{ và } (d) : x - y - 1 = 0.$$

- (a) CMR ( $d$ ) tiếp xúc với ( $P$ ), xác định tọa độ tiếp điểm  $M$ .
- (b) Lập phương trình đường thẳng ( $\Delta$ ) qua  $M$  và vuông góc với ( $d$ ), từ đó tìm tọa độ giao điểm thứ hai  $N$  của ( $\Delta$ ) với ( $P$ ).

**Bài 7.79.** Cho Parabol ( $P$ ) có phương trình: ( $P$ ) :  $y^2 = 4x$  Một đường thẳng bất kỳ đi qua tiêu điểm của ( $P$ ) cắt ( $P$ ) tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . CMR tích các khoảng cách từ  $A$  và  $B$  đến trục của ( $P$ ) là một đại lượng không đổi.

**Bài 7.80.** Viết phương trình của parabol ( $P$ ) trong mỗi trường hợp sau :

- (a) Có tiêu điểm là  $O(0;0)$  và đường chuẩn  $\Delta$  có phương trình  $x + y + 1 = 0$ .
- (b) Có đỉnh là điểm  $I(1;2)$  và tiêu điểm có tọa độ  $F(4;1)$ .
- (c) ( $P$ ) đi qua hai điểm  $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), (0;1)$  và có trục đối xứng là đường thẳng  $x + y + 1 = 0$ . Xác định tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của ( $P$ ).

**Bài 7.81.** Cho parabol ( $P$ ) có phương trình  $y^2 = 4x$ . Viết phương trình tiếp tuyến của ( $P$ ) trong mỗi trường hợp sau đây :

- (a) Tiếp tuyến đi qua điểm  $(1; -2)$
- (b) Tiếp tuyến đi qua điểm  $(2;3)$
- (c) Tiếp tuyến đi qua điểm  $(1; -1)$ .

**Bài 7.82.** Cho parabol ( $P$ ) có phương trình  $y^2 = 2px$ .

- (a) Tính độ dài cạnh của tam giác đều có ba đỉnh nằm trên ( $P$ ), một trong chúng là đỉnh của ( $P$ ).
- (b) Tìm bán kính lớn nhất của đường tròn nằm trong ( $P$ ) sao cho nó chỉ có một điểm chung với ( $P$ ) là đỉnh của ( $P$ ). c). Một đường thẳng thay đổi luôn luôn đi qua tiêu điểm  $F$  cắt ( $P$ ) tại  $A$  và  $B$ . Chứng minh rằng đường tròn đường kính  $AB$  luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.
- (c) Gọi  $I$  là điểm cố định nằm trên trục đối xứng của ( $P$ ) và khác với  $O, \Delta$  là đường thẳng thay đổi cắt ( $P$ ) tại  $A$  và  $B$ . Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ  $A$  và  $B$  tới trục đối xứng của ( $P$ ) có giá trị không đổi.
- (d) Tìm quỹ tích các điểm  $M$  qua đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến của ( $P$ ) vuông góc với nhau.

**Bài 7.83.** Cho đồ thị ( $C$ ) của hàm số  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  và parabol ( $P$ ) có phương trình  $y^2 = 2px (p \neq 0)$ . Chứng minh rằng nếu ( $C$ ) cắt ( $P$ ) tại bốn điểm phân biệt thì bốn điểm đó nằm trên một đường tròn.

**Bài 7.84.** Cho ba điểm  $F_1(-4,0), F_2(4,0)$  và điểm  $A(2,0)$ .

- (a) Lập phương trình Hyperbol ( $H$ ) đi qua  $A$  và có tiêu điểm  $F_1, F_2$ .

(b) Tìm tọa độ điểm  $M$  trên  $(H)$  sao cho  $MF_2 = 2MF_1$ .

**Bài 7.85.** Lập phương trình chính tắc và phương trình tham số của Hypebol  $(H)$ , biết:

(a) Có các tiêu điểm trên  $Oy$ , độ dài trục ảo bằng 6 và hai đường tiệm vuông góc với nhau.

(b) Đi qua điểm  $M(6, 4)$  và mỗi đường tiệm cận tạo với trục hoành một góc  $30^\circ$ .

**Bài 7.86.** Lập phương trình Hypebol  $(H)$  có một đỉnh trên trục thực là  $A(1, -1)$  và đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của  $(H)$  là  $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$

**Bài 7.87.** Lập phương trình chính tắc của Hypebol, biết hai tiêu điểm  $F_1(-1, -1)$ ,  $F_2(3, 3)$  độ dài trục thực bằng 8.

**Bài 7.88.** Lập phương trình chính tắc của Hyperbol biết:

(a) Trục thực thuộc  $Ox$ , có độ dài bằng 10, trục ảo thuộc  $Oy$ , có độ dài bằng 8.

(b) Độ dài trục thực bằng 8, tâm sai  $e = \frac{5}{4}$ .

(c) Có các tiêu điểm trên  $Ox$ , độ dài tiêu cự là 20 và một đường tiệm có phương trình là  $4x + 3y = 0$ .

(d) Có các tiêu điểm trên  $Oy$ , độ dài trục thực bằng 8 và hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.

**Bài 7.89.** Cho hai điểm  $F_1(-5, 2)$ ,  $F_2(3, 2)$ .

(a) Viết phương trình Hypebol  $(H)$  có tâm sai  $e = 2$  và nhận  $F_1, F_2$  làm tiêu điểm.

(b) Tìm trên  $(H)$  bốn điểm sao cho chúng là các đỉnh của một hình bình hành có 2 một cạnh đi qua gốc tọa độ và có một đường trung bình thuộc đường thẳng

(d):  $y = 3x + 5$

**Bài 7.90.** Lập phương trình chính tắc của Hyperbol biết:

(a) Hai tiêu điểm  $F_1(-2, 2)$ ,  $F_2(4, -4)$  và độ dài trục thực bằng 6.

(b) Hai tiêu điểm  $F_1(-2, 0)$ ,  $F_2(0, 3)$  và đi qua gốc tọa độ.

**Bài 7.91.** Cho hai điểm  $A(0, -b)$ ,  $B(0, 3b)$  và  $I(0, b)$ .

(a) Lập phương trình quỹ tích các điểm  $M$  thỏa mãn  $IM^2 = MA \cdot MB$ .

- (b) Lập phương trình quỹ tích các điểm  $N$  sao cho các đường thẳng  $AN$  và  $BN$  có tích hệ số góc bằng  $k^2$ .
- (c)  $(C)$  là đường tròn thay đổi luôn đi qua  $A, B$ .  $EF$  là một đường kính của  $(C)$  cùng phương với  $Oy$ . Lập phương trình quỹ tích các điểm  $E; F$ .

**Bài 7.92.** Cho điểm  $M(0, 2)$  và Hyperbol  $(H)$  có phương trình:  $(H) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$   
 Lập phương trình đường thẳng  $(d)$  qua  $M$  cắt  $(H)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

**Bài 7.93.** Cho Elíp  $(E)$  có phương trình:  $(E) : \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$  và điểm  $A$  có  $x_A = -\frac{3}{2}$  và  $y_A > 0$  thuộc  $(E)$ .

- (a) Lập phương trình chính tắc của Hyperbol  $(H)$  có 1 tiêu điểm  $F_1(-1, -2)$ , tâm  $I(1, -2)$  và đi qua  $A$ .
- (b) Lập phương trình các tiếp tuyến của  $(H)$  tại giao điểm của  $(H)$  và  $(E)$ .

**Bài 7.94.** Cho Hyperbol  $(H)$  có phương trình:  $(H) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$  Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc Hyperbol  $(H)$  sao cho:

- (a) Có tọa độ nguyên.
- (b) Có bán kính qua tiêu điểm này bằng 2 lần bán kính qua tiêu điểm kia.
- (c) Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc  $60^\circ$ .

**Bài 7.95.** Cho điểm  $M(0, 2)$  và Hyperbol  $(H)$  có phương trình:

$$(H) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1.$$

Lập phương trình đường thẳng  $(d)$  qua  $M$  cắt  $(H)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $M$  là trung điểm  $AB$ .

**Bài 7.96.** Cho Hyperbol  $(H)$  và đường thẳng  $(d)$  có phương trình:

$$(H) : \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1 \text{ và } (d) : 2x - y + m = 0.$$

- (a)  $CMR(H) \cap (d) = \{A, B\}$  với  $A, B$  thuộc hai nhánh khác nhau của  $(H)$ , giả sử  $x_A < x_B$ .
- (b) Tìm  $m$  sao cho  $2F_1A = F_2B$ .

# CHƯƠNG

## 8



## LƯỢNG GIÁC

### §1. GÓC LƯỢNG GIÁC. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC. CUNG LIÊN KẾT



#### LÝ THUYẾT

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



#### BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

Ví dụ 8.1. Chứng minh các biểu thức sau:

(a)  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$$(b) 3 - 4 \sin^2 x = 4 \cos^2 x - 1$$

$$(c) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$(d) 4 \cos^2 x - 3 = (1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x)$$

**Ví dụ 8.2.** Rút gọn

$$A = \frac{\cos(2\pi - \alpha) \cot(\pi + \alpha) \tan(-\alpha - \pi)}{\sin(\pi - \alpha) \cot(3\pi - \alpha)}$$

**Ví dụ 8.3.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$(a) C = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

$$(b) D = 2 \cos x - 3 \cos(\pi - x) + 5 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

**Ví dụ 8.4.** Rút gọn:

$$(a) D = \cot 15^\circ + \cot 30^\circ + \cot 45^\circ + \dots + \cot 165^\circ$$

$$(b) E = \sin 5^\circ + \sin 10^\circ + \dots + \sin 360^\circ$$

**Ví dụ 8.5.** Cho tam giác  $ABC$ , chứng minh rằng:

$$(a) \cot(A - B + C) = -\cot 2B$$

$$(b) \sin \frac{A + B + 3C}{2} = \cos C.$$



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 8.1.** Cho  $a \sin x \sin y - b \cos x \cos y = 0$ . Chứng minh  $Q = \frac{1}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} + \frac{1}{a \sin^2 y + b \cos^2 y}$  không phụ thuộc vào giá trị của  $x, y$ .

**Bài 8.2.** Cho  $Q = \sin^6 x + \cos^6 x - m(\sin^4 x + \cos^4 x)$ . Tìm  $m$  để giá trị của  $Q$  không phụ thuộc vào  $x$ .

**Bài 8.3.** Rút gọn các biểu thức

$$(a) E = \sin(5\pi + x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cot(3x - \pi) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

$$(b) F = \cos(15\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cot\left(\frac{11\pi}{2} - x\right).$$

**Bài 8.4. Rút gọn**

(a)  $H = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$

(b)  $I = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \dots \tan 89^\circ$

**Bài 8.5. Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:**

(a)  $\sin(A + 2B + C) = -\sin B$

(b)  $\cos \frac{-3A + B + C}{2} = -\sin 2A$

(c)  $\sin \frac{A + B + 3C}{2} = \cos C$

(d)  $\cos \frac{-3A + B + C}{2} = -\sin 2A$

**Bài 8.6. Rút gọn các biểu thức sau:**

(a)  $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$

(b)  $B = 2 \cos x + 3 \cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$

(c)  $H = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x).$

(d)  $I = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin^2(x + \pi).$

(e)  $J = \sin^6(x + \pi) + \cos^6(x - \pi) - 2 \sin^4(x + 2\pi) - \sin^4\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$

**Bài 8.7. Rút gọn các biểu thức sau (không dùng máy tính):**

(a)  $A = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 180^\circ$

(b)  $B = \cos 10^\circ + \cos 40^\circ + \cos 70^\circ + \dots + \cos 170^\circ$

(c)  $C = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \dots + \tan 180^\circ$

(d)  $J = \sin^2 28^\circ + \sin^2 36^\circ + \sin^2 54^\circ + \cos^2 152^\circ$

(e)  $K = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$

**Bài 8.8. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:**

$$(a) \sin B = \sin(A + C)$$

$$(e) \cos(A + B - C) = -\cos 2C$$

$$(b) \cos(A + B) = -\cos C$$

$$(f) \tan \frac{A + B - 2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$$

$$(c) \sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}$$

$$(g) \cos \frac{A + 3B + C}{2} = -\sin B$$

$$(d) \cos(B - C) = -\cos(A + 2C)$$

$$(h) \cot \frac{A - 2B + C}{2} = \tan \frac{3B}{2}$$

**Bài 8.9.** Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng:

$$(a) \sin(A + B) + \sin(C + D) = 0$$

$$(b) \cos(A + C) = \cos(B + D)$$

$$(c) \tan \frac{A + B}{2} = -\tan \frac{C + D}{2}$$

$$(d) \cot(A + B + C) = -\cot D$$

## §2. CÔNG THỨC CỘNG - CÔNG THỨC NHÂN

**Tính chất 8.1. 1 Công thức cộng.**

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

**Tính chất 8.2. 2 Công thức nhân**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}; \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

Công thức hạ bậc	Công thức nhân ba
$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$	$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$	$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$



### BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

**Ví dụ 8.6.** Biết rằng:

$$\begin{cases} \sin a + 7 \sin b = 4(\sin c + 2 \sin d) \\ \cos a + 7 \cos b = 4(\cos c + 2 \cos d) \end{cases}$$

Chứng minh rằng:  $2 \cos(a - d) = 7 \cos(b - c)$

**Ví dụ 8.7.** Biết rằng

$$\begin{cases} \tan(a+b) = \sqrt{5} \\ \tan(a-b) = \sqrt{3} \end{cases}$$

Hãy tính  $\tan 2a$  và  $\tan 2b$  ?

**Ví dụ 8.8.** Biết  $\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x+y+z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x+y+z)} = a$  Chứng minh rằng:

$$\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x) = a$$

**Ví dụ 8.9.** Chứng minh rằng:

$$\forall x : \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

**Ví dụ 8.10.** Chứng minh rằng:  $\forall x :$

$$(a) \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

$$(b) \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$$

**Ví dụ 8.11.** Chứng minh rằng:

$$(a) \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

$$(b) \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$$

$$(c) \tan 5^\circ \cdot \tan 55^\circ \cdot \tan 65^\circ \cdot \tan 75^\circ = 1$$

**Ví dụ 8.12.** Chứng minh rằng:

$$(4 \cos^2 9^\circ - 3) (4 \cos^2 27^\circ - 3) = \tan 9^\circ$$

**Ví dụ 8.13.** Chứng minh rằng  $\forall x, y, z$  ta luôn có:

$$(a) \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z) = 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y+z}{2} \sin \frac{z+x}{2}$$

$$(b) \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x+y+z) = 4 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{y+z}{2} \sin \frac{z+x}{2}$$

**Ví dụ 8.14.** Biết

$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = a \\ \cos \alpha + \cos \beta = b \\ a, b \neq 0 \end{cases}$$

Chứng minh  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ .

**Ví dụ 8.15.** Biết rằng:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = 0 \\ \cos x + \cos y + \cos z = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$$



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Ví dụ 8.16.** Chứng minh các đẳng thức sau

(a)  $\cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{4} \cos 3x$

(b)  $\frac{\sin 2x + \sin x}{1 + \cos 2x + \cos x} = \tan x$

(c)  $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 4x + \cos 2x) = \sin x$

(d)  $\frac{1 + \cos x - \sin x}{1 - \cos x - \sin x} = -\cot \frac{x}{2}$

(e)  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$

(f)  $\frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{3 + 4 \cos 2x + \cos 4x} = \tan^4 x$

(g) Tính  $A = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}$

**Bài 8.10.** Chứng minh các đẳng thức sau:

- (a)  $\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c = \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}$
- (b)  $\cos^2 x + \cos^2(x+y) + \cos^2 y - 2 \cos x \cos y \cos(x+y) = 1.$
- (c)  $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} [\cos 2x + \cos 2y + \cos(2x+2y)] - 2 \cos x \cos y \cdot \cos(x+y)$
- (d)  $\sin x \sin(y-z) + \sin y \sin(x-z) + \sin z \sin(x-y) = 0$
- (e)  $\tan(x+y) - \tan x - \tan y = \tan(x+y) \tan x \tan y$
- (f)  $\tan 2x \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \tan 2x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$
- (g)  $\tan x \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \tan x = -3$

**Bài 8.11.** Chứng minh các biểu thức sau

- (a)  $\frac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cot a \cdot \cot b + 1}{\cot a \cdot \cot b - 1}$
- (b)  $\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cdot \cos a} = 0$
- (c)  $\frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = \tan^2 a - \tan^2 b$
- (d)  $\frac{\cos(a+b) \cos(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = 1 - \tan^2 a \tan^2 b$

**Bài 8.12.** Chứng minh rằng

- (a) Nếu  $\cos(a+b) = 0$  thì  $\sin(a+2b) = \sin a$
- (b) Nếu  $\sin(a+2b) = 3 \sin b$  thì  $\tan(a+b) = 2 \tan a$
- (c) Nếu  $\tan a = 2 \tan b$  thì  $\sin(a+b) = 3 \sin(a-b)$
- (d) Nếu  $\tan a \cdot \tan b = -\frac{1}{3}$  thì  $\cos(a+b) = 2 \cos(a-b)$

**Bài 8.13.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

- (a)  $\sin C = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A$
- (b)  $\cos A = \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C$
- (c)  $\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \tan A + \tan B$

$$(d) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$(e) \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$$

$$(f) \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$(g) \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$(h) \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$(i) \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$$

**Bài 8.14.** Cho tam giác ABC. Chứng minh

$$(a) \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \text{ với tam giác ABC có 3 góc nhọn.}$$

$$(b) \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9, \text{ với tam giác ABC có 3 góc nhọn.}$$

$$(c) \tan^6 A + \tan^6 B + \tan^6 C \geq 81, \text{ với tam giác ABC có 3 góc nhọn.}$$

$$(d) \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1.$$

$$(e) \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

**Bài 8.15.**

$$(a) \text{ Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: } A = \sin^4 x + \cos^4 x - 3 \sin x \cdot \cos x$$

$$(b) \text{ Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa } 3(\cos B + 2 \sin C) + 4(\sin B + 2 \cos C) = 15 \text{ thì tam giác ABC vuông.}$$

**Bài 8.16.** Cho  $x, y, z > 0$  và  $x + y + z \leq \pi$ . Chứng minh rằng:

$$\sin x + \sin y + \sin(x + y + z) \leq \sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(x + z)$$

**Bài 8.17.** Chứng minh rằng với mọi  $x, \alpha$  ta luôn có:

$$x^2 (1 + \sin^2 \alpha) + 2x(\sin \alpha + \cos \alpha) + 1 + \cos^2 \alpha > 0$$

### §3. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

Tính chất 8.3. 3 Công thức biến đổi

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$
$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$	$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$
$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$	$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$
$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)$ $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cdot \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right)$	



#### BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

Ví dụ 8.17. Rút gọn các biểu thức sau:

(a)  $A = \frac{1 - 2 \cos x}{1 + 2 \cos x}$

(b)  $C = \frac{\sqrt{3} - 2 \cos 3x}{\sqrt{3} + 2 \cos 3x}$

(c)  $C = \frac{\sqrt{2} - 2 \sin 2x}{\sqrt{2} + 2 \sin 2x}$

(d)  $D = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{2 \cos 4x}$

Ví dụ 8.18. Biến đổi thành tích các biểu thức sau:

(a)  $\sqrt{2} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x$

(b)  $\sin 3x - 2 \sin 2x + \sin x$

(c)  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x$

(d)  $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$

**Ví dụ 8.19.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

(a)  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

(b)  $1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4 \cos A \cos B \cos C$

(c)  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$

(d)  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 8.18.** Rút gọn các biểu thức sau:

(a)  $F = \frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x}$

(f)  $K = \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$

(b)  $G = \frac{\sin^2 4x}{2 \cos x + \cos 3x + \cos 5x}$

(g)  $L = \frac{\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x}{\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x}$

(c)  $H = \frac{\sin 2x}{\tan x + \cot 2x}$

(h)  $M = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$

(d)  $I = \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}$

(e)  $J = \frac{\sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2 \cos 4x + \cos 5x}$

(i)  $N = \frac{\cos 7x - \cos 8x - \cos 9x + \cos 10x}{\sin 7x - \sin 8x - \sin 9x + \sin 10x}$

**Bài 8.19.** Biến đổi thành tích các biểu thức sau:

(a)  $1 + \sin x - \cos 2x$

(d)  $\sin 3x - \sin x + \sin 2x$

(b)  $1 + \sin x + \cos x$

(c)  $\cos x + \sin 2x - \cos 3x$

(e)  $\sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x$

**Bài 8.20.** Phân tích thành tích các biểu thức sau:

(a)  $\sin x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x$

$\cos 11x$

(b)  $\sin x - \sin 2x + \sin 5x - \sin 8x$

(e)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x - 1 - \cos x -$

(c)  $\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1$

$\cos 2x$

(d)  $\cos 5x + 3 \cos 7x + 3 \cos 9x +$

(f)  $1 + \sin x - \cos 5x - \sin 7x -$

$$2 \cos^2 \frac{3x}{2}$$

$$(h) \sin x + \sin 2x + \sin 3x - \cos x - \cos 2x - \cos 3x$$

$$(g) \sin x + \sin 2x + \sin 3x - 1 - \cos x - \cos 2x$$

$$(i) \sin 3x + \sin x - \sin 2x + 2(1 - \cos x) \cos x$$

**Bài 8.21.** Biến đổi thành tích các biểu thức sau:

$$(a) \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$$

$$(b) \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - \frac{3}{2}$$

$$(c) \sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x$$

$$(d) \sin^2 x - \cos^2 2x - \cos^2 3x$$

$$(e) \sin^2 x - 2 \sin^2 2x + \sin^2 3x$$

$$(f) \sin^2 3x - \cos^2 4x - \sin^2 5x + \cos^2 6x$$

$$(g) \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - \frac{3}{2}$$

**Bài 8.22.** Không dùng máy tính hãy tính giá trị các biểu thức sau:

$$(a) \sin^6 \frac{\pi}{24} + \cos^6 \frac{\pi}{24}$$

$$(b) \tan^2 \frac{\pi}{12} + \cot^2 \frac{\pi}{12}$$

$$(c) \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$$

$$(d) \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11}$$

**Bài 8.23.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$(a) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$(b) \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$(c) \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$



## CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\begin{aligned}\cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)] \\ \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] \\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]\end{aligned}$$

**Ví dụ 8.20.** Biến đổi thành tổng các biểu thức sau:

- (a)  $2 \sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x$
- (b)  $8 \cos x \cdot \cos 5x \cdot \sin 7x$
- (c)  $4 \cos(a - b) \cos(b - c) \cos(c - a)$

**Ví dụ 8.21.** Tính giá trị các biểu thức sau:

- (a)  $\sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \dots \sin 65^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ$
- (b)  $\sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ$
- (c)  $\sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$
- (d)  $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$
- (e)  $\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9}$

**Ví dụ 8.22.** Rút gọn các biểu thức sau:

- (a)  $\cos 11x \cdot \cos 3x - \cos 17x \cdot \cos 9x$
- (b)  $\sin 18x \cdot \cos 13x - \sin 9x \cdot \cos 4x$
- (c)  $\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$
- (d)  $8 \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 1$
- (e)  $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 12x$



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 8.24.** Biến đổi thành tổng các biểu thức sau:

(a)  $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}$

(b)  $\sin 4x \cdot \cos 7x$

**Bài 8.25.** Tính giá trị các biểu thức sau:

(a)  $\sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \dots \sin 65^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ$

(b)  $\sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ$

(c)  $\sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$

(d)  $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$

(e)  $\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9} +$

$\cos \frac{8\pi}{9}$

**Bài 8.26.** Rút gọn các biểu thức sau:

(a)  $\cos 11x \cdot \cos 3x - \cos 17x \cdot \cos 9x$

(b)  $\sin 18x \cdot \cos 13x - \sin 9x \cdot \cos 4x$

(c)  $\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

(d)  $8 \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 1$

(e)  $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 12x$

(f)  $4 \sin 2x \cdot \sin 5x \cdot \sin 7x - \sin 4x$

(g)  $\sin 2x \cdot \cos 4x \cdot \sin 6x + \frac{1}{4} \cos 12x$

(h)  $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x$

(i)  $\sin 4x \cdot \sin 10x - \sin 11x \cdot \sin 3x - \sin 7x \cdot \sin x$

(j)  $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} - \sin x \cdot \sin 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x$

(k)  $\sin \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2} + \sin 2x \cdot \cos 7x$

(l)  $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x - 4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - 2$

(m)  $\sin x(1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x)$

**Bài 8.27.** Rút gọn các biểu thức sau:

(a)  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos(2n - 1)x$

(b)  $\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$

(c)  $\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n}$

(d)  $(1 + \frac{1}{\cos x})(1 + \frac{1}{\cos 2x})(1 + \frac{1}{\cos 3x}) \dots (1 + \frac{1}{\cos 2^{n-1}x})$

(e)  $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x}$

(f)  $\sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3} + 3^2 \sin^3 \frac{x}{3} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n}$

(g)  $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^{n-1}x}$

(h)  $\frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos(n-1)x \cdot \cos x}$

**Bài 8.28.** Cho tam giác ABC. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

(a)  $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(c)  $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$

(b)  $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

(d)  $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$

PHẦN



---

CHUYÊN ĐỀ

# CHƯƠNG

## 9



## PHƯƠNG PHÁP VÀ KỸ THUẬT CHỨNG MINH

---

---

### §1. SUY LUẬN PHẢN CHỨNG



#### LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

**Tính chất 9.1.**  $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$  hoặc  $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow S$   $S$  là mệnh đề hằng sai.

Phương pháp chứng minh phản chứng là một phương pháp chứng minh gián tiếp, để chứng minh mệnh đề  $A \Rightarrow B$  ta chứng minh mệnh đề tương đương với nó là  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ .

Điểm mạnh của phương pháp này là ta đã tạo thêm được giả thiết mới  $\bar{B}$ , để từ đó giúp ta suy luận tiếp để giải quyết được bài toán.

Tất nhiên việc viết lại mệnh đề  $\bar{B}$  một cách chính xác là điều quan trọng, cái này chú ý một số quy tắc về mệnh đề.

Phương pháp này được sử dụng hầu hết trong các phân môn của toán là: đại số, số học, hình học, tổ hợp. Ở đây ta chỉ đề cập đến các bài toán tổ hợp.

**Ví dụ 9.1.** (Nguyên lý Dirichlet) Có  $nk + 1$  viên bi, bỏ vào trong  $k$  cái hộp. Chứng minh rằng có ít nhất một hộp có ít nhất là  $n + 1$  viên bi.

**Ví dụ 9.2.** Có tồn tại hay không một cách điền các số  $0, 1, 2, 3, \dots, 9$  vào các đỉnh của một đa giác 10 đỉnh sao cho hiệu hai số ở hai đỉnh kề nhau chỉ có thể nhận một trong các giá trị sau:  $-5, -4, -3, 3, 4, 5$ .

**Ví dụ 9.3.** Điền các số  $1, 2, 3, \dots, 121$  vào một bảng ô vuông kích thước  $11 \times 11$  sao cho mỗi ô chứa một số. Tồn tại hay không một cách điền sao cho hai số tự nhiên liên tiếp sẽ được điền vào hai ô có chung một cạnh và các tất cả các số chính phương thì nằm trong cùng một cột?

**Ví dụ 9.4.** Tập  $S$  được gọi là một tập cân nếu lấy từ  $S$  ra một phần tử bất kì thì các phần tử còn lại của  $S$  có thể chia ra làm hai phần có tổng bằng nhau. Tìm số phần tử nhỏ nhất của một tập cân.

**Ví dụ 9.5.** Cho  $F = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$  là một họ các tập con có  $r$  phần tử của tập  $X$ .

Nếu giao của  $r + 1$  tập bất kì của  $F$  là khác rỗng, chứng minh rằng giao của tất cả các tập thuộc  $F$  là khác rỗng.

**Ví dụ 9.6.** Cho  $A$  và  $B$  là các tập phân biệt và hợp của  $A$  và  $B$  là tập các số tự nhiên. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$  tồn tại các số phân biệt  $a, b > n$  sao cho  $\{a, b, a + b\} \subset A$  hoặc  $\{a, b, a + b\} \subset B$ .

**Ví dụ 9.7.** Trong mặt phẳng tọa độ thì một điểm mà hoành độ và tung độ đều là các số nguyên được gọi là điểm nguyên. Chứng minh rằng không tồn tại tam giác đều nào mà các đỉnh đều là điểm nguyên.

**Ví dụ 9.8.** Cho  $S$  là tập vô hạn các phân tử và  $P(S)$  là họ các tập con của  $S$ . Chứng minh rằng không tồn tại một song ánh từ  $S$  và  $P(S)$ .

**Ví dụ 9.9.** Trong một bữa tiệc có  $2n$  người tham gia. Mỗi người có một số chẵn người quen trong đó ( $A$  quen  $B$  thì  $B$  cũng quen  $A$ ). Chứng minh rằng tồn tại hai người có cùng một số chẵn người quen chung trong bữa tiệc.

**Ví dụ 9.10.** Cho  $A$  là tập con có 19 phần tử của tập  $\{1, 2, \dots, 106\}$  sao cho không có hai phần tử nào có hiệu bằng 6, 9, 12, 15, 18. Chứng minh rằng có 2 phần tử thuộc  $A$  có hiệu bằng 3.

**Ví dụ 9.11.** Một hình vuông  $n \times n$  ô được tô bởi hai màu đen trắng, sao cho trong 4 ô góc thì 3 ô được tô màu đen, 1 ô được tô màu trắng. Chứng minh rằng trong hình vuông có ô vuông  $2 \times 2$  mà có số ô màu đen là số lẻ.



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 9.1.** Cho các số  $a, b, c$  nguyên lẻ. Chứng minh rằng phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  không có nghiệm hữu tỷ.

**Bài 9.2.** Tìm một đa thức bậc ba nhận  $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  làm nghiệm. Từ đó chứng minh  $\alpha$  là một số vô tỉ.

**Bài 9.3.** Chứng minh rằng trong một tam giác có hai phân giác bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

**Bài 9.4.** Có tồn tại hay không tam giác  $ABC$  thỏa các đường cao  $AH$ , trung tuyến  $BM$  và phân giác  $CD$  cắt nhau tạo thành 1 tam giác vuông.

**Bài 9.5.** Cho hình vuông  $ABCD$ , bên trong hình vuông  $ABCD$  lấy điểm  $M$  sao cho  $\angle MAB = \angle MBA = 15^\circ$ . Chứng minh rằng tam giác  $MCD$  đều.

**Bài 9.6.** Một hình vuông  $8 \times 8$  có thể phủ được bằng các hình T-tetrominoes và 1 hình vuông  $2 \times 2$  không?

**Bài 9.7.** Chứng minh rằng hình vuông  $10 \times 10$  không thể phủ bởi các hình chữ nhật  $1 \times 4$ .

**Bài 9.8.** Mỗi phần tử của bảng vuông  $25 \times 25$  đều có số  $+1$  hoặc  $-1$ . Gọi  $a_i$  là tích của tất cả các phần tử trên hàng thứ  $i$ , và  $b_j$  là tích của tất cả các phần tử trên cột thứ  $j$ . Chứng minh rằng

$$a_1 + b_1 + \cdots + a_{25} + b_{25} \neq 0.$$

**Bài 9.9.** Điền các số  $1, 2, 3, \dots, 81$  vào bảng  $9 \times 9$ . Chứng minh rằng tồn tại bảng con  $2 \times 2$  có tổng của 4 số được điền trong nó lớn hơn 137.

**Bài 9.10.** Cho  $n$  là một số nguyên dương. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương  $x$  và  $y$  sao cho:

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{4n+2}$$

**Bài 9.11.** Cho các số  $a_1, a_2, a_3, a_4$  thỏa  $\frac{-1}{2} \leq a_i \leq \frac{1}{2}$  với  $i = 1, 2, 3, 4$ . Chứng minh rằng nếu tổng của 3 số bất kì trong bốn số là một số nguyên thì  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ .

**Bài 9.12.** Giải bóng đá PTNK league gồm 18 đội tham gia. Thể thức giải đấu là đá vòng tròn một lượt, tức là mỗi vòng 18 đội sẽ chia làm 9 cặp đấu với nhau, mỗi lượt có đúng 9 trận, hai đội gặp nhau đúng một trận. Tới gần Tết âm lịch giải tạm dừng, và giải đã diễn ra đúng 8 lượt trận. Chứng minh rằng tới thời điểm này có thể tìm ra được 3 đội mà đôi một chưa đá với nhau.

**Bài 9.13.** Cho hai số nguyên dương  $m, n$ . Xét bảng ô vuông kích thước  $(2m+1) \times (2n+1)$ , ban đầu trong mỗi ô vuông  $1 \times 1$  đặt một con kiến. Biết rằng sau đó mỗi con kiến di chuyển sang một trong những ô vuông có chung cạnh với nó. Chứng minh rằng sau khi các con kiến di chuyển có một ô vuông không có con kiến nào.

**Bài 9.14.** Một tập hợp có ít nhất 3 số nguyên dương phân biệt được gọi là **tập cân** nếu có ít nhất một số lẻ và khi bỏ đi một phần tử bất kì thì các số còn lại có thể chia thành hai tập hợp mà tổng các số trong hai tập hợp đó bằng nhau.

(a) Chứng minh số phần tử của tập cân luôn là một số lẻ.

(b) Có tồn tại hay không một tập cân có 5 phần tử? Tại sao?

## §2. SUY LUẬN QUY NẠP

Phương pháp chứng minh quy nạp dựa trên tiên đề về số tự nhiên như sau:

- 1 là một số tự nhiên.
- Mỗi số tự nhiên  $n$ , có một số liền sau nó, kí hiệu  $n'$  cũng là số tự nhiên.
- Nếu hai số tự nhiên có số liền nhau bằng nhau thì bằng nhau.
- Giữa hai số tự nhiên liên tiếp không có số tự nhiên nào.
- Nếu mệnh đề  $P$  thỏa  $P(1)$  đúng và  $P(n)$  đúng suy ra  $P(n')$  đúng thì  $P(n)$  đúng với mọi  $n$ .

Từ đó ta có một số cách sau để chứng minh mệnh đề  $P(n)$  đúng với mọi số tự nhiên  $n \geq n_0$ .

**Tính chất 9.2.** (Quy nạp thường) Để chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi  $n \geq n_0$  ta có thể thực hiện qua các bước sau:

- Chứng minh  $P(n_0)$  đúng.
- Giả sử  $P(n)$  đúng. Chứng minh  $P(n+1)$  đúng.

**Tính chất 9.3.** (Quy nạp mạnh)

- Chứng minh  $P(n_0)$  đúng.
- Giả sử  $P(n_0)$  đúng với mọi  $n_0, n_0 + 1, \dots, n$ . Chứng minh  $P(n+1)$ .

**Tính chất 9.4.** (Quy nạp bước nhảy)

- Chứng minh bài toán đúng với  $n_0, n_0 + 1, n_0 + t - 1$ .
- Giả sử  $P(n)$  đúng. Chứng minh  $P(n+t)$  đúng.

**Tính chất 9.5.** (Quy nạp lùi)

- Chứng minh  $P(n)$  đúng với dãy tăng thực sự các số nguyên dương  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ .
- Chứng minh nếu  $P(n)$  đúng thì  $P(n-1)$  đúng.

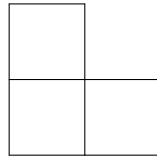
Phương pháp chứng minh quy nạp được sử dụng trong hầu hết các phần: Đại số, số học, hình học và tổ hợp. Trong phần này ta chỉ xét đến các bài toán tổ hợp.

Đối với tổ hợp, quy nạp được sử dụng trong các tình huống như chứng minh sự tồn tại, các bài toán đếm, các bài toán bất đẳng thức cực trị tổ hợp, và trong các bài toán trò chơi...

Đầu tiên là bài toán mà tôi nhớ mãi, bài toán thi vào lớp 10 Chuyên Toán PTNK năm 1999, bài toán đem lại 10 điểm tuyệt đối cho tôi và vẫn mãi là kỉ niệm đáng nhớ.

**Ví dụ 9.12.** Người ta lát nền nhà hình vuông kích thước  $n \times n$  ô bằng các viên gạch như hình vẽ dưới sao cho còn chừa lại một ô không lát.

- (a) Hãy chỉ ra một cách lát như trên với nền nhà kích thước  $4 \times 4$  và  $8 \times 8$ .
- (b) Hãy chứng minh rằng luôn tồn tại một cách lát nền nhà có kích thước  $2^k \times 2^k$  ( $k$  nguyên dương) với ô trống còn lại nằm ở vị trí  $(i, j)$  bất kì.



**Ví dụ 9.13.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n \geq 3$  luôn tồn tại  $n$  số nguyên dương phân biệt  $x_1, \dots, x_n$  thỏa

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$$

**Ví dụ 9.14.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $M$  tồn tại số tự nhiên  $n$  và cách chọn các dấu  $+$  hoặc  $-$  sao cho  $M = \pm 1^2 \pm 2^2 \dots \pm n^2$ .

**Ví dụ 9.15.**

- (a) Hãy chỉ ra cách sắp 8 số nguyên dương đầu tiên  $1, 2, \dots, 8$  thành một dãy  $a_1, a_2, \dots, a_8$  sao cho 2 số  $a_i, a_j$  bất kì ( $i < j$ ) thì mọi số trong dãy nằm giữa  $a_i$  và  $a_j$  đều khác  $\frac{a_i + a_j}{2}$ .
- (b) Chứng minh rằng với  $N$  số nguyên dương đầu tiên  $1, 2, \dots, N$  luôn tìm được cách sắp thành dãy  $a_1, a_2, \dots, a_N$  sao cho dãy thỏa mãn điều kiện như câu a).

**Ví dụ 9.16.**

- (a) Chứng minh với  $N \geq 3$ , luôn luôn có  $N$  số chính phương đôi một khác nhau sao cho tổng của chúng là một số chính phương.
- (b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $mn \geq 3$  bao giờ cũng xây được một bảng chữ nhật gồm  $m \times n$  số chính phương đôi một khác nhau cho tổng của mỗi dòng là một số chính phương và tổng của mỗi cột là một số chính phương.

**Ví dụ 9.17.**

- (a) Cho bốn số nguyên dương  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sao cho  $1 \leq a_k \leq k$  với mọi  $k = 1, 2, 3, 4$  và tổng  $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  là một số chẵn. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số dạng  $\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4$  có giá trị bằng 0.
- (b) Cho 1000 số nguyên dương  $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$  sao cho  $1 \leq a_k \leq k$  với  $k = 1, 2, \dots, 1000$  và tổng  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{1000}$  là một số chẵn.  
Hỏi trong các số có dạng  $\pm a_1 \pm a_2 \dots \pm a_{1000}$  có số nào bằng 0 hay không? Giải thích vì sao?

**Ví dụ 9.18.** (USAMO 2002) Cho tập  $S$  có 2002 phần tử, số tự nhiên  $k$  thỏa  $0 \leq k \leq 2^{2002}$  chứng minh rằng tồn tại cách tô màu các tập con của  $S$  bằng hai màu xanh và đỏ thỏa:

- (a) Có đúng  $k$  tập được tô màu đỏ.
- (b) Hợp của hai tập đỏ là một tập đỏ.
- (c) Hợp của hai tập xanh là một tập xanh.

**Ví dụ 9.19.** Trong cuộc họp có  $2n$  ( $n \geq 2$ ) người, một số người bắt tay nhau và người ta đếm được có  $n^2 + 1$  cái bắt tay. Chứng minh rằng có 3 người đôi một bắt tay nhau.

**Ví dụ 9.20.** Lúc đầu có  $n$  lít nước để vào một số lu, mỗi lu chứa đúng một số nguyên dương lít nước, ta thực hiện cách đong nước như sau: nếu số nước ở lu  $A$  nhỏ hơn hoặc bằng lu  $B$  thì ta có thể cho hết nước của  $B$  vào  $A$  một lượng bằng lượng nước lu  $A$  đang có.

- (a) Nếu có 3 lu nước chứa lần lượt 2, 3, 8 thì có thể đưa về hai lu không? Tại sao?
- (b) Nếu  $n = 1024$ . Chứng minh rằng ta có thể đưa số nước hết về một lu. Giả sử lu này là lu lớn, chứa đủ số nước đã có.

**Ví dụ 9.21.** Trong một bảng  $m \times n$  các số thực. Trong mỗi cột người ta đánh dấu ít nhất  $p$  số lớn nhất, trong mỗi dòng người ta đánh dấu ít nhất  $q$  số lớn nhất. Chứng minh rằng có ít nhất  $pq$  ô đánh dấu 2 lần.

**Ví dụ 9.22.** (Russia 1993) Có  $n$  số tự nhiên từ 1 đến  $n$  được viết thành một dòng theo một thứ tự nào đó. Mỗi bước thực hiện biến đổi như sau: nếu số đầu tiên là  $k$  thì  $k$  số đầu tiên sẽ được viết theo thứ tự ngược lại. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước thì số đầu tiên của dòng là số 1.

**Ví dụ 9.23.** (Chọn đội tuyển PTNK 2014) Tìm số nguyên dương  $n$  lớn nhất thỏa mãn các điều kiện sau:

- i)  $n$  không chia hết cho 3;
- ii) Bảng vuông  $n \times n$  ô không thể được phủ kín bằng 1 quân tetramino  $1 \times 4$  và các quân trimino kích thước  $1 \times 3$ . Trong phép phủ các quân tetramino và trimino được phép quay dọc nhưng không được phép chườm lên nhau hoặc nằm ngoài ra bảng vuông.

**Ví dụ 9.24.** Chứng minh rằng số tập con của một tập hợp có  $n$  phần tử là  $2^n$ .

**Ví dụ 9.25.** An và Bình cùng chơi một trò chơi. Ban đầu trên bàn có 99 viên kẹo. Hai người thay phiên nhau bốc kẹo, mỗi lần được bốc  $k$  viên kẹo với  $k \in \{1, 2, 7\}$ . Người nào bốc được viên kẹo cuối cùng là người thắng. An đi trước, hỏi ai là người có chiến thuật thắng, người đi trước hay người đi sau?



## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 9.15.** Chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi số nguyên dương  $n$ :

(a)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b)  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

$$(c) \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$(d) 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!}$$

$$(e) \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

**Bài 9.16.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  thì:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{2n-1}$$

**Bài 9.17.** Cho  $n, k$  là các số nguyên dương và  $n \geq k$ . Đặt  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

(a) Chứng minh  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ .

(b) Chứng minh  $(x+y)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} y + \dots + C_m^{m-1} x y^{m-1} + y^m$ .

**Bài 9.18.** Chứng minh với mọi số nguyên dương  $n$  thì

$$(n+1)! = 1 + \frac{1!^1}{0!} + \frac{2!^2}{1!} + \dots + \frac{n!^2}{(n-1)!}$$

Chứng minh rằng

(a)  $2^n > n^2$  với mọi  $n \geq 5$

(b)  $n! > 3^n$  với mọi  $n > 7$ .

**Bài 9.19.** Nếu  $a_n$  là các số thực dương hoặc tất cả đều thuộc  $[-1; 0]$  thì  $\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq$

$$1 + \sum_{k=1}^n a_k.$$

**Bài 9.20.** Cho dãy số  $a_n$  thỏa  $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = n + 1 \forall n$ . Chứng minh rằng  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Bài 9.21.** Cho dãy  $a_n$  thỏa  $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 1 \forall n$ . Chứng minh rằng  $a_n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$ .

**Bài 9.22.** (Fibonacci). Cho dãy số  $f_n$  được xác định như sau  $f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \forall n > 1$ .

Chứng minh các tính chất sau:

(a)  $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$ .

- (b)  $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$ .
- (c)  $f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} - (-1)^n$ .
- (d)  $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ .
- (e)  $f_1 f_2 + f_2 f_3 + \dots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$ .
- (f)  $m|n \Rightarrow f_m|f_n$ .

**Bài 9.23.** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định:  $u_1 = 2013, u_2 = 2014, u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 2, \forall n = 2, 3, \dots$  Chứng minh rằng  $(u_1^2 + 1)(u_2^2 + 1)\dots(u_{2013}^2 + 1) - 1$  là một số chính phương.

**Bài 9.24.** Chứng minh nếu  $x + \frac{1}{x}$  là số nguyên thì  $x^n + \frac{1}{x^n}$  cũng là số nguyên với mọi số nguyên dương  $n$ .

**Bài 9.25.** Gọi  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 6x + 1 = 0$ . Đặt  $S_n = x_1^n + x_2^n$ . Chứng minh rằng  $S_n$  không chia hết cho 5 với mọi  $n$ .

**Bài 9.26.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số dương. Chứng minh rằng:

- (a)  $(n-1)(a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) + na_1 a_2 \dots a_n \geq (a_1 + \dots + a_n)(a_1^{n-1} + \dots + a_n^{n-1})$ .
- (b)  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ .

**Bài 9.27.** (USSR 1990) Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ . Xét  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Chứng minh rằng với mọi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$  thì

$$f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n) \geq 1$$

**Bài 9.28.** Chứng minh rằng

- (a)  $5^{2n} + 3n - 1$  chia hết cho 9.
- (b)  $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$  chia hết cho 17.
- (c)  $2^{3^n} + 1$  chia hết cho  $3^{n+1}$

**Bài 9.29.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên dương  $n$  thì  $(n+1)(n+2)\dots(n+n)$  chia hết cho  $2^n$ .

**Bài 9.30.** Cho  $n = 2^k$ . Chứng minh rằng trong  $2n - 1$  số tự nhiên bất kì thì luôn chọn được  $n$  số sao cho tổng của chúng chia hết cho  $n$ .

**Bài 9.31.** Chứng minh với số tự nhiên  $n$  luôn có thể phân tích thành tích các thừa số nguyên tố một cách duy nhất. Tức là nếu  $n = p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_m$  thì  $m = k$  và  $q_1, q_2, \dots, q_m$  là một hoán vị của  $p_1, p_2, \dots, p_k$ .

**Bài 9.32.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  thì phương trình  $a^2 + b^2 = c^n$  có nghiệm nguyên.

**Bài 9.33.** Đặt  $T_n = 1 + 2 + \dots + n$ . Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số tự nhiên  $n$  để  $T_n$  là số chính phương.

**Bài 9.34.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $M$  tồn tại số nguyên dương  $n$  và cách chọn các dấu  $+$  hoặc  $-$  sao cho  $M = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm n^2$ .

**Bài 9.35.** Chứng minh rằng phương trình với mọi số nguyên dương  $n \geq 3$  thì luôn tồn tại các số nguyên dương  $x_1, x_2, \dots, x_n$  phân biệt thỏa phương trình  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$ .

**Bài 9.36.** Cho  $x_1 \equiv a_1 \pmod{m}, x_2 \equiv a_2 \pmod{m}, \dots, x_n \equiv a_n \pmod{m}$ . Chứng minh rằng:

$$\prod_{i=1}^n x_i \equiv \prod_{i=1}^n a_i \pmod{m}$$

**Bài 9.37.** (IMO 2013) Cho các số nguyên dương  $n, k$ . Chứng minh rằng tồn tại  $k$  số nguyên dương  $m_1, m_2, \dots, m_k$  sao cho:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(\frac{1}{m_1} + 1\right) \left(\frac{1}{m_2} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{m_k} + 1\right)$$

**Bài 9.38.** (Định lý nhỏ Fermat) Cho  $p$  là số nguyên tố. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $a$  thì  $a^p - a$  chia hết cho  $p$ .

**Bài 9.39.** (Kvant M2277) Chứng minh rằng tổng

$$S = 1^n + 2^n + \dots + (2^k - 1)^n$$

chia hết cho  $2^{k-1}$  với mọi số nguyên dương  $k, n$ .

**Bài 9.40.**

- (a) Hãy chỉ ra cách sắp 8 số nguyên dương đầu tiên  $1, 2, \dots, 8$  thành một dãy  $a_1, a_2, \dots, a_8$  sao cho 2 số  $a_i, a_j$  bất kì ( $i < j$ ) thì mọi số trong dãy nằm giữa  $a_i$  và  $a_j$  đều khác  $\frac{a_i + a_j}{2}$ .

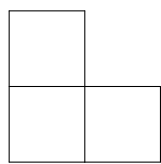
- (b) Chứng minh rằng với  $N$  số nguyên dương đầu tiên  $1, 2, \dots, N$  luôn tìm được cách sắp thành dãy  $a_1, a_2, \dots, a_N$  sao cho dãy thỏa mãn điều kiện như câu a).

**Bài 9.41.**

- (a) Chứng minh với  $N \geq 3$ , luôn luôn có  $N$  số chính phương đôi một khác nhau sao cho tổng của chúng là một số chính phương.
- (b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $mn \geq 3$  bao giờ cũng xây được một bảng chữ nhật gồm  $m \times n$  số chính phương đôi một khác nhau cho tổng của mỗi dòng là một số chính phương và tổng của mỗi cột là một số chính phương.

**Bài 9.42.** Người ta lát nền nhà hình vuông kích thước  $n \times n$  ô bằng các viên gạch như hình vẽ dưới sao cho còn thừa lại một ô không lát.

- (a) Hãy chỉ ra một cách lát như trên với nền nhà kích thước  $4 \times 4$  và  $8 \times 8$ .
- (b) Hãy chứng minh rằng luôn tồn tại một cách lát nền nhà có kích thước  $2^k \times 2^k$  ( $k$  nguyên dương) với ô trống còn lại nằm ở vị trí  $(i, j)$  bất kì.



**Bài 9.43.**

- (a) Cho bốn số nguyên dương  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sao cho  $1 \leq a_k \leq k$  với mọi  $k = 1, 2, 3, 4$  và tổng  $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  là một số chẵn. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số dạng  $\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4$  có giá trị bằng 0.
- (b) Cho 1000 số nguyên dương  $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$  sao cho  $1 \leq a_k \leq k$  với  $k = 1, 2, \dots, 1000$  và tổng  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{1000}$  là một số chẵn. Hỏi trong các số có dạng  $\pm a_1 \pm a_2 \dots \pm a_{1000}$  có số nào bằng 0 hay không? Giải thích vì sao?

**Bài 9.44.** An và Bình cùng chơi một trò chơi. Ban đầu trên bàn có 99 viên kẹo. Hai người thay phiên nhau bốc kẹo, mỗi lần được bốc  $k$  viên kẹo với  $k \in \{1, 4, 7\}$ . Người nào bốc được viên kẹo cuối cùng là người thắng. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng, người đi trước hay người đi sau?

**Bài 9.45.** Có 64 viên bi được bỏ vào một vài hộp. Trong mỗi bước ta thực hiện như sau: chọn ra hai hộp  $A$  có  $p$  viên bi và hộp  $B$  có  $q$  viên bi,  $p \geq q$  và lấy  $q$  viên bi từ hộp  $A$  bỏ sang hộp  $B$ . Chứng minh rằng có thể bỏ tất cả các viên bi vào một hộp.

**Bài 9.46.** Cho  $2n$  điểm được nối với nhau bởi  $n^2 + 1$  đoạn thẳng. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm tạo thành một tam giác.

**Bài 9.47.** Tìm tất cả các số tự nhiên  $N$  để hình vuông  $N \times N$  có thể phủ được bằng các hình vuông  $5 \times 5$  và các hình chữ nhật  $1 \times 3$ .

**Bài 9.48.** Tìm số nguyên dương  $n$  lớn nhất thỏa mãn các điều kiện sau:

- $n$  không chia hết cho 3;
- Bảng vuông  $n \times n$  ô không thể được phủ kín bằng 1 quân tetramino  $1 \times 4$  và các quân trimino kích thước  $1 \times 3$ . Trong phép phủ các quân tetramino và trimino được phép quay dọc nhưng không được phép chừa lên nhau hoặc nằm ngoài ra bảng vuông.

**Bài 9.49.** (USAMO 2002) Cho tập  $S$  có 2002 phần tử, số tự nhiên  $k$  thỏa  $0 \leq k \leq 2002^{2002}$  chứng minh rằng tồn tại cách tô màu các tập con của  $S$  bằng hai màu xanh và đỏ thỏa:

- Có đúng  $k$  tập được tô màu đỏ.
- Hợp của hai tập đỏ là một tập đỏ.
- Hợp của hai tập xanh là một tập xanh.

### §3. NGUYÊN LÝ CỰC HẠN

**Tính chất 9.6.** Các tính chất sau xem như là tiên đề.

- Một tập con hữu hạn khác rỗng của tập số thực luôn tồn tại phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.
- Mọi tập con khác rỗng của  $\mathbb{R}$  bị chặn trên đều tồn tại chặn trên nhỏ nhất.
- Mọi tập con khác rỗng của  $\mathbb{R}$  bị chặn dưới đều tồn tại chặn dưới lớn nhất.

Trong nhiều bài toán, việc chọn đối tượng cực hạn (lớn nhất hoặc nhỏ nhất) giúp ta thuận lợi trong suy luận.

Cũng như quy nạp, cực hạn cũng có nhiều ứng dụng rộng rãi trong các việc giải quyết các bài toán tổ hợp.

**Ví dụ 9.26.** Tìm  $n$  lớn nhất sao cho tồn tại  $n$  điểm mà 3 điểm bất kì đều tạo thành tam giác vuông.

**Ví dụ 9.27.** Trên một mặt bàn đặt một số các đồng xu với kích cỡ không giống nhau đôi một (các đồng xu không được đè lên nhau và phải nằm sấp hoặc ngửa trên bàn). Chứng minh rằng dù ta đặt như thế nào đi nữa, cũng luôn tồn tại một đồng xu chỉ tiếp xúc được với nhiều nhất 5 đồng xu khác.

**Ví dụ 9.28.** Cho  $n$  điểm trong mặt phẳng biết rằng cứ 3 điểm bất kì tạo thành một tam giác có diện tích không lớn hơn 1. Chứng minh rằng  $n$  điểm thuộc một hình tam giác có diện tích không lớn hơn 4.

**Ví dụ 9.29.** (Sylvester) Trong mặt phẳng cho  $n$  điểm phân biệt, sao cho mỗi đường thẳng đi qua hai điểm thì đi qua ít nhất một điểm khác. Chứng minh rằng  $n$  điểm này cùng thuộc một đường thẳng.

**Ví dụ 9.30.** Cho 3 trường, mỗi trường có  $n$  học sinh, biết rằng cứ mỗi học sinh thì quen ít nhất  $n + 1$  học sinh của hai trường khác. Chứng minh rằng có thể chọn được từ mỗi trường một bạn sao cho 3 bạn này đôi một quen nhau.

**Ví dụ 9.31.** Một bữa tiệc có 10 học sinh tham gia, biết rằng mỗi học sinh quen với ít nhất là 5 người. Chứng minh rằng có thể sắp xếp 10 học sinh ngồi vào một bàn tròn sao cho hai người kế nhau thì quen nhau.

**Ví dụ 9.32.** Một bảng  $2n \times 2n$  ô, người ta đánh dấu bất kì  $3n$  ô trong bảng. Chứng minh rằng tồn tại  $n$  dòng và  $n$  cột sao cho  $3n$  ô được đánh dấu thuộc  $n$  dòng và  $n$  cột này.

**Ví dụ 9.33.** Có  $(2n + 1)$  người đứng trên cùng một mặt phẳng, khoảng cách giữa họ không giống nhau. Sau đó mỗi người bắn người gần họ nhất. Chứng minh rằng:

- (a) Có ít nhất một người còn sống.
- (b) Không ai bị bắn quá năm viên đạn.
- (c) Các đường đạn không cắt nhau.
- (d) Các đoạn đường đạn bay không tạo thành một đa giác khép kín.

**Ví dụ 9.34.** Một hành tinh có 20 quốc gia. Trong ba nước bất kỳ, luôn có hai nước không thiết lập quan hệ ngoại giao với nhau. Chứng minh rằng, hành tinh này có tối đa 200 đại sứ quán.

**Ví dụ 9.35.** Với  $2n + 3$  điểm trong mặt phẳng, ba điểm bất kỳ không thẳng hàng và bốn điểm bất kỳ không cùng nằm trên một đường tròn. Chứng minh rằng ta có thể chọn ba điểm và vẽ được một đường tròn qua ba điểm đó. Trong  $2n$  còn lại, có  $n$  điểm nằm trong đường tròn và  $n$  điểm nằm ngoài đường tròn.

**Ví dụ 9.36.** Điền các số từ 1 đến  $n^2$  vào bảng vuông  $n \times n$ . Chứng minh rằng có hai ô kề nhau (kề cạnh hoặc kề đỉnh) mà hiệu của chúng không nhỏ hơn  $n + 1$ .

**Ví dụ 9.37.** Có  $N(N \geq 3)$  chơi tennis vòng tròn một lượt. Cuối giải người ta thấy rằng không có ai thắng tất cả các trận thi đấu. Chứng minh rằng có thể tìm được 3 người A, B, C sao cho A thắng B, B thắng C và C thắng A.

**Ví dụ 9.38.** Cho  $a, b$  là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Gọi  $d = (a, b)$ . Khi đó tồn tại các số nguyên  $x, y$  sao cho

$$xa + yb = d$$

## §4. BẤT BIẾN VÀ ĐƠN BIẾN

**Bài 9.50.** Trên bảng có 2025 số 0 và 2026 số 1. Ta thực hiện các phép biến đổi sau: xóa hai số bất kì trên bảng, nếu chúng bằng nhau thì viết số 0 lên bảng, nếu khác nhau thì viết số 1 lên bảng. Hỏi sau cùng, số trên bảng còn lại là số nào?

**Bài 9.51.** Trên bàn có 25 đồng xu đang ở mặt sấp, mỗi lần thực hiện thao tác sau: chọn 4 đồng xu và lật lại. Hỏi sau một số lần thực hiện ta có thể đưa các đồng xu về mặt ngửa hết được không? Tại sao?

**Bài 9.52.** Viết 6 số 1, 0, 1, 0, 0, 0 theo thứ tự chiều kim đồng hồ lên một vòng tròn. Mỗi bước thực hiện ta có thể tăng hai số lân cận lên 1 đơn vị. Có cách nào để 6 số trên vòng tròn bằng nhau không?

**Bài 9.53.** Các số  $1, 2, 3, \dots, 2025$  được viết lên bảng. Cho phép xóa đi hai số và thay bởi hiệu của chúng. Liệu có thể thu được một bảng toàn số 0 hay không?

**Bài 9.54.** Trên bảng viết các số  $1, 2, \dots, 1000$ . Ở mỗi bước cho phép thay một số bằng tổng các chữ số của nó. Quá trình dừng lại khi có toàn các số có một chữ số. Hỏi số số 1 còn lại trên bảng nhiều hơn hay số số 2 còn lại trên bảng nhiều hơn?

**Bài 9.55.** Cho  $n$  là số nguyên dương lẻ. Viết các số  $1, 2, \dots, 2n$  lên bảng đen. Sau đó ta xóa hai số  $a, b$  bất kỳ và viết lên bảng số  $|a - b|$ . Thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng chỉ còn đúng một số. Chứng minh rằng số còn lại trên bảng là số lẻ.

**Bài 9.56.** Một bàn cờ vua, có một có mã đang đứng vị trí ô dưới trái. Hỏi con mã có thể đi hết các ô trong bàn cờ và kết thúc ở vị trí ô góc phải trên được không? Tại sao?

**Bài 9.57.** Hình vuông  $8 \times 8$  bỏ đi hai ô ở góc đối nhau. Có thể phủ phần còn lại bởi 31 quân domino  $1 \times 2$  không? Nếu bỏ hai ô bất kì thì sao?

**Bài 9.58.** Các số  $1, 2, 3, \dots, 20$  được viết lên bảng. Mỗi phép biến đổi, ta xóa hai số  $a, b$  và thêm vào số  $a + b - 1$ . Số nào sẽ còn lại trên bảng sau 19 bước?

**Bài 9.59.** Một bảng vuông  $8 \times 8$  có 1 ô màu đen và các ô còn lại màu trắng. Liệu có thể làm cho cả bảng màu trắng bằng cách tô lại các hàng và cột không? Ở đây, tô lại một hàng hay một cột được hiểu là phép đổi màu tất cả các ô trên hàng hoặc cột đó.

**Bài 9.60.** Có 46 con tắc kè xanh, 30 con tắc kè đỏ và 50 con tắc kè vàng trên một hòn đảo. Khi hai con tắc kè khác màu gặp nhau, chúng đổi sang màu còn lại. Liệu có thể đến một lúc nào đó tất cả các con tắc kè có cùng màu hay không?

**Bài 9.61.** Trên bảng có hai số 2 và 3. Thực hiện việc ghi số theo quy tắc sau: Nếu trên bảng có hai số  $a, b$  thì được phép ghi thêm số  $c = a + b + ab$ . Hỏi bằng cách đó có thể ghi được các số 2022 và 2312 hay không?

**Bài 9.62.** Các số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có giá trị là 1 hoặc  $-1$ . Cho:

$$S = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + \dots + a_n a_1 a_2 a_3 = 0.$$

Chứng minh rằng  $4 \mid n$ .

**Nhận xét:** Đây là một bài toán lý thuyết số, nhưng nó cũng có thể được giải bằng phương pháp bất biến. Tính bất biến của bài toán là khi đổi dấu  $a_i$  bất kỳ thì tổng  $S$  vẫn luôn chia hết cho 4.

**Bài 9.63.** Trên bảng viết các số 6, 7, 10, 12, 20. Mỗi bước cho phép chọn hai số  $a, b$  và thay bởi  $a + b, ab$ . Hỏi có thu được 30, 36, 54, 210, 240 hay không?

**Bài 9.64.** Chứng minh rằng với mọi  $n$  thì có thể phủ hình vuông kích thước  $2^n \times 2^n$  bằng các hình tromino sau khi bỏ đi một ô bất kì.

**Bài 9.65.** Một hình vuông  $8 \times 8$  bỏ đi 2 ô ở hai góc đối diện có thể phủ bằng các hình domino  $1 \times 2$  được không? Tại sao?

**Bài 9.66.** Có thể phủ bàn cờ  $8 \times 8$  bằng 15 hình T-tetromino và 1 hình O-tetromino hay không? Tại sao?

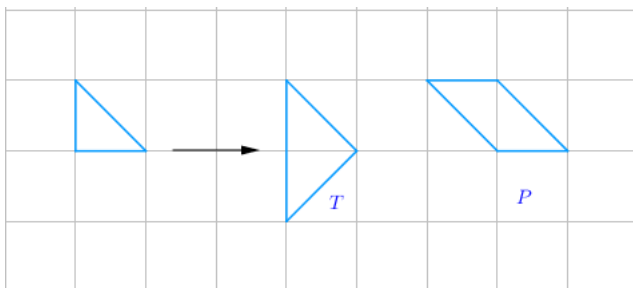
**Bài 9.67.** Chứng minh rằng 1 hình vuông  $10 \times 10$  không thể phủ bởi 25 I-tetromino. Với  $n$  nào thì bảng vuông  $n \times n$  có thể phủ được bởi các hình I-tetromino? Tại sao?

**Bài 9.68.** Tìm  $n$  nhỏ nhất để hình vuông  $n \times n$  có thể phủ được các hình L-tetromino.

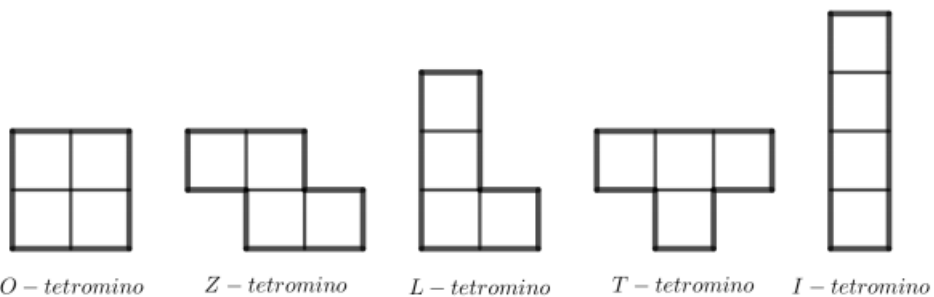
**Bài 9.69.** Cho bảng vuông  $n \times n$  bỏ đi bốn ô ở góc. Hỏi với giá trị nào của  $n$  thì phủ được bởi các hình L-tetromino.

**Bài 9.70.** Một bảng vuông  $5 \times 5$  được phủ bằng 8 hình L-tetromino. Xác định vị trí ô vuông của bảng mà không bị phủ?

**Bài 9.71.** Hai tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 1 ghép lại thành một tam giác vuông cân cạnh  $\sqrt{2}$  thì ta gọi là dạng hình T, ghép lại thành hình bình hành thì ta gọi hình P.



- (a) Xét hình vuông  $4 \times 4$ , hãy chỉ ra một cách phủ hình vuông này bằng các hình dạng T và P.
- (b) Tìm tất cả các số nguyên dương  $m, n \geq 2$  để hình chữ nhật kích thước  $m \times n$  có thể phủ được bằng các hình dạng T và P.



## §5. ÔN TẬP

**Bài 9.72.** Cho tập  $A$  có 7 phần tử, giả sử mỗi tập con có 3 phần tử của  $A$  được tô một màu, sao cho hai tập rời nhau (giao nhau bằng rỗng) thì có màu khác nhau. Tìm số màu ít nhất để tô được thỏa điều kiện.

**Bài 9.73.** Số tự nhiên  $n \geq 2$  được gọi là số thân thiện nếu tồn tại  $n$  tập con  $A_1, A_2, \dots, A_n$  của  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  sao cho:

- $i \notin A_i$  với mọi  $i = \overline{1, n}$ .
- $i \in A_j$  nếu và chỉ nếu  $j \notin A_i$  với  $i, j \in X$ .
- $A_i \cup A_j$  khác rỗng với mọi  $i, j \in X$ .

(a) Chứng minh 7 là số thân thiện.

(b) Chứng minh  $n$  là thân thiện khi và chỉ khi  $n \geq 7$ .

**Bài 9.74.** Có 5 số thực có giá trị tuyệt đối không lớn hơn 1 và có tổng bằng 1, được viết trên một đường tròn, mỗi số viết một lần. Chứng minh rằng có thể có chọn được 3 số liên tiếp  $a, b, c$  sao cho  $a + b, b + c, a + b + c$  không âm.

**Bài 9.75.**

(a) Hãy chỉ ra cách sắp 8 số nguyên dương đầu tiên  $1, 2, \dots, 8$  thành một dãy  $a_1, a_2, \dots, a_8$  sao cho 2 số  $a_i, a_j$  bất kì ( $i < j$ ) thì mọi số trong dãy nằm giữa  $a_i$  và  $a_j$  đều khác  $\frac{a_i + a_j}{2}$ .

(b) Chứng minh rằng với  $N$  số nguyên dương đầu tiên  $1, 2, \dots, N$  luôn tìm được cách sắp thành dãy  $a_1, a_2, \dots, a_N$  sao cho dãy thỏa mãn điều kiện như câu a).

**Bài 9.76.** Cho tập  $A$  chứa 2019 số nguyên dương bất kì. Chứng minh rằng ta có thể chọn được hai số trong tập  $A$  sao cho tổng của hai số này không là ước của tổng 2017 số còn lại.

**Bài 9.77.** Có  $n$  số tự nhiên từ 1 đến  $n$  được viết thành một dòng theo một thứ tự nào đó. Mỗi bước thực hiện biến đổi như sau: nếu số đầu tiên là  $k$  thì  $k$  số đầu tiên sẽ được viết theo thứ tự ngược lại. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước thì số đầu tiên của dòng là số 1.

**Bài 9.78.** Có  $N$  ( $N \geq 3$ ) chơi tennis vòng tròn một lượt. Cuối giải người ta thấy rằng không có ai thắng tất cả các trận thi đấu. Chứng minh rằng có thể tìm được 3 người  $A, B, C$  sao cho  $A$  thắng  $B$ ,  $B$  thắng  $C$  và  $C$  thắng  $A$ .