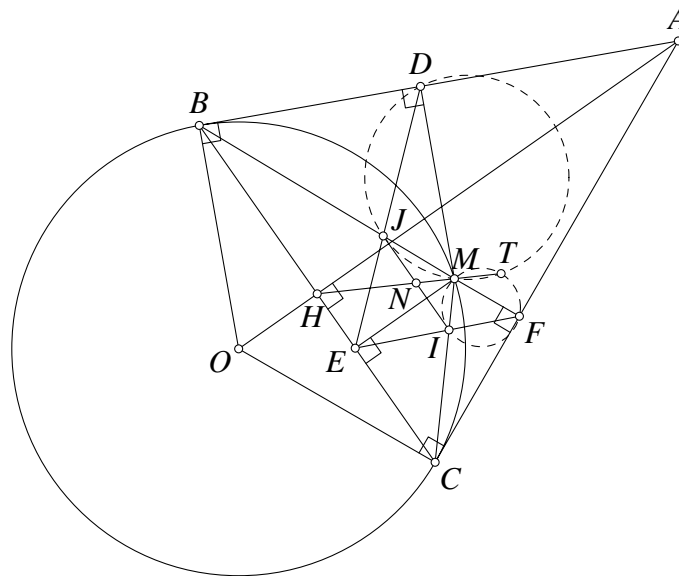


Ôn tập hình học

Bài 1. Từ điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ các tiếp tuyến AB và AC (với B, C là các tiếp điểm). M là điểm di động trên cung nhỏ BC . Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc từ M đến AB, BC, AC . Gọi I là giao điểm của MC và EF , J là giao điểm của MB và DE .

- Chứng minh tứ giác $BDME, CEMF$ nội tiếp.
- Chứng minh $IJ \parallel BC$.
- Chứng minh IJ là tiếp tuyến chung của (DJM) và (FIM) .
- Gọi T là giao điểm thứ hai của (DJM) và (FIM) ($T \neq M$). Chứng minh rằng MT luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên cung nhỏ BC .



Lời giải.

- Ta có: $\widehat{BDM} = \widehat{MEB} = \widehat{MEC} = \widehat{MFC} = 90^\circ$ nên các tứ giác $BDME, CEMF$ nội tiếp.
- Lại có: $\widehat{MBC} = \widehat{MCF} = \widehat{MEI}, \widehat{MCB} = \widehat{MBD} = \widehat{MEJ}$
Suy ra: $\widehat{MCB} + \widehat{MBC} = \widehat{MEJ} + \widehat{MEI} = \widehat{IEJ}$.
Nên: $180^\circ = \widehat{BMC} + \widehat{MBC} + \widehat{MCB} = \widehat{IMJ} + \widehat{IEJ}$ hay tứ giác $MIEJ$ nội tiếp.
Suy ra: $\widehat{MBC} = \widehat{MJI} (= \widehat{MEI})$ ở vị trí đồng vị nên $IJ \parallel BC$.
- Từ cmt, ta có: $\widehat{MDJ} = \widehat{MJI}$ nên theo định lí đảo tiếp tuyến và dây cung ta suy ra JI là tiếp tuyến của (DJM) .
Tương tự, ta có: $\widehat{MFI} = \widehat{MIJ}$ nên theo định lí đảo tiếp tuyến và dây cung ta suy ra IJ là tiếp tuyến của (FIM) .
Vì vậy IJ là tiếp tuyến chung của (DJM) và (FIM) .
- Gọi giao điểm của OA và BC là H , ta có H là trung điểm của BC .
Gọi giao điểm của MT và IJ là N .

Theo cmt, NJ là tiếp tuyến của (DJM) nên $NJ^2 = NM \cdot NT$.

NI là tiếp tuyến của (FIM) nên $NI^2 = NM \cdot NT$

Từ đó suy ra $NI = NJ$ hay MT đi qua trung điểm của IJ .

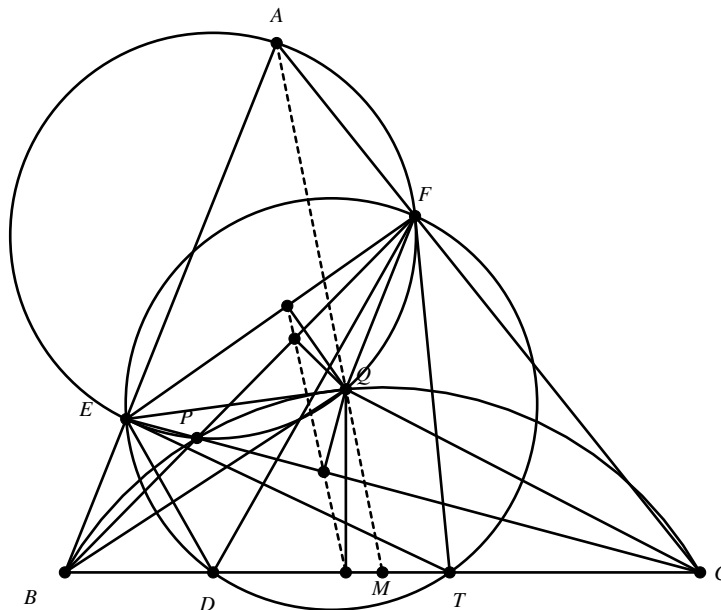
Kết hợp với $IJ \parallel BC, J \in MB, I \in MC$ ta có MT cũng sẽ đi qua trung điểm H của BC hay T, M, N, H thẳng hàng.

Vậy MT luôn đi qua trung điểm H của BC cố định.

Bài 2. Cho tam giác ABC nhọn. Trên các cạnh BC, AB, AC lấy các điểm D, E, F sao cho $\angle BDE = \angle CDF = \angle BAC$. BF và CE cắt nhau tại P . Gọi ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

- Chứng minh $AB \cdot BE + AC \cdot CF = BC^2$ và tứ giác $AEPF$ nội tiếp.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt BC tại T khác D . Chứng minh TE, TF là tiếp tuyến của ω .
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPC cắt ω tại Q . Chứng minh AQ đi qua trung điểm của BC .
- Chứng minh hình chiếu vuông góc của Q trên các đường thẳng BC, EF, BF, CE thẳng hàng.

Lời giải.



- Ta có $\triangle BDE \sim \triangle BAC$, suy ra $BE \cdot BA = BD \cdot BC$.

Tương tự thì $CF \cdot CA = CD \cdot CB$.

Do đó $BE \cdot BA + CF \cdot CA = BC^2$.

Các tứ giác $ABDF, ACDE$ nội tiếp nên $\angle AEP = \angle ADC, \angle AFP = \angle ADB$, suy ra $\angle AEP + \angle AFP = \angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$, nên tứ giác $AEPF$ nội tiếp.

- Ta có $\angle EFT = \angle BDE = \angle EAF$, do đó TF là tiếp tuyến của (AEF) . Tương tự thì TE cũng là tiếp tuyến.

- Ta có $\angle MBQ = \angle CPQ = \angle BAM$, suy ra $\triangle MBQ \sim \triangle MAB$ nên $MQ \cdot MA = MB^2$.

Chứng minh tương tự thì $MA \cdot MQ = MC^2$.

Do đó M là trung điểm BC .

d) Gọi H, I, K là hình chiếu của Q trên BC, CE, BF .

Ta có $\angle QHK = \angle QCK, \angle QHI = \angle QBI$.

Mà $\angle QCK = \angle QBI$ nên $\angle QHK = \angle QHI$, do đó H, K, I thẳng hàng.

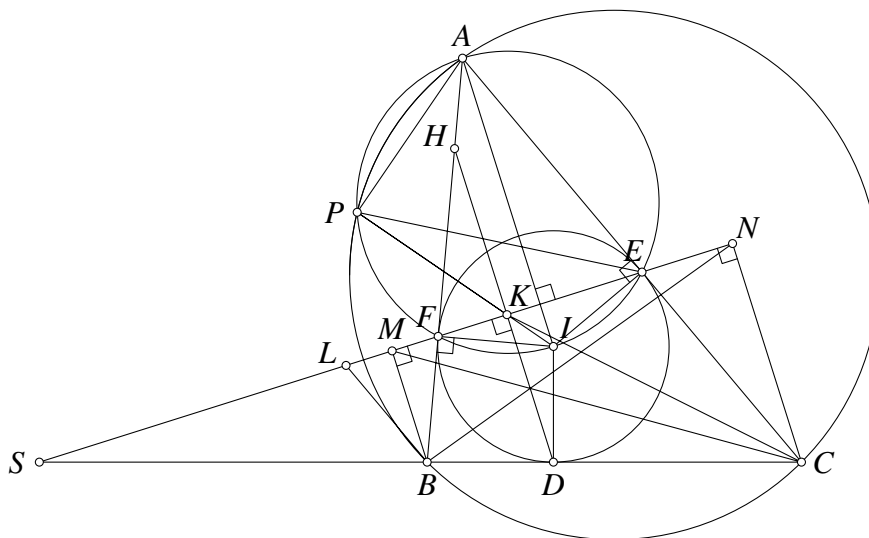
Bài 3. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$), đường tròn tâm (I) nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F .

a) Cho EF kéo dài cắt BC tại S . Chứng minh $\frac{SB}{SC} = \frac{DB}{DC}$.

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc với D trên EF . Chứng minh $\widehat{BKD} = \widehat{CKD}$

c) Đường tròn ngoại tiếp (ABC) và (AEF) cắt nhau tại P . Chứng minh P, K, I thẳng hàng.

d) DK cắt AB tại H . Tính \widehat{FPH} .



Lời giải.

a) Gọi giao điểm của EF và BC là S . Qua B dựng đường thẳng song song với AC , cắt EF tại L .

Vì $\triangle AEF$ cân tại A và $\widehat{AFE} = \widehat{LFB}$ (đối đỉnh); $\widehat{FLB} = \widehat{AEF}$ (so le trong).

Nên suy ra $\triangle BLF$ cân tại $B \Rightarrow BL = BF$.

Xét $\triangle SEC$ có $BL \parallel EC$ nên $\frac{SB}{SC} = \frac{BL}{EC} = \frac{BF}{EC} = \frac{BD}{CD}$.

Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc của B và C đến $EF \Rightarrow \frac{SB}{SC} = \frac{MB}{NC}$.

Kết hợp với hình thang vuông $BMNC$ có $MB \parallel DK \parallel NC$, ta có: $\frac{BD}{CD} = \frac{MK}{NK}$.

Vậy $\frac{MK}{NK} = \frac{MB}{NC} \Rightarrow \triangle MKB \sim \triangle NKC (c \cdot g \cdot c) \Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{NKC}$
 $\Rightarrow \widehat{BKD} = \widehat{CKD}$.

b) Gọi K' là giao điểm của PI và EF .

$$\text{Ta có } \widehat{PFA} = \widehat{PEA} \Rightarrow \widehat{PFB} = \widehat{PEC} \Rightarrow \triangle PFB \sim \triangle PEC (g \cdot g) \Rightarrow \frac{PF}{PE} = \frac{BF}{CE}.$$

$$\text{Mặt khác, } PK' \text{ là tia phân giác của } \widehat{FPE} \text{ nên } \frac{PF}{PE} = \frac{FK'}{EK'}.$$

$$\text{Vì vậy } \frac{FK'}{EK'} = \frac{BF}{CE} \quad (1).$$

$$\text{Chúng minh được } \widehat{FKB} = \widehat{EKC} \Rightarrow \triangle BFK \sim \triangle CEK (g \cdot g) \Rightarrow \frac{FK}{EK} = \frac{BF}{CE} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra } \frac{FK'}{EK'} = \frac{FK}{EK} \text{ hay } K' \equiv K \text{ nên } P, K, I \text{ thẳng hàng.}$$

c) Ta có $DH \parallel AI (\perp EF)$ nên $\widehat{FHK} = \widehat{FAI} = \widehat{FPK}$.

$$\text{Vậy tứ giác } KPHK \text{ nội tiếp } \Rightarrow \widehat{FPH} = \widehat{FKH} = 90^\circ.$$

Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và $\angle ABC > 90^\circ$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F . IA cắt EF tại K và EF cắt BC tại P . AD cắt (I) tại T khác D .

a) Chứng minh $IKTD$ nội tiếp và PT là tiếp tuyến của (I) .

b) EF cắt BI, CI tại L, J . Chứng minh tứ giác $BJLC$ nội tiếp.

c) ID cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BJLC$ tại Q . Chứng minh PQ là tiếp tuyến của đường tròn đó.

d) IP cắt AD tại M là trung trực BC tại N . Chứng minh tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

Lời giải.

a) Ta có $IA \perp EF$ tại K . Khi đó $AK \cdot AI = AE^2 = AT \cdot AD$, suy ra $IKTD$ nội tiếp. Hơn nữa có $\angle IKP = \angle IDP = 90^\circ$ nên I, K, T, P, D cùng thuộc đường tròn đường kính IP , dẫn tới $\angle ITP = 90^\circ$. Suy ra PT là tiếp tuyến.

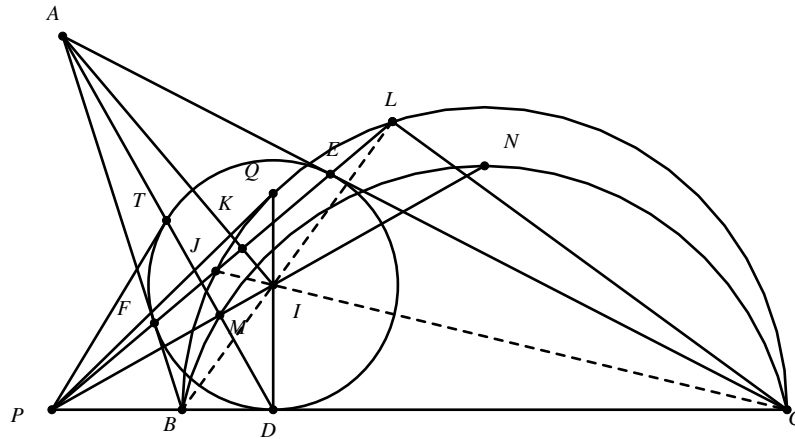
b) Ta có $\angle LEC = \angle AEF = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ và $\angle CIL = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ Do đó $\angle CEL = \angle CIL$ nên tứ giác $CIEL$ nội tiếp dẫn tới $\angle ILC = \angle IEC = 90^\circ$ CMTT ta có $\angle IJB = 90^\circ$. Do đó 4 điểm B, J, L, C cùng thuộc đường tròn đường kính BC .

c) Áp dụng menelaus cho tam giác ABC ứng với đường thẳng EF ta có $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$ suy ra $\frac{PB}{PC} = \frac{FB}{CE} = \frac{BD}{CD}$

Gọi O là trung điểm BC thì O là tâm đường tròn đường kính BC Ta cần chứng minh $\angle OQP = 90^\circ$.

$$\text{Hay là } OD \cdot OP = OQ^2 = OB^2. PB \cdot CD = BD \cdot PC \Leftrightarrow (OP - OB)(OD + OB) = (OB - OD)(OP + OB) \\ OP \cdot OD - OB \cdot OD - OB^2 + OB \cdot OP = OB \cdot OP - OD \cdot OP - OD \cdot OB + OB^2 \quad OB^2 = OP \cdot OD \text{ Từ đó} \\ \triangle ODQ \sim \triangle OQP \text{ suy ra } \angle OQP = \angle ODQ = 90^\circ.$$

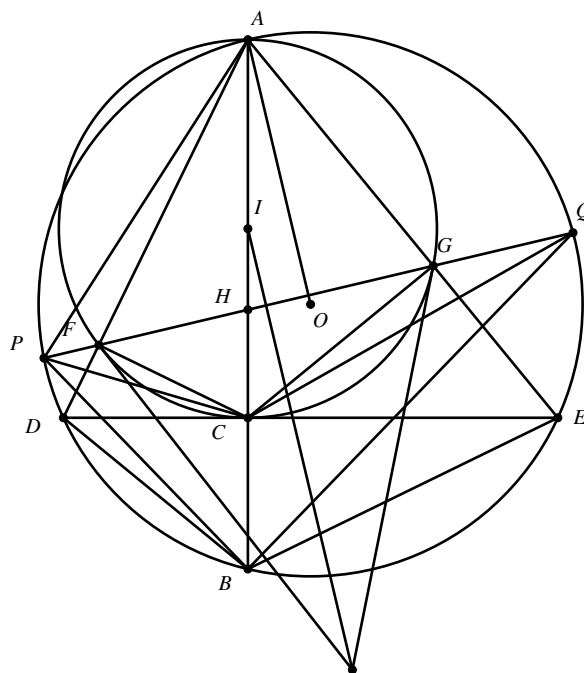
d) Ta xét tam giác BIC có J, L, D là chân các đường cao, O là trung điểm BC nên chứng minh được (Phải chứng minh) $ODJL$ nội tiếp Khi đó $PJ \cdot PL = PD \cdot PO$ mà $ODMN, BJLC$ nội tiếp nên $\angle PJ \cdot PL = PB \cdot PC, PM \cdot PN = PD \cdot PO$ Từ đó ta có $\angle PM \cdot PN = PB \cdot PC$, dẫn tới $BMNC$ nội tiếp.



Bài 5. Cho đoạn thẳng AB và điểm C thuộc đoạn thẳng AB , trong đó $AC < BC$. Đường tròn tâm O thay đổi qua A, B cắt đường thẳng qua C vuông góc AB tại D, E . Gọi F, G lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên AD, AE . FG cắt AB tại H .

- Chứng minh các tứ giác $DFHB, BEGH$ nội tiếp và H là điểm cố định.
- FG cắt (O) tại P, Q . Chứng minh rằng C là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BPQ .
- Tiếp tuyến tại F, G của đường tròn ngoại tiếp tam giác AFG cắt nhau tại K . Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định.
- KC cắt FG tại S, IK cắt FG tại T . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CST thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải.

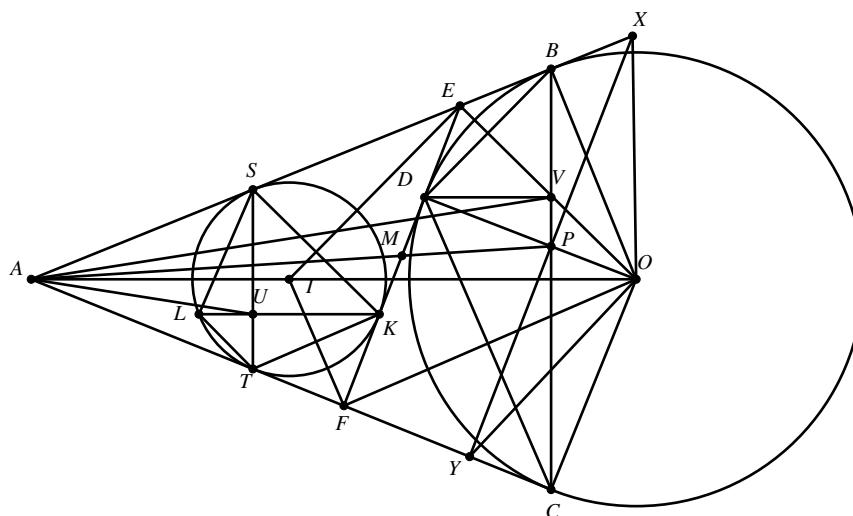


- a) Ta có các tứ giác $ADBE, AFCE$ nội tiếp và $DFGE$ nội tiếp. Suy ra $\angle EFG = \angle AED = \angle ABD$ suy ra $DFHB$ nội tiếp CMTT thì $BEGH$ nội tiếp. Khi đó $AH \cdot AB = AD \cdot AF = AC^2$, mà A, B, C cố định dẫn tới H cố định.
- b) Ta chứng minh được $OA \perp FG$ suy ra OA là trung trực của PQ nên $AP = AQ$ Suy ra BC là phân giác của $\angle PBQ$ (1) Và $\angle APQ = \angle ABQ = \angle AQP = \angle ADP$ suy ra $\triangle APF \sim \triangle ADP$, dẫn tới $AP^2 = AD \cdot AF = AC^2$ suy ra $AC = AP$, tam giác ACP cân tại A . Khi đó $\angle APC = \angle ACP$ và $\angle APQ = \angle ABP$ nên $\angle CPQ = \angle CPB$ do đó PC là phân giác $\angle BPQ$ và C là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BPQ .
- c) Gọi T là giao điểm của IK và FG , ta có $IK \perp FG$ tại T . Khi đó ta có $IH \cdot IN = IT \cdot IK = IG^2 = IC^2$ Mà I, C, H cố định nên N cố định. Từ đó ta có K thuộc đường thẳng qua N vuông góc AB cố định.
- d) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CTS Khi đó $\angle JCT = 90^\circ - \angle CST = \angle SKT$. (1) Mặt khác ta có $IT \cdot IK = IC^2$, dẫn tới tam giác ICT và IKC đồng dạng nên $\angle ICT = \angle IKC$ (2) Từ (1) và (2) thì có $\angle JCT = \angle ICT$ nên $J \in IC$ hay $J \in AB$ cố định.

Bài 6. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) với B, C là các tiếp điểm. D là một điểm trên cung nhỏ BC của (O) , tiếp tuyến tại D của (O) cắt AB, AC lần lượt tại E, F . Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác AEF tiếp xúc với AE, AF, EF lần lượt tại S, T, K .

- a) Chứng minh I thuộc OA và tứ giác $OEIF$ nội tiếp.
- b) Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $OEIF$ nhỏ nhất khi và chỉ khi bán kính đường tròn I lớn nhất.
- c) BC cắt OD tại P . Chứng minh rằng AP đi qua trung điểm của EF .
- d) Vẽ $KU \perp TS$ tại U và $DV \perp BC$ tại V . Chứng minh $\angle CAU = \angle BAV$ và $KU = DV$.

Lời giải.



- a) Ta có AI là phân giác $\angle EAF$ và AO cũng là phân giác $\angle EAF$ nên A, I, O thẳng hàng.

Hơn nữa $\angle OEI = \angle OFI = 90^\circ$ nên tứ giác $OEIF$ nội tiếp.

b) Gọi r là bán kính của (I) và R là bán kính của (O) .

Ta có $OI = AO - AI$, suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEIF$ nhỏ nhất khi và chỉ khi OI nhỏ nhất khi và chỉ khi AI lớn nhất, mà $AI = \frac{r}{\sin OAC}$, $\angle OAC$ không đổi nên AI lớn nhất khi và chỉ khi r lớn nhất.

c) Đường thẳng qua P song song EF cắt AB, AC tại X, Y . Ta có các tứ giác $OXBP, OCYP$ nội tiếp, suy ra $\angle OXP = \angle OBP = \angle OCP = \angle OYP$, do đó tam giác OXY cân và P là trung điểm của XY .

Mà EF song song XY nên AP qua trung điểm của EF .

d) KU cắt (I) tại L . Ta chứng minh được $\angle LST = \angle TKT = 90^\circ - \angle STK = \frac{1}{2}\angle AEF = \angle DCB$.

Tương tự thì $\angle LTS = \angle DBC$.

Do đó tam giác LST và DCB đồng dạng, suy ra $\frac{TU}{BV} = \frac{TS}{BC} = \frac{AT}{AB}$, dẫn tới tam giác ATU và ABV đồng dạng, suy ra $\angle TAU = \angle BAV$.

Ta có $UT = UK \cot UKT, DV = BV \cot VDB$.

Suy ra $\frac{UT}{DV} = \frac{UT \cot UKT}{BV \cot VDB} = \frac{r}{R} \cdot \frac{EK}{r} \cdot \frac{FK}{r} = \frac{EK \cdot FK}{rR}$.

Mặt khác tam giác IKF và OFK đồng dạng nên $FK \cdot FD = IK \cdot OD = r \cdot R$, mà $FD = EK$ nên $EK \cdot FK = rR$. Do đó $UT = DV$.