Chương 10

Bài toán tổ hợp trong các đề thi học sinh giỏi và tuyển sinh vào lớp 10 Chuyên toán

10.1 Bài tập có lời giải

Ví dụ 10.1. Tập hợp M chứa 4 số nguyên phân biệt được gọi là tập *liên kết* nếu với mỗi $x \in M$ thì ít nhất một trong hai số $x-1, x+1$ thuộc M. Gọi U_n là số tập con liên kết của tập $\{1, 2, ..., n\}$.

(a) Tính U_7.

(b) Xác định giá trị nhỏ nhất của n sao cho $U_n \geq 2019$.

***Lời giải*:**
Gọi $a < b < c < d$ là 4 phần tử của một tập liên kết M . Vì $a-1 \notin M$ nên $a+1 \in M$, suy ra $b = a+1$. Vì $d+1 \notin M$ nên $d-1 \in M$, suy ra $c = d-1$. Như vậy một tập liên kết sẽ có dạng $\{a, a+1, d-1, d\}$, với $d - a > 2$.

(a) Có 10 tập con liên kết của tập $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ là

$$\begin{aligned}&\{1,2,3,4\},\{1,2,4,5\},\{1,2,5,6\},\{1,2,6,7\},\\&\{2,3,4,5\},\{2,3,5,6\},\{2,3,6,7\},\\&\{3,4,5,6\},\{3,4,6,7\},\{4,5,6,7\}.\end{aligned}$$

(b) Gọi $D = d - a + 1$ là *đường kính* của tập $\{a, b = a+1, c = d-1, d\}$, hiển nhiên $3 < D \leq n - 1 + 1 = n$. Với $D = 4$ sẽ có $n - 3$ tập liên kết, với $D = 5$ sẽ có $n - 4$ tập liên kết,..., với $D = n$ sẽ có đúng một tập liên kết. Do đó

$$U_n = 1 + 2 + ... + (n-3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}.$$

Do đó $U_n \geq 2019 \Leftrightarrow (n-3)(n-2) \geq 4038$. Như vậy giá trị nhỏ nhất của n là $n = 67$.

Ví dụ 10.2. Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

(a) Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

(b) Tìm tất cả các bộ gồm 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

***Lời giải*:**

(a) Gọi 5 số đó là a, b, c, d, e, do các số là phân biệt nên ta có thể giả sử $a < b < c < d < e$.
Theo giả thiết ta có $a + b + c > d + e$, suy ra $a + b + c \geq d + e + 1$. Suy ra $a \geq d + e + 1 - b - c$.
Mặt khác, do b, c, d, e là số tự nhiên nên từ $d > c > b$ ta có $d \geq c + 1 \geq b + 2$, suy ra $d - b \geq 2$.
$e > d > c$, suy ra $e - c \geq 2$.
Do đó $a \geq (d - b) + (e - c) + 1 \geq 5$. Suy ra $b, c, d, e > 5$.
Vậy các số đều không nhỏ hơn 5.

(b) Nếu $a \geq 6$, suy ra $b \geq 7, c \geq 8, d \geq 9, e \geq 10$, suy ra $a+b+c+d+e \geq 40$(vô lý), suy ra $a < 6$. Theo câu a ta có $a = 5$. Khi đó $b+c+5 \geq d+e+1$, suy ra $b+c \geq d+e-4$.
Mà $d-2 \geq b, e-2 \geq c$, suy ra $d+e-4 \geq b+c$. Do đó $b = d-2, c = e-2$.
Khi đó $a+b+c+d+e = 5+2b+2c+4 < 40$. Suy ra $b+c < \dfrac{31}{2}$. Suy ra $b \geq 7$.
Từ đó ta có $b = 6, b = 7$.
Nếu $b = 6$ ta có $d = 8, c = 8, e = 10$. Ta có bộ $(5, 6, 7, 8, 9)$
Nếu $b = 7, d = 9, c = 8, e = 10$. Ta có bộ $(5, 7, 8, 9, 10)$.

Ví dụ 10.3. Tìm tất cả các cặp (X, Y) là các tập con của tập các số nguyên thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(1) Mỗi tập X, Y có 3 phần tử.

(2) $3 \in X$ và $5 \in Y$.

(3) Tập $X \cap Y$ có đúng một phần tử.

(4) Nếu a, b là hai phần tử phân biệt của X thì $a + b \in Y$.

***Lời giải*:**

- Nếu $X = \{a, b, c\}$ với $a < b < c$ thì $a+b < a+c < b+c$ là các phần tử phân biệt nằm trong Y. Do đó $Y = \{a+b, b+c, c+a\}$.

- Vì $a < b < a+b < a+c < b+c$ nên $X \cap Y = c = a+b$.

- Nếu $c = 3$ thì $a = 1, b = 2$ do đó $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{3, 4, 5\}$ thỏa các điều kiện đặt ra.

- Nếu $b = 3$ thì $a \in \{1, 2\}$. Nếu $a = 1$ thì $c = a+b = 4$ do đó $X = \{1, 3, 4\}, Y = \{4, 5, 7\}$. Nếu $a = 2$ thì $c = 5$ dẫn đến $X = \{2, 3, 5\}, Y = \{5, 7, 8\}$ là các tập thỏa các điều kiện đặt ra.

- Nếu $a = 3$ thì $b > 3, c > 3$ do đó các phần tử của Y đều lớn hơn 5, không thỏa điều kiên (1).

Ví dụ 10.4. Cho $G = \{a_1, a_2, ..., a_{100}\}$ là một tập con của tập $\{1, 2, ..., 200\}$ sao cho với mọi $1 \le i < j \le 100$ thì $\sum_{i=1}^{100} a_i = 10080$ và $a_i + a_j \neq 201$.

(a) Chứng minh số các số lẻ trong G chia hết cho 4.

(b) Chứng minh rằng $S = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{100}^2$ là một hằng số.

Lời giải:

Không mất tổng quát ta có thể đánh chỉ số lại các phần tử của G để cho tồn tại một số tự nhiên k sao cho a_i là số lẻ với mọi $i \le k$. Khi đó với mọi $1 \le i \le k, 201 - a_i$ là một số chẵn và không nằm trong G.

(a)
- Ta có
$$\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{100} a_i = \sum_{i=1}^{100} a_i = 10080.$$
- Vì $\sum_{i=k+1}^{100} a_i$ là số chẵn nên $\sum_{i=1}^{k} a_i$ cũng là số chẵn. Khi đó
$$\sum_{i=1}^{k}(201 - a_i) + \sum_{i=k+1}^{100} a_i = 2\sum_{i=1}^{100} i = 10100.$$
- Từ đó suy ra
$$201k - 2\sum_{i=1}^{k} a_i = 20.$$
Vì 4 chia hết $2\sum_{i=1}^{k} a_i$ và 20 nên 4 chia hết $201k$.
- Và vì $(4, 201) = 1$ nên k chia hết cho 4.

(b) Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} a_i^2 &= \sum_{i=1}^{k}(201-a_i)^2 - \sum_{i=1}^{k}\Big((201-a_i)^2 - a_i^2\Big) + \sum_{i=k+1}^{100} a_i^2\\ &= 4\sum_{i=1}^{100} i^2 - 201\Big(201k - 2\sum_{i=1}^{k} a_i\Big)\\ &= 4.\frac{100.101.201}{6} - 201.20\\ &= 1349380.\end{aligned}$$

Ví dụ 10.5. Có bao nhiêu tập con A của tập $\{1, 2, 3, ..., 2014\}$ thỏa mãn điều kiện: A có ít nhất 2 phần tử và nếu $x, y \in A$, $x > y$ thì $\frac{y^2}{x-y} \in A$

Lời giải:

Gọi a là phần tử nhỏ nhất của A, khi đó với $b \in A$, $b \neq a$ thì $b > a$. Lại có: $\frac{a^2}{b-a} \in A$ nên $\frac{a^2}{b-a} \geq a$ suy ra: $b \leq 2a$.

Gọi d là phần tử lớn nhất của A và $c \in A$ là phần tử lớn thứ hai của A, $c < d$, khi đó ta có: $d \leq 2a \leq 2c$.

Mặt khác ta có: $\frac{c^2}{d-c} \in A$, lại có: $\frac{c^2}{d-c} \geq \frac{c^2}{2c-c} = c$ nên $\frac{c^2}{d-c} \in c, d$.

TH1: $\frac{c^2}{d-c} = d$ phương trình này vô nghiệm.

TH2: $\frac{c^2}{d-c} = c$ từ đây ta có: $d = 2c$, suy ra $a = c$ nên $A = a, 2a$ với $a \in 1, 2, 3, ...1007$.

Vậy có 1007 tập thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 10.6. Một tập hợp có ít nhất 3 số nguyên dương phân biệt được gọi là **tập cân** nếu có ít nhất một số lẻ và khi bỏ đi một phần tử bất kì thì các số còn lại có thể chia thành hai tập hợp mà tổng các số trong hai tập hợp đó bằng nhau.

(a) Chứng minh không có tập cân nào có 3 phần tử.

(b) Chứng minh số phần tử của tập cân luôn là một số lẻ.

(c) Có tồn tại hay không một tập cân có 5 phần tử? Tại sao?

Lời giải:

(a) Giả sử $\{a, b, c\}$ là tập cân, suy ra ra $a = b = c$. Vô lý.

(b) Giả sử tập cân A có số chẵn phần tử là $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$, đặt S là tổng các phần tử này. Khi đó $S - a_i$ luôn là một số chẵn. Khi đó $S - a_1 + S - a_2 + \cdots + S - a_{2n}$ chẵn hay $(2n-1)S$ chẵn, suy ra S chẵn. Khi đó a_i đều là các số chẵn.
Khi đó đặt $b_i = \dfrac{1}{2}a_i$ thì $b_1, b_2, \cdots, b_{2n}$ cũng là tập cân. Tiếp tục như thế sẽ dẫn tới vô lý vì khi đó sẽ có một phần tử là lẻ.
Vậy số phần tử của một tập cân không thể là số chẵn.

(c) Giả sử $\{a, b, c, d, e\}$ là tập cân có 5 phần tử, ta có thể giả sử $a < b < c < d < e$. Gọi S là tổng của các số.

   (a) Nếu S chẵn, ta suy ra các số đều chẵn, lập luận như trên ta có điều vô lý. Do đó S phải là số lẻ và các số a, b, c, d, e đều lẻ.

   (b) Bỏ a ta có các trường hợp sau: $b + e = c + d$ (1) hoặc $b + c + d = e$ (2)

      - Bỏ b ta có $a + e = c + d$ (3) hoặc $a + c + d = e$ (4).
      - Vì (1), (3) và (2), (4) không thể xảy ra đồng thời, nên ta có $b+e = c+d$ và $a + c + d = e$ hoặc $b + c + d = e, a + e = c + d$.
      - Cả hai đều mâu thuẫn.

   (c) Vậy không tồn tại tập cân có 5 phần tử.

Ví dụ 10.7. Cho a, b là các số nguyên dương, $a < b$ và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số nguyên dương thỏa $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$ trong đó $n > \dfrac{b-a+1}{2}$. Chứng minh rằng tồn tại hai số x_i, x_j sao cho $x_i + x_j = a + b$.

***Lời giải*:**

Xét các số $x_1, x_2, ..., x_n, a+b-x_1, \cdots, a+b-x_n$ là các số nguyên từ a đến b và có $b - a + 2$ số, do đó có ít nhất hai số bằng nhau. Do đó tồn tại x_i, x_j sao cho $x_i = a + b - x_j \Leftrightarrow x_i + x_j = a + b$.

Ví dụ 10.8. (PTNK 2000)

(a) Cho bốn số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4 sao cho $1 \leq a_k \leq k$ với mọi $k = 1, 2, 3, 4$ và tổng $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ là một số chẵn. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số dạng $\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4$ có giá trị bằng 0.

(b) Cho 1000 số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_{1000}$ sao cho $1 \leq a_k \leq k$ với $k = 1, 2, ..., 1000$ và tổng $S = a_1 + a_2 + ... + a_{1000}$ là một số chẵn. Hỏi trong các số có dạng $\pm a_1 \pm a_2 ... \pm a_{1000}$ có số nào bằng 0 hay không? Giải thích vì sao?

***Lời giải*:**

(a) Ta có $4 \leq S \leq 10$ và S chẵn, suy ra $S = 4, 6, 8, 10$. Xét các trường hợp sau:

- $S = 4$, suy ra $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. Suy ra $-1 - 1 + 1 + 1 = 0$.
- $S = 6$ ta có $6 = 1 + 1 + 1 + 3 = 1 + 1 + 2 + 2$, suy ra có một cách thỏa đề bài.
- $S = 8$ ta có $8 = 1+1+2+4 = 1+1+3+3 = 1+2+2+3 = 2+2+2+2$. Suy ra mỗi cách đều tồn tại một cách chọn dấu $+, -$ thỏa đề bài.
- $S = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Suy ra có một cách thỏa đề bài.

(b) Ta chứng minh bằng quy nạp mệnh đề sau: Cho n các số nguyên dương thỏa $1 \leq a_k \leq k$ thỏa $S_n = a_1 + ... + a_n$ chẵn. Khi đó tồn tại số có dạng $\pm a_1 \pm a_2 ... \pm a_n$

bằng 0.

Khi $n = 2$ ta có $a_1 + a_2$ chẵn, suy ra $a_1 = a_2 = 1$. Suy ra $a_1 - a_2 = 0$.

Giả sử bài toán đúng với $k \leq n$. Ta chứng minh bài toán đúng với $n + 1$. Ta có $S_{n+1} = a_1 + ... + a_n + a_{n+1}$ chẵn. Ta có $0 \leq |a_n - a_{n+1}| \leq n$.

- Nếu $a_n - a_{n+1} = 0$ ta áp dụng giả thiết quy nạp với $n - 1$ số $a_1, ..., a_{n-1}$ ta có điều cần chứng minh.
- Nếu $a_n - a_{n+1} \neq 0$. Áp dụng giả thiết quy nạp với n số $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, |a_n - a_{n+1}|$ ta thấy $a_1 + ... + a_{n+1}$ chẵn nên $a_1 + ... + a_{n-1} + |a_n - a_{n+1}|$ chẵn. Suy ra tồn tại số có dạng $\pm a_1 \pm a_2 ... \pm |a_n - a_{n+1}| = \pm a_1 \pm a_2 ... \pm a_{n+1}$ bằng 0.

Ví dụ 10.9. Cho tập $X = \{1, 2, \cdots, n\}$. Xét k tập hợp $A_1, A_2, \cdots, A_k$ con của X và mỗi tập có r phần tử sao cho giao của $r + 1$ tập bất kì trong k tập đó luôn khác rỗng. Chứng minh rằng giao của k tập $A_1, A_2, \cdots, A_k$ cũng khác rỗng.

***Lời giải*:**

Giả sử giao của k tập hợp là rỗng. Ta có $A_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$.

Khi đó với phần tử a_1 sẽ có một tập nào đó trong k tập không chứa a_1, không mất tính tổng quá giả sử là A_2.

Tương tự a_2 có một tập không chứa a_2 là A_3.

a_r có một tập không chứa là A_{r+1}.

Khi đó giao của $r + 1$ tập $A_1, A_2, \cdots, A_{r+1}$ bằng rỗng. (mâu thuẫn giả thiết).

Ví dụ 10.10. (Tuyển sinh vào lớp 10 Chuyên Toán trường PTNK 1998)

(a) Hãy chỉ ra cách sắp 8 số nguyên dương đầu tiên 1, 2, ..., 8 thành một dãy $a_1, a_2, ..., a_8$ sao cho 2 số a_i, a_j bất kì $(i < j)$ thì mọi số trong dãy nằm giữa a_i và a_j đều khác $\dfrac{a_i + a_j}{2}$.

(b) Chứng minh rằng với N số nguyên dương đầu tiên $1, 2, ..., N$ luôn tìm được cách sắp thành dãy $a_1, a_2, ..., a_N$ sao cho dãy thỏa mãn điều kiện như câu a).

***Lời giải*:**

(a) Một cách xếp thỏa đề bài là 26481537.

(b) Ta chứng minh bằng quy nạp với $n = 2^k$ thì luôn tồn tại một cách xếp thỏa đề bài.
Nếu $k = 1$, hiển nhiên đúng.
Giả sử luôn tồn tại một cách xếp thỏa đề bài với $n = 2^k$, cách xếp đó là $a_1, a_2, ..., a_n$.
Ta chứng minh tồn tại một cách xếp với $n = 2^{k+1}$. Thật vậy xét hoán vị $(2a_1, 2a_2, ..., 2a_n, 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, ..., 2a_n - 1)$ là một hoán vị của $1, 2, ..., 2^{k+1}$.
Ta chứng minh hoán vị trên thỏa đề bài.
Ta có nếu $a_i, a_j \in \{2a_1, 2a_2, ..., 2a_n\}$ theo giả thiết quy nạp không có số nào nằm giữa a_i, a_j bằng $\frac{1}{2}(a_i + a_j)$.
Nếu $a_i \in \{2a_1, ..., 2a_n\}, a_j \in \{2a_1 - 1, 2a_2 - 1, ..., 2a_n - 1\}$ thì $\frac{1}{2}(a_i + a_j)$ không phải số nguyên.
Nếu $a_i, a_j \in \{2a_1 - 1, 2a_2 - 1, ..., 2a_n - 1\}$ theo giả thiết quy nạp thì cũng có số nào nằm giữa a_i, a_j bằng $\frac{1}{2}(a_i + a_j)$.
Vậy bài toán đúng với $n = 2^k$.(1)
Nếu bài toán đúng với n, ta chứng minh bài toán đúng với $n - 1$. Xét các số $a_1, a_2, ..., a_n$ là một hoán vị thỏa đề bài của $1, 2, ..., n$. Khi đó nếu xóa bất kì số nào trong các số $a_1, ..., a_n$ thì dãy còn lại vẫn thỏa điều kiện. (2)
Từ (1) và (2) ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 10.11. Tám số tự nhiên liên tiếp được chia vào hai tập, mỗi tập gồm bốn số. Chứng minh rằng nếu tổng bình phương của các số trong mỗi tập bằng nhau thì tổng các số trong mỗi tập này cũng bằng nhau.

***Lời giải*:**

- Gọi $a, a+1, a+2, ..., a+7$ là tám số tự nhiên liên tiếp. Tổng bình phương của tám số này bằng $8a^2 + 56a + 140$ dẫn đến tổng bình phương của các số trong mỗi tập bằng $4a^2 + 28a + 70$. Gọi X là tập có chứa số $a+7$ và gọi $a+i, a+j, a+k$ là ba số còn lại của tập X. Khi đó

  $$3a^2 + 2a(i+j+k) + i^2 + j^2 + k^2 = 4a^2 + 28a + 70 - (a+7)^2 = 3a^2 + 14a + 21,$$

  dẫn đến
  $$2a(i+j+k-7) = 21 - (i^2 + j^2 + k^2) \qquad (*).$$

- Đến đây để chứng minh tổng các số ở hai tập bằng nhau ta chỉ cần chỉ ra rằng $i+j+k = 7$.

- Giả sử rằng $i+j+k \geq 8$, khi đó $i^2 + j^2 + k^2 \geq \dfrac{(i+j+k)^2}{3} \geq \dfrac{64}{3} > 21$ dẫn đến vế phải của (*) là số âm, mâu thuẫn.

- Giả sử $i+j+k \leq 6$, khi đó vì $21 - (i^2 + j^2 + k^2)$ là số chẵn nên $i^2 + j^2 + k^2$ là số lẻ. Dẫn đến (i, j, k) là các bộ $(0,1,2), (0,1,4)$ hoặc $(0,2,3)$ và các hoán vị. Trong các trường hợp này

  $$21 - (i^2 + j^2 + k^2) > 0 > 2a(i+j+k-7),$$

  mâu thuẫn. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 10.12. (PTNK 2022) Cho dãy số nguyên $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{21} \geq a_{22}$ thỏa mãn:

i) $|a_i| \leq 11$ và $a_i \neq 0 \forall i = 1; 2; \ldots; 22$

ii) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{22} = 1$

(a) Chứng minh: $a_1; a_2 > 0$

(b) Chứng minh có thể chọn $k \geq 1$ số từ $a_2; a_3; \ldots; a_{22}$ để tổng S của chúng thỏa $-10 \leq a_1 + S \leq 0$.

(c) Chứng minh từ dãy đã cho có thể chọn $n \geq 1$ số có tổng bằng 0 .

***Lời giải*:**

(a) Giả sử $a_2 \leq 0$.

$$\begin{aligned}&\text{Vì } a_i \neq 0 \Rightarrow a_2 < 0 \Rightarrow a_2 \leq -1\\&\Rightarrow a_{22} \leq a_{21} \leq \ldots \leq a_3 \leq a_2 \leq -1\\&\Rightarrow a_2 + a_3 + \ldots + a_{22} \leq -21\end{aligned}$$

Mà $a_1 + a_2 + \ldots + a_{22} = 1$ nên $a_1 \geq 22$ (trái giả thiết) Do đó $a_2 > 0 \Rightarrow a_1 \geq a_2 > 0$

(b) Giả sử không tồn tại $k \geq 1$ số nào từ các số $a_2, a_3, \ldots, a_{22}$ để tổng S của chúng thỏa $-10 \leq a_1 + S \leq 0$. Khi đó: $\left[\begin{array}{l} a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{22} \leq -11 \\ \\ a_1 + a_3 + a_4 + \ldots a_{22} \geq 1 \end{array}\right.$

TH1: $a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{22} \leq -11$ Lại có $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{22} = 1$ nên $a_2 \geq 12$ (trái gt).

TH2: $a_1 + a_3 + a_4 + \ldots a_{22} \geq 1$ Lại có $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{22} = 1$ nên $a_2 \leq 0$ (mâu thuẫn câu a) Do đó ta có điều phải chứng minh.

(c) Ta có nhận xét sau: Với mỗi X là tập con thực sự của $\{1, 2, \ldots, 22\}$, luôn tồn tại i không thuộc X sao cho a_i trái dấu với s, trong đó s là tổng các a_k với k thuộc X. Chứng minh: Đặt tổng các a_k với k thuộc X là s, tổng các a_k với k không thuộc X là s' thì $s.s' = s(1-s) \leq 0$. Do đó tồn tại i không thuộc X sao cho $a_i.s \leq 0$. Quay trở lại bài toán, giả sử không thể chọn ra n số có tổng bằng 0 . Chọn $i_1 = 1$, với mỗi $1 \leq k \leq 22$, chọn i_k là số nguyên dương nhỏ nhất khác $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ sao cho a_{i_k} trái dấu với $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_{k-1}}$. Đặt $S_k = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}$ thì $S_1 = a_1$ nên $|S_1| \leq 11$, ta cũng suy ra được nếu $|S_{n-1}| \leq 11$ thì

$$\begin{aligned}|S_n| = |S_{n-1} + a_{i_n}| &= |S_{n-1} - (-a_{i_n})|\\&= ||S_{n-1}| - |a_{i_n}||\left(\text{ do } -a_{i_n} \text{ cùng dấu với } S_{n-1}\right)\\&\leq 10\left(\text{ do } 1 \leq |a_{i_n}|, |S_{n-1}| \leq 11\right)\end{aligned}$$

như vậy $|S_i| \leq 10$ với mọi $i \in \{2, 3, \ldots, 22\}$. Do S_i khác 0 nên S_i có thể nhận 20 giá trịi, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại $m < n$ sao cho $S_m = S_n$, nghĩa là tổng $a_{i_{m+1}} + \ldots + a_{i_n} = 0$.

Ví dụ 10.13. Có 10 viên bi vàng và 10 viên bi xanh được xếp thành một hàng. Chứng minh rằng tồn tại 10 viên bi liên tiếp sao cho số viên bi vàng và xanh bằng nhau.

Lời giải:
Gọi các viên bi lần lượt xuất hiện theo thứ tự là $A_1, A_2, \cdots, A_{20}$. Với mỗi số nguyên dương $1 \leq k \leq 11$, gọi d_k là hiệu của số lượng bi màu xanh và số lượng bi màu đỏ trong bộ 10 bi liên tiếp là $A_k, A_{k+1}, \cdots, A_{k+9}$. Yêu cầu của bài toán tương đương với việc tồn tại chỉ số $1 \leq k \leq 11$ để $d_k = 0$. Có các nhận xét sau: - $d_1 - d_{11} = 0$. Thật vậy, hiệu này là chênh lệch giữa số bi màu xanh và số bi màu đỏ trong 20 bi đã cho, và hiệu này bằng 0 theo giả thiết.
- Với $1 \leq k \leq 11$ thì d_k là số chẵn. Thật vậy, nếu trong các bi $A_k, A_{k+1}, \cdots, A_{k+9}$ có l bi màu xanh $(0 \leq l \leq 10)$ thì sẽ có $10 - l$ bi màu đỏ, do đó $d_k = 2l - 10$ là số chẵn.
- Với $1 \leq k \leq 10$ thì $d_k - d_{k+1} \in \{0, -2, 2\}$. Thật vậy, có các trường hợp sau xảy ra:

- nếu A_k và A_{k+10} cùng màu thì $d_k - d_{k+1} = 0$;
- nếu A_k màu đỏ và A_{k+10} màu xanh thì $d_k - d_{k+1} = 2$;
- nếu A_k màu xanh và A_{k+10} màu đỏ thì $d_k - d_{k+1} = -2$.

Với các nhận xét trên, có những trường hợp sau cần giải quyết: - Nếu $d_1 = 0$ hoặc $d_{11} = 0$ thì $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ là bộ điểm cần tìm.
- Ngược lại, giả sử rằng $d_1, d_{11} \neq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $d_1 < 0$ và $d_{11} > 0$. Gọi l là chỉ số lớn nhất để $d_l < 0$. Khi đó $d_l \leq -2$ và $d_{l+1} \geq 0$. Hơn nữa:

$$2 \geq d_{l+1} - d_l \geq 0 - (-2) = 2,$$

cho thấy $d_{l+1} = 0$ hay $A_{l+1}, A_{l+2}, \cdots, A_{l+10}$ là bộ bi cần tìm. Vậy bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Ví dụ 10.14. Chứng minh rằng dãy 101 số nguyên phân biệt $a_1, a_2, \cdots, a_{101}$ luôn tìm được một dãy con $b_1, b_2, \cdots, b_{11}$ là dãy tăng hoặc là dãy giảm.

***Lời giải*:**

Với mỗi $k = 1, 2, \cdots, 101$ ta tìm dãy con dài nhất $n = n_k$ trong tất cả các dãy con $b_1, b_2, \cdots, b_n$ mà $b_1 < b_2 < \cdots < b_n = a_k$.

Nếu $n_k > 10$ với $k \in \{1, 2, \cdots, 101\}$ thì chứng minh đã hoàn tất. Ngược lại, có 101 số nguyên n_k trong tập 10 phần tử $\{1, 2, \cdots, 10\}$. Khi đó, theo nguyên lý dirichlet, có 11 chỉ số $k_1 < k_2 < \cdots < k_{11}$ sao cho $n_{k_1} = n_{k_2} = \cdots = n_{k_{11}}$.

Nhận thấy n_k có tính chất sau: Nếu $k < k'$ và $a_k < a_{k'}$, thì $n_{k'} \geq n_k + 1$. (Thật vậy, mỗi dãy con $b_1 < b_2 < \cdots < b_n = a_k$ khi đó có thể mở rộng thêm số hạng $b_{n+1} = a_{k'}$.)

Đối với các chỉ số $k_1, k_2, \cdots, k_{11}$ điều này có nghĩa là không có bất đẳng thức nào trong chuỗi $a_{k_1} < a_{k_2} < \cdots < a_{k_{11}}$ có thể giữ được; tức là $a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_{11}}$ (hãy nhớ rằng các số $a_1, a_2, \cdots, a_{101}$ là khác nhau).

Ví dụ 10.15.

(a) Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_k \leq a_{k+1} \leq 2a_k$ với mọi $1 \leq k \leq n-1$. Chứng minh rằng trong tổng $S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ người ta có thể chọn các dấu sao cho $0 \leq S \leq a_1$ đúng.

(b) Giả sử rằng dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_1 = 1$, $a_i \leq a_{i+1} \leq 2a_i (1 \leq i \leq n-1)$. Chứng minh rằng có thể chia các số hạng của nó thành hai tập hợp sao cho tổng các số trong cả hai tập hợp bằng nhau khi và chỉ khi số $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ là số chẵn.

***Lời giải*:**

(a) Chúng ta sử dụng quy nạp trên n.

- Nếu $n = 2$, chúng ta có thể chọn $S = -a_1 + a_2$.
- Nếu các dấu trong tổng $S_1 = \pm a_2 \pm a_3 \pm \cdots \pm a_n$ được chọn sao cho $0 \leq S_1 \leq a_2$ giữ nguyên, thì chúng ta đặt $S = a_1 - S_1$ hoặc $S = -a_1 + S_1$, tùy theo $S_1 \leq a_1$ hay $S_1 > a_1$. Trong cả hai trường hợp, chúng ta có $0 \leq S \leq a_1$.

(b) Áp dụng câu a, thì có thể chọn dấu $+, -$ để $S_1 = \pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \cdots \pm a_n$ chỉ có thể nhận giá trị 0 hoặc 1, mà do S chẵn nên chỉ có thể bằng không. Từ đó có điều cần chứng minh.

Ví dụ 10.16. Cho tập $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Lấy S gồm các phần tử thuộc A sao cho tổng hai số bất kì thuộc S là các số phân biệt. Hỏi tập S có số phần tử nhiều nhất là bao nhiêu? Tại sao?

***Lời giải*:**

Nếu tập A có 7 phần tử trở lên thì sẽ có không ít hơn 21 tổng. Mà các tổng hai số chỉ nhận các giá trị từ 3 đến 17 nên theo nguyên lý dirichlet thì sẽ có hai tổng bằng nhau.

Do đó số phần tử của S không lớn hơn 6. Xét S có 6 phần tử, khi đó có đúng 15 tổng nhận các giá trị $3, 14, ..., 17$ nên mỗi tổng hai số nhận đúng một giá trị. Để có tổng bằng 3, 17 thì tồn tại 4 số $1, 2$ và $8, 9$. Khi đó $1 + 9 = 2 + 8$ (vô lý). Vậy tập không thể có 6 phần tử.

Nếu tập có 5 phần tử, ta thấy $S = 1, 2, 5, 7, 9$ thỏa đề bài.

Vậy số phần tử lớn nhất của một tập con thỏa đề bài là 5.

Ví dụ 10.17. Giải bóng đá PTNK league gồm 18 đội tham gia. Thể thức giải đấu là đá vòng tròn một lượt, tức là mỗi vòng 18 đội sẽ chia làm 9 cặp đấu với nhau, mỗi lượt có đúng 9 trận, hai đội gặp nhau đúng một trận. Tới gần Tết âm lịch giải tạm dừng, và giải đã diễn ra đúng 8 lượt trận. Chứng minh rằng tới thời điểm này có thể tìm ra được 3 đội mà đôi một chưa đá với nhau.

***Lời giải*:**

(a) Ta gọi 18 đội đó là $A_1, A_2, ..., A_{18}$. Giả sử sau 8 lượt thì A_1 đã thi đấu với các đội từ A_2 đến A_9.

(b) Trong nhóm 9 đội từ $A_{10}, \cdots, A_{18}$ không có đội nào thi đấu với A_1. Nếu có hai đội nào thi chưa thi đấu với nhau trong nhóm này, giả sử là C, D thì A_1, C, D đôi một chưa đấu với nhau thỏa đề bài.

(c) Giả sử tất cả các đội trong nhóm này đều đá với nhau, tức là mỗi đội đều đá 8 trận, và không đá với đội nào khác nhóm này.
Ta thấy trong nhóm có 9 đội, mỗi lượt chỉ có 4 đội chia cặp đá với nhau nên số lượt trận cần là 9 lượt mâu thuẫn với số lượt diễn ra là 8. Điều giả sử sai, tức là sẽ có hai đội nào đó trong các đội nhóm này chưa đá với nhau. Kết với với A_1 ta có 3 đội thỏa đề bài.

Ví dụ 10.18. Cho tập A có 7 phần tử, giả sử mỗi tập con có 3 phần tử của A được tô một màu, sao cho hai tập rời nhau (giao nhau bằng rỗng) thì có màu khác nhau. Tìm số màu ít nhất để tô được thỏa điều kiện.

***Lời giải*:**

(a) Đặt tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(b) Ta xét các tập có 3 phần tử sau: $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7, 1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}, \{1, 2, 3\}$. Nếu chỉ sử dụng hai màu giả sử là xanh đỏ thì các tập này sẽ có màu lần lượt xanh đỏ và tập $\{1, 2, 3\}$ được tô bởi hai màu (mâu thuẫn).

(c) Nếu sử dụng ba màu, xanh đỏ vàng, ta có thể tô được như sau:
- Tô màu xanh cho tất cả các tập con chứa số 7.
- Tô màu vàng tất cả các tập con không chứa 7 mà tổng là một số chẵn.
- Tô màu đỏ cho các tập còn lại.

Ví dụ 10.19. Trong mặt phẳng có $2n$ $(n \geq 2)$điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng, hai điểm bất kì nối nhau bởi một đoạn thẳng. Biết rằng có $n^2 + 1$ đoạn thẳng, chứng minh rằng có ít nhất một tam giác.

***Lời giải*:**
Ta chứng minh quy nạp theo n.

(a) Rõ ràng bài toán đúng khi $n = 2$.

(b) Giả sử bài toán đúng với n, ta chứng minh bài toán đúng với $n + 1$, số đoạn thẳng là $(n + 1)^2 + 1 = n^2 + 1 + 2n + 1$.

Giả sử có hai điểm nối nhau là A_1, A_2, nếu A_1, A_2 với nhóm từ $A_3, \cdots A_{2n+1}, A_{2n+2}$ có không hơn $2n+1$ đoạn thẳng, thì số đoạn thẳng trong các điểm $A_3, \cdots, A_{2n+2}$ là n^2+1 nên theo giả thiết quy nạp có một tam giác.
Nếu hai điểm A_1, A_2 nối với nhóm còn lại có nhiều hơn hoặc bằng $2n+1$ đoạn thẳng, thì có ít nhất một điểm cùng nối với A_1, A_2 ta cũng có một tam giác.

(c) Vậy luôn tồn tại một tam giác.

Ví dụ 10.20. Số tự nhiên $n \geq 2$ được gọi là số thân thiện nếu tồn tại n tập con $A_1, A_2, \cdots, A_n$ của $X = \{1, 2, \cdots n\}$ sao cho:

(a) $i \notin A_i$ với mọi $i = \overline{1, n}$.

(b) $i \in A_j$ nếu và chỉ nếu $j \notin A_i$ với $i, j \in X$.

(c) $A_i \cup A_J$ khác rỗng với mọi $i, j \in X$.

(a) Chứng minh 7 là số thân thiện.

(b) Chứng minh n là thân thiện khi và chỉ khi $n \geq 7$.

***Lời giải*:**

(a) Khi $n = 7$, ta lấy các tập $\{2,3,4\}, \{3,5,6\}, \{4,5,7\}, \{2,6,7\}, \{1,4,6\}, \{1,3,7\}, \{1,2,5\}$.

(b) Ta chứng minh với mọi $n \geq 7$ đều là số thân thiện bằng quy nạp.

- Rõ ràng đúng với $n = 7$.
- Giả sử n là số thân thiện với họ tập $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Với $n+1$ ta chọn $B_1, B_2, \cdots, B_n = A_n$ và $B_{n+1} = \{1, 2, \cdots, n\}$ chứng tỏ $n+1$ là số thân thiện.

Bước tiếp theo ta chứng minh n không thể nhỏ hơn 7.

- Mỗi tập A_i có ít nhất 3 phần tử, thật vậy giả sử có $A_i = \{x, y\}$ thì $A_i \cap A_x = \{y\}, A_i \cap A_y = \{x\}$. Suy ra $y \in A_x, x \in A_y$ vô lý.

- Ta xét bảng $n \times n$ với các chữ số $0, 1$ sao cho $j = 1$ nếu $j \in A_i$. Mỗi dòng có ít nhất 3 số 1, đường chéo chính là toàn số 0, hai ô đối xứng nhau qua đường chéo chính chỉ có đúng một số 0, và một số 1.
  Do đó ta có $\dfrac{n^2 - n}{2} \geq 3n \Leftrightarrow n \geq 7$.

Ví dụ 10.21. Có 5 số thực có giá trị tuyệt đối không lớn hơn 1 và có tổng bằng 1, được viết trên một đường tròn, mỗi số viết một lần. Chứng minh rằng có thể có chọn được 3 số liên tiếp a, b, c sao cho $a + b, b + c, a + b + c$ không âm.

***Lời giải*:**

(a) Giả sử các số được xếp theo thứ tự a, b, c, d, e, a.Ta chứng minh trong các tổng $a + b, b + c, c + d, d + e, e + a$ có nhiều nhất hai số âm.

(b) Nếu chỉ có 2 số âm, và rời nhau, như $a + b, c + d$ suy ra $e > 1$ vô lý (1). Do đó nếu có 2 số âm thì phải liên tiếp.

(c) Nếu có 3 số âm, thì sẽ có ít nhất 2 số liên tiếp, giả sử $a + b, b + c$ âm, số còn lại âm có thể là $c + d$ hoặc $e + a$ đều mâu thuẫn với (1).

(d) Vậy có nhiều nhất 2 số âm và phải liên tiếp. Ta có thể giả sử $a + b, b + c$ âm. Khi đó $c + d, d + e, e + a$ không âm.

(e) Mà do $a + b, b + c < 0$ nên $c + d + e > 0$, có 3 số c, d, e thỏa đề bài.

(f) Nếu chỉ có một cặp $a + b$ âm, suy ra $c + d, d + e, c + d + e$ không âm, thỏa đề bài.

Ví dụ 10.22. Cho 1251 số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \cdots, a_{1251}$ không vượt quá 2108. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên dương $i, j \in \overline{1, 2018}$ sao cho

$$|\sqrt{ia_i} - \sqrt{ja_j}| \geq 5$$

***Lời giải*:**

Nếu $a_1 > 25$.

(a) Khi đó xét đoạn $[\frac{(\sqrt{a_1}-5)^2}{1251}; \frac{(\sqrt{a_1}-5)^2}{2}]$, do $a_1 \leq 2018$ nên đoạn không chứa quá 1250 số nguyên. Do đó có ít nhất một số a_j ngoài đoạn.

(b) Khi đó $a_j < \frac{(\sqrt{a_1}-5)^2}{1251}$ hoặc $a_j > \frac{(\sqrt{a_1}-5)^2}{2}$ ta đều suy ra kết quả.

Nếu $a_1 < 25$ dễ chọn được $a_j > 50$ thỏa đề bài.

Ví dụ 10.23. (PTNK 2012, Romani 2004) Cho đa giác đều n cạnh. Dùng 3 màu xanh, đỏ, vàng tô màu các đỉnh đa giác một cách tùy ý (mỗi đỉnh được tô bởi một màu và tất cả các đỉnh đều được tô màu). Cho phép thực hiện thao tác sau đây: chọn hai đỉnh kề nhau bất kì (nghĩa là hai đỉnh liên tiếp) khác màu và thay màu của hai đỉnh đó bằng màu còn lại.

(a) Chứng minh rằng bằng cách thực hiện thao tác trên một số lần ta luôn luôn làm cho các đỉnh của đa giác chỉ còn được tô bởi hai màu.

(b) Chứng minh rằng với n = 4 và n = 8, bằng cách thực hiện thao tác trên một số lần ta có thể làm cho các đỉnh của đa giác chỉ còn được tô bởi một màu.

***Lời giải*:**

(a) Xét một dãy các đỉnh màu vàng $AV_1V_2...V_kB$ (có thể chỉ gồm một đỉnh) được giới hạn bởi 2 đỉnh A và B (có thể trùng nhau) không phải màu vàng. Sử dụng thao tác đã cho ta đổi màu hai đỉnh A và V_1 thành màu thứ ba (hiển nhiên không phải màu vàng). Tiếp tục như thế đổi màu các đỉnh $|V_2, V_3, ..., V_k$ sang màu không phải vàng. Như vậy ta đã làm mất màu vàng trong dãy các đỉnh ở trên.
Bằng cách thực hiện như trên đối với dãy các điểm màu vàng khác ta suy ra có thể làm cho các đỉnh của đa giác chỉ còn được tô bởi hai màu xanh và đỏ.

(b) Do câu a) ta chỉ xét trường hợp các đỉnh của đa giác được tô bởi hai màu, chẳng hạn xanh và đỏ.

Bằng thao tác đã cho ta có hai kiểu chuyển màu bộ 4 đỉnh liên tiếp như sau: $ddxx \to dvvx \to xxvx \to xddx \to vvvv$ và $dxdx \to dvvd, dxxd \to vvvv$ (1)
Do tính đối xứng nên suy ra nếu một bộ 4 đỉnh mà trong đó có hai đỉnh cùng một màu và hai đỉnh còn lại cùng một màu khác thì ta chuyển cả 4 đỉnh về màu thứ ba.
Bằng cách dùng kiểu biến đổi trên ta có:
$dddx \to ddvv \to xxxx$ (dùng (1)) và $ddxd \to dvvd \to xxxx$(2).
Nghĩa là nếu có 3 đỉnh cùng màu, ta chuyển ta chuyển màu của 3 đỉnh đó về cùng màu của đỉnh thứ tư.
Như vậy bằng (1) và (2) ta có thể chuyển mày của mỗi bộ 4 đỉnh liên tiếp về cùng một màu. Điều này chứng minh cho trường hợp $n = 4$.
Với $n = 8$, ta chia 8 đỉnh thành 2 bộ 4 đỉnh. Như đã chứng minh ở trên, ta có thể làm cho mỗi bộ 4 đỉnh như thế có cùng màu. Nếu màu của hai bộ là như nhau thì ta có điều cần chứng minh. Nếu hai bộ khác nhau, chẳng hạn ta có kiểu tô màu $xxxxdddd$. Ta có có phép biến đổi hai bộ liên tiếp:
$xxxxdddd \to xxxvvddd \to xxxv|vddd \to vvvvvvvv$(dùng (2)). Vậy ta đã chứng minh cho trường hợp $n = 8$.

Ví dụ 10.24. Cho $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ có tổng bằng 0. Chứng minh rằng trong các cặp số $(a_i, a_j), i < j$ với $i, j \in \{1, 2, \cdots, 2n\}$ tồn tại ít nhất $2n-1$ cặp sao cho $a_i + a_j \geq 0$.

Lời giải:

(a) Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2n}$.

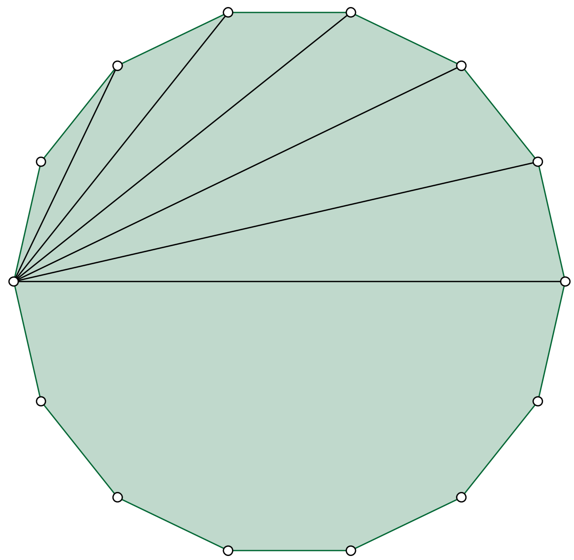
(b) Nếu $a_n + a_2 n - 1 \geq 0$ thì khi đó các cặp $(a_i, a_{2n-1}), i = \overline{n, 2n-2}$ và $(a_n, a_j), j = \overline{n+1, 2n}$ thỏa, và số cặp là $n - 1 + n = 2n - 1$.

(c) Nếu $a_n + a_{2n-1} < 0$ thì $a_1 + \cdots a_{n-1} + a_{n+1} + \cdots + a_{2n} > 0$, ta có
$0 > a_n + a_{2n-1} \geq a_{n-1} + a_{2n-2} \geq \cdots \geq a_2 + a_{n+1}$,
do đó $a_2 + \cdots a_{n-1} + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-2} < 0$.

(d) Do đó $a_1 + a_{2n} \geq 0$, từ đó ta có $a_i + a_{2n} \geq 0$ với $i = \overline{1, 2n-1}$ có $2n - 1$ cặp.

Ví dụ 10.25. Cho đa giác đều có 14 đỉnh. Chứng minh rằng từ 6 đỉnh bất kì có thể chọn được 4 đỉnh tạo thành một hình thang cân.

***Lời giải*:**



Do tính chất đối xứng của tứ giác đều nên với hai đỉnh bất kì thì độ dài nối hai đỉnh đó có thể nhận 1 trong 7 giá trị.

Với 6 đỉnh ta có 15 đoạn thẳng nhận bảy giá trị độ dài khác nhau, theo nguyên lý dirichlet thì có 3 đoạn có đoạn thẳng bằng nhau.

TH1: Nếu 3 đoạn bằng nhau đó cùng chung một đỉnh, ví dụ $AB = AC = AD$, suy ra B, C, D thuộc đường tròn tâm A (vô lý).

TH2: Có 2 đoạn bằng nhau không chung một đỉnh, giả sử $AB = CD$. Ta có $ABCD$ nội tiếp và $AB = CD$ nên 4 đỉnh A, B, C, D tạo thành hình thang cân. (điều cần chứng minh).

Ví dụ 10.26. Cho tập S có 2002 phần tử, số tự nhiên k thỏa $0 \leq k \leq 2^{2002}$ chứng minh rằng tồn tại cách tô màu các tập con của S bằng hai màu xanh và đỏ thỏa:

(a) Có đúng k tập được tô màu đỏ.

(b) Hợp của hai tập đỏ là một tập đỏ.

(c) Hợp của hai tập xanh là một tập xanh.

***Lời giải*:**
Ta chứng minh bài toán đúng với tập S có số phần tử n bất kì bằng quy nạp.

(a) Rõ ràng bài toán đúng với $n = 1$, $S = \{1\}$. Nếu $k = 0$ tô màu xanh cả hai tập con. Nếu $k = 1$ tô màu đỏ tập S, xanh tập rỗng. Nếu $k = 2$ thì tô S và rỗng đều màu đỏ.

(b) Giả sử S có n phần tử thì với mọi k đều tồn tại cách tô thỏa đề bài.
Ta chứng minh bài toán đúng với S có $n + 1$ phần tử.
Giả sử $S = \{1, 2, \cdots, n, n + 1\}$, $0 \leq k \leq 2^{n+1}$.

   (a) Nếu $k \leq 2^n$.Theo giả thiết quy nạp các tập con của $\{1, 2, \cdots, n\}$ được tô thỏa đề bài và các tập con chứa $n + 1$ ta tô màu xanh. Rõ ràng cách tô này thỏa đề bài.

   (b) Nếu $2^n < k \leq 2^{n+1}$. Thì ta chỉ cần đổi màu các tập tô như trường hợp trên, tập nào tô màu xanh thì đổi thì màu đỏ và ngược lại. Rõ ràng thỏa đề bài.

Ví dụ 10.27. Cho tập $X = \{1, 2, \cdots, n\}$. Xét k tập hợp $A_1, A_2, \cdots, A_k$ con của X và mỗi tập có r phần tử sao cho giao của $r + 1$ tập bất kì trong k tập đó luôn khác rỗng. Chứng minh rằng giao của k tập $A_1, A_2, \cdots, A_k$ cũng khác rỗng.

***Lời giải*:**

Giả sử giao của k tập hợp là rỗng. Ta có $A_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$.
Khi đó với phần tử a_1 sẽ có một tập nào đó trong k tập không chứa a_1, không mất tính tổng quá giả sử là A_2.
Tương tự a_2 có một tập không chứa a_2 là A_3.
a_r có một tập không chứa là A_{r+1}.
Khi đó giao của $r+1$ tập $A_1, A_2, \cdots, A_{r+1}$ bằng rỗng. (mâu thuẫn giả thiết).

Ví dụ 10.28. Một con rồng có 100 cái đầu. Mỗi nhát chém, một con dao có thể chặt đứt 15, 17, 20, hay 5 cái đầu. Mỗi lần như thế, ở bả vai của nó lại mọc ra 24, 2, 14 hay 17 cái đầu mới. Nếu chặt đứt hết đầu, con rồng sẽ chết. Hỏi rằng có thể giết chết được rồng hay không?

***Lời giải*:**
Ta thấy $15 - 25, 17 - 2, 20 - 2, 5 - 17$ đều là các số chia hết cho 3, nên số đầu của con rồng sẽ có số dư khi chia cho 3 luôn là không đổi. Lúc đầu con rồng có 100 (chia 3 dư 1) nên không thể mất hết đầu, do đó không thể giết chết được con rồng.

Ví dụ 10.29. (PTNK 1996)

(a) Chứng minh với $N \geq 3$, luôn luôn có N số chính phương đôi một khác nhau sao cho tổng của chúng là một số chính phương.

(b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $mn \geq 3$ bao giờ cũng xây được một bảng chữ nhật gồm $m \times n$ số chính phương đôi một khác nhau cho tổng của mỗi dòng là một số chính phương và tổng của mỗi cột là một số chính phương.

***Lời giải*:**

(a) Ta chỉ cần chọn các số $a_1, a_2, ..., a_N$ thỏa $a_1 = x^2$ với x lẻ.
Các số $a_2 = x_2^2, ..., a_{N-1} = x_{N-1}^2$ là các số chính phương chẵn tăng dần.
Khi đó $a_1 + a_2 + ... + a_{N-1}$ lẻ và bằng $2M + 1$. Chọn $a_N = M^2$. Khi đó ta có $a_1, ..., a_N$ phân biệt và $a_1 + ... + a_N = 2M + 1 + M^2 = (M+1)^2$ là số chính

phương.

(b) Ta xét n số thỏa tương tự câu a. $a_1 = x_1^2$ là số chính phương chẵn, $a_2 = x_2^2 < .. < a_{m-1} = x_{n-1}^2$ là các số chính phương chẵn lớn hơn a_1 và nếu tổng $a_1 + ... + a_{n-1} = 2k+1$ ta chọn $a_m = x_n^2 = k^2$.
Ta chọn dãy $b_1 =$ là số chính phương lẻ và $b_1 \geq 3^2$.
Chọn $b_2 = y_2^2, b_3 = y_3^2, ...b_{n-1} = y_{n-1}^2$ là số chính phương chẵn thỏa, $y_2 > x_m.y_1, y_3 > x_m y_2, ..., y_{n-1} > x_m.y_{n-2}$, nếu $b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} = 2h+1$, chọn $b_n = y_n^2 = h^2$. Khi đó $b_1 + ... + b_n$ là số chính phương.
Xét bảng $m \times n$ trong đó số ở ô (i,j) là $x_i^2 y_j^2$. Ta chứng minh bảng được xây dựng như vậy là thỏa đề bài.
Xét dòng thứ i, tổng các số ở dòng i là $x_i^2 y_1^2 + ... + x_i^2 y_n^2 = x_2^2(y_1^2 + ... + y_m^2)$ là số chính phương.
Tương tự tổng các số ở cột j là $x_1^2 y_j^2 + ... + x_m^2 y_j^2 = y_i^2(x_1^2 + ... + x_m^2)$ là một số chính phương.
Hơn nữa theo cách chọn$y_1, y_2, ..., y_n$ thì
$x_1 y_1 < x_2 y_1 < ... < x_m y_1 < x_1 y_2 < ... < x_m y_2 < x_1 y_3 < ... < x_m y_n$ nên các số trong bảng là phân biệt. Từ đó ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 10.30. (PTNK 1997) Cho dãy n số $a_1, a_2, ..., a_n$ (trong đó các số a_i chỉ có thể nhận giá trị 0 hoặc 1 thỏa: (*) Bất kì hai bộ 5 số liên tiếp nào lấy từ dãy đã cho đều không trùng nhau.

(a) Chứng minh $n \leq 36$.

(b) Biết rằng nếu thêm vào cuối dãy một số a_{n+1} tùy ý (0 hay 1) thì tính chất (*) sẽ không còn đúng nữa. Chứng minh rằng 2 bộ 4 số liên tiếp a_1, a_2, a_3, a_4 và $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ trùng nhau.

Lời giải:

(a) Ta có $2^5 = 32$ dãy nhị phân khác nhau có 5 chữ số.
Giả sử $n \geq 37$ khi đó ta có không ít hơn 33 bộ 5 chữ số liên tiếp: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5, ..., a_{n-4} a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} a_n$. Do đó theo nguyên lý Đirichlet thì có ít

nhất 2 bộ trùng nhau. Vô lý. Vậy $n \leq 36$.

(b) Nếu $a_{n+1} = 0$ thì tồn tại i sao cho $a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4} \equiv a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} a_n 0$.
Nếu $a_{n+1} = 1$ thì tồn tại j sao cho j thỏa $a_j a_{j+1} a_{j+2} a_{j+3} a_{j+4} \equiv a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} a_n 1$.
Nếu $i, j > 1$ thì $a_{i-1} \neq a_{j-1}$.Suy ra $a_{i-1} = a_{n-4}$ hoặc $a_{j-1} = a_{n-4}$.
Suy ra bộ $a_{n-4} a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} a_n$ sẽ trùng một trong hai bộ:
$a_{j-1} a_j a_{j+1} a_{j+2} a_{j+3}$, $a_{i-1} a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3}$ (mâu thuẫn).
Vậy $i = 1$ hoặc $j = 1$, ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 10.31. (PTNK 1998)

(a) Hãy chỉ ra cách sắp 8 số nguyên dương đầu tiên 1, 2, ..., 8 thành một dãy $a_1, a_2, ..., a_8$ sao cho 2 số a_i, a_j bất kì $(i < j)$ thì mọi số trong dãy nằm giữa a_i và a_j đều khác $\dfrac{a_i + a_j}{2}$.

(b) Chứng minh rằng với N số nguyên dương đầu tiên $1, 2, ..., N$ luôn tìm được cách sắp thành dãy $a_1, a_2, ..., a_N$ sao cho dãy thỏa mãn điều kiện như câu a).

Lời giải:

(a) Một cách xếp thỏa đề bài là 26481537.

(b) Ta chứng minh bằng quy nạp với $n = 2^k$ thì luôn tồn tại một cách xếp thỏa đề bài.
Nếu $k = 1$, hiển nhiên đúng.
Giả sử luôn tồn tại một cách xếp thỏa đề bài với $n = 2^k$, cách xếp đó là $a_1, a_2, ..., a_n$.
Ta chứng minh tồn tại một cách xếp với $n = 2^{k+1}$. Thật vậy xét hoán vị $(2a_1, 2a_2, ..., 2a_n, 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, ..., 2a_n - 1)$ là một hoán vị của $1, 2, ..., 2^{k+1}$.
Ta chứng minh hoán vị trên thỏa đề bài.
Ta có nếu $a_i, a_j \in \{2a_1, 2a_2, ..., 2a_n\}$ theo giả thiết quy nạp không có số nào

nằm giữa a_i, a_j bằng $\frac{1}{2}(a_i + a_j)$.
Nếu $a_i \in \{2a_1, ..., 2a_n\}, a_j \in \{2a_1 - 1, 2a_2 - 1, ..., 2a_n - 1\}$ thì $\frac{1}{2}(a_i + a_j)$ không phải số nguyên.
Nếu $a_i, a_j \in \{2a_1 - 1, 2a_2 - 1, ..., 2a_n - 1\}$ theo giả thiết quy nạp thì cũng có số nào nằm giữa a_i, a_j bằng $\frac{1}{2}(a_i + a_j)$.
Vậy bài toán đúng với $n = 2^k$.(1)
Nếu bài toán đúng với n, ta chứng minh bài toán đúng với $n - 1$. Xét các số $a_1, a_2, ..., a_n$ là một hoán vị thỏa đề bài của $1, 2, ..., n$. Khi đó nếu xóa bất kì số nào trong các số $a_1, ..., a_n$ thì dãy còn lại vẫn thỏa điều kiện. (2)
Từ (1) và (2) ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 10.32. Các số tự nhiên từ 1 đến 101 được viết vào bảng vuông 101×101, mỗi số viết đúng 101 lần.

(a) Gọi s là tổng số cột và số dòng chứa các số 1. Chứng minh $s \geq 21$.

(b) Chứng minh rằng có một dòng hoặc một cột chứa ít nhất 11 số khác nhau.

Lời giải:

(a) Giả sử có m dòng và k cột chứa các số 1, $m + k \leq 20$. Khi đó số số 1 chứa được nhiều nhất trong m dòng và k cột này là $m \cdot k \leq \frac{1}{4}(m + k)^2 < 101$. Vô lý. Vậy $s = m + k \geq 21$.

(b) Giả sử ngược lại, không có dòng nào hoặc cột nào chứ 11 số khác nhau. Gọi a_k là tổng số dòng và số cột chứa các chữ số k. Theo câu a ta có $a_k \geq 21$. Khi đó $a_1 + a_2 + \cdots a_{101} \geq 2121$.
Nhưng nếu mỗi dòng và mỗi cột chứa không quá 10 số khác nhau thì ta có $a_1 + a_2 + \cdots + a_{101} \leq 202 \cdot 10 = 2020$. (Mâu thuẫn).

Ví dụ 10.33. Một nhà triển lãm có hình làm giá đều, trong đó có 49 phòng là các các tam giác đều có được bằng các cạnh song song với cạnh như hình vẽ. Một người tham quan đi từ phòng này qua phòng khác chung cạnh và không quay lại phòng cũ.

(a) Người đó có thể đi xem hết được các phòng hay không?

(b) Số phòng tối đa người đó xem được là bao nhiêu phòng.

***Lời giải*:**

(a) Giả sử người đó đi hết được các phòng. Xét các phòng ở đỉnh, thì các phòng này chỉ có một lối ra vào nên chỉ có thể là phòng xuất phát hoặc kết thúc. Tuy nhiên có đến 3 phòng nên không thể được.

(b) Tô màu các tam giác xen kẽ trắng đen, khi đó từ một phòng đen sẽ vào phòng trắng và ngược lại. Ta thấy có 26 phòng đen, 23 phòng trắng (hoặc 26 phòng đen, 23 phòng trắng).
Khi đó số phòng tối đa đi được là $23 \times 2 + 1 = 47$ phòng.

Ví dụ 10.34. Tìm tất cả các giả trị của $n \geq 3$ sao cho tồn tại n điểm trong mặt phẳng sao cho ba điểm bất kì đều tạo thành một tam giác vuông.

***Lời giải*:**

(a) Nếu $n = 3$ xét 3 điểm tạo thành tam giác vuông.

(b) Nếu $n = 4$ xét 4 điểm tạo thành hình chữ nhật.

(c) Nếu $n = 5$. Chọn A, B là hai điểm có khoảng cách lớn nhất. Khi đó các điểm còn lại phải thuộc đường tròn đường kính A, B. Khi đó có 2 điểm cùng thuộc một nửa đường tròn, hai điểm này và điểm A không tạo thành tam giác vuông. Do đó $n = 5$ không thỏa, tất nhiên $n > 5$ cũng không thỏa.

(d) Vậy giá trị n cần tìm là $3, 4$.

Ví dụ 10.35. Cho $X = \{1, 2, \cdots, 168, 169\}$. A là một tập có 84 phần tử của X sao cho không có hai phần tử nào có tổng bằng 169. Chứng minh rằng A chứa ít nhất một số chính phương.

Lời giải:

(a) Nếu A chứa 169 thì ta có điều cần chứng minh.

(b) Xét 84 cặp số $(1, 168), (2, 167), \cdots, (84, 85)$ có 84 cặp. Nếu có hai phần tử nào của A cùng thuộc một cặp thì vô lý giả thiết. Do đó trong mỗi cặp có đúng một phần tử thuộc A, khi đó cặp $(25, 144)$ sẽ có một phần tử thuộc A, mà 25, 144 đều là các số chính phương. Ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 10.36. Cho n là số nguyên dương lẻ. Viết các số $1, 2, \ldots, 2n$ lên bảng đen. Sau đó ta xóa hai số a, b bất kỳ và viết lên bảng số $|a - b|$. Thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng chỉ còn đúng một số. Chứng minh rằng số còn lại trên bảng là số lẻ.

Lời giải:

Gọi $S(n)$ là tổng của tất cả các số còn lại trên bảng đen sau n bước.
Ban đầu tổng có giá trị $S(0) = 1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n + 1)$ là số lẻ.
Giả sử $a > b$, như vậy khi xóa đi hai số a, b và viết lên bảng số $|a - b|$, tổng S sẽ giảm đi $a + b - (a - b) = 2b$, là một số chẵn. Do đó, tính chẵn lẻ của $S(n)$ là bất biến và ta luôn có $S(n) \equiv 1 (\mathrm{mod} 2)$. Vậy số còn lại trên bảng là số lẻ.

Ví dụ 10.37. Trên bảng có hai số 2 và 3. Thực hiện việc ghi số theo quy tắc sau: Nếu trên bảng có hai số a, b thì được phép ghi thêm số $c = a + b + ab$. Hỏi bằng cách đó có thể ghi được các số 2022 và 2312 hay không?

Lời giải:

Dãy các số được viết là

$$2, 3, 11, 35, 47 \ldots$$

Dễ dàng chứng minh được các số được viết thêm trên bảng đều chia cho 3 dư 2. Bất biến trên cho phép ta loại trừ số 2022, tuy nhiên không cho phép ta loại trừ số 2312. Ta cần đi tìm một bất biến khác. Quan sát các số viết được và quy tắc viết thêm số, ta có

$$c = a + b + ab \Rightarrow c + 1 = (a + 1)(b + 1)$$

và nếu cộng thêm 1 vào các số thuộc dãy trên ta có dãy mới

$$3, 4, 12, 36, 48, \ldots$$

Như vậy, khi cộng thêm 1 vào các số viết thêm thì các số này đều có dạng $2^x.3^y$ với $x, y \in \mathbb{N}$. Do $2312 + 1 = 2313 = 3^2 \cdot 257$ nên không thuộc dãy các số viết được. Vậy không thể viết được các số 2022 và 2312.

Ví dụ 10.38. (JBMO 1998) Hỏi có tồn tại hay không 16 số có ba chữ số tạo thành từ ba chữ số phân biệt cho trước mà không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 16?

***Lời giải*:**
Câu trả lời là phủ định. Giả sử tồn tại các số thỏa mãn đề bài thì vì chúng có số dư đôi một khác nhau nên sẽ có đầy đủ các số dư $0, 1, 2, 3, \ldots, 15$. Điều này có nghĩa là trong đó, có 8 số chẵn và 8 số lẻ. Suy ra, ba chữ số a, b, c để tạo thành các số đã cho không thể có cùng tính chẵn lẻ. Ta có hai trường hợp:

(a) Trong các số a, b, c, có hai số chẵn là a, b và số c lẻ. Ta có tất cả 9 số lẻ tạo thành từ các chữ số này là: $aac, abc, acc, bac, bbc, bcc, cac, cbc, ccc$. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_9$ là số có hai chữ số tạo thành bằng cách xóa đi chữ số cuối từ dãy trên. Rõ ràng số $\overline{a_i k}$ và $\overline{a_j k}$ với $i \neq j$ khác số dư với nhau theo modulo 16 nếu như hiệu của chúng không chia hết cho 16, suy ra $a_i - a_j$ không chia hết cho 8. Tuy nhiên, ta lại có đến 9 số nên điều này không thể xảy theo nguyên lý chuồng bồ câu.

(b) Trong các số a, b, c, có hai số lẻ là a, b và số c chẵn: cũng dẫn đến mâu thuẫn tương tự.

Vậy không tồn tại các số thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 10.39. (JBMO 2000) Trong một giải thi đấu tennis, số lượng nam gấp đôi số nữ. Mỗi cặp vận động viên thi đấu với nhau đúng một lần và không có trận hòa, chỉ có thắng – thua. Tỷ số giữa trận thắng của nữ và của nam là $\frac{7}{5}$. Hỏi có bao nhiêu vận động viên trong giải thi đấu?

Lời giải:

Gọi số nam là $2n$, số nữ là n và tổng số vận động viên là $3n$. Tổng số trận đấu là $\dfrac{3n(3n-1)}{2}$.

Theo giả thiết thì số trận thắng bởi nam là

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{3n(3n-1)}{2} = \frac{5n(3n-1)}{8}.$$

Số trận đấu giữa các nam là $\dfrac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ và rõ ràng số trận này không vượt quá số trận thắng của các nam. Suy ra

$$\frac{5n(3n-1)}{8} \geq n(2n-1) \Leftrightarrow n \leq 3.$$

Mặt khác, $5n(3n-1)$ phải chia hết cho 8 nên $n = 3$. Do đó, số vận động viên của giải đấu là 9.

Ví dụ 10.40. (JBMO 2006) Xét bảng ô vuông kích thước $2n \times 2n$ với n nguyên dương. Người ta xóa đi một số ô của bảng theo quy tắc sau đây:

(a) Nếu $1 \leq i \leq n$ thì ở dòng thứ i, xóa $2(i-1)$ ô ở giữa.

(b) Nếu $n+1 \leq i \leq 2n$ thì ở dòng thứ i, xóa đi $2(2n-i)$ ô ở giữa.

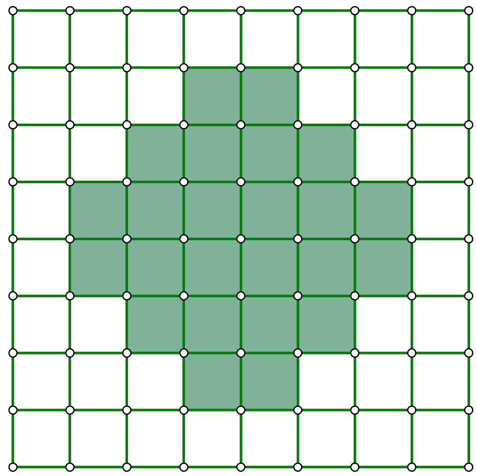
Hỏi có thể phủ được bảng bởi tối đa bao nhiêu hình chữ nhật kích thước 2×1 và 1×2 (không nhất thiết phải phủ kín toàn bộ) sao cho không có hai hình chữ nhật nào chồng lên nhau?

Lời giải:

Với mọi bảng kích thước $2n \times 2n$, tổng số ô bị xóa đi là

$$2 \times 2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1) = 2n(n-1).$$

Bảng sẽ còn lại $(2n)^2 - 2n(n-1) = 2n(n+1)$ ô, tức là phủ được tối đa $n(n+1)$ ô vuông.



Với $n = 1, 2, 3, 4$, ta có thể kiểm tra trực tiếp được rằng kết quả lần lượt sẽ là $2, 6, 12, 20$ bởi khi đó ta có thể phủ kín toàn bộ bảng. Còn với $n \geq 4$, ta xét hai trường hợp:

(a) Nếu n lẻ, khi đó ta chia bảng $2n \times 2n$ đã cho thành 4 hình vuông nhỏ thì rõ ràng, mỗi hình sẽ có $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ô còn trống. Tiếp theo, ta tô màu theo dạng bàn cờ cho bảng này (ô ở góc thì tô xanh), ta sẽ có tất cả $\dfrac{(n+1)^2}{4}$ ô xanh và $\dfrac{n^2-1}{4}$ ô trắng. Rõ ràng mỗi hình chữ nhật khi đặt lên bảng sẽ chứa một ô xanh và một ô trắng nên số cặp ô trắng – xanh tối đa trong hình vuông con là $\dfrac{n^2-1}{4}$, và tương ứng sẽ có tối đa

$$4 \cdot \frac{n^2-1}{4} = n^2 - 1$$

hình chữ nhật $1 \times 2, 2 \times 1$ phủ được trên bảng. Ngoài ra, giữa các hình vuông con cạnh nhau, ta còn có hai ô màu xanh cạnh nhau nên ta có thể lát thêm vào đó tổng cộng 4 hình chữ nhật nữa, tổng cộng là $n^2 - 1 + 4 = n^2 + 3$.

(b) Nếu n chẵn, bằng cách tương tự trên, ta phủ được hình bởi tối đa $n^2 + 4$ ô.

Tóm lại,

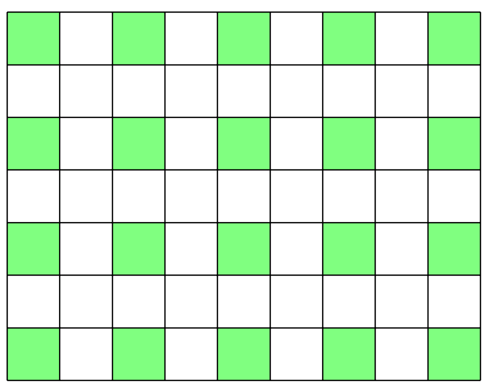
(a) Với $n = 1, 2, 3, 4$, đáp số lần lượt là $2, 6, 12, 20$.

(b) Với $n > 4$ và n lẻ thì đáp số là $n^2 + 3$.

(c) Với $n > 4$ và n chẵn thì đáp số là $n^2 + 4$.

Ví dụ 10.41. Một sân hình chữ nhật được lát kín không đè lên nhau bởi các viên gạch 1×4 và 2×2. Một viên gạch 2×2 được lát trong sân đã bị vỡ thay vào đó ta còn dư đúng 1 viên gạch 1×4. Liệu có thể dùng viên gạch 1×4 này cùng với số gạch đang được lát trong sân để lát kín sân được không?

***Lời giải*:**
Tô xanh các ô vuông nhỏ ở tọa độ $(2a + 1, 2b + 1)$ như hình vẽ. Ta nhận thấy viên gạch 2×2 luôn chiếm đúng 1 ô xanh còn viên gạch 1×4 sẽ chiếm 0 hoặc 2 ô xanh. Giả sử ban đầu trên nền sân được lát kín bởi x viên gạch 1×4 và y viên gạch 2×2. Vì 1 viên gạch 1×4 chiếm 0 hoặc 2 ô xanh nên số ô xanh được chiếm bởi các viên gạch 1×4 phải là số chẵn. Gọi 2a là số ô xanh bị chiếm bởi x viên gạch 1×4. Vậy số ô xanh trên sân là $2a + y$



Giả sử có thể lát kín sân sau khi thay thế một viên gạch 2×2 bởi 1 viên gạch 1×4 thì lúc này trên sân có $x + 1$ viên gạch 1×4 và $y - 1$ viên gạch 2×2. $y - 1$ viên gạch 2×2 sẽ chiếm $y - 1$ ô xanh và $x + 1$ viên gạch 1×4 sẽ chiếm $2a + 1$ ô xanh còn lại, điều này là mâu thuẫn vì số ô xanh được chiếm bởi các viên gạch 1×4 phải là số chẵn. Vậy câu trả lời là phủ định.

Ví dụ 10.42. Có 67 học sinh tham gia làm một bài thi, bài thi gồm 6 câu đánh số thứ tự từ 1 đến 6. Ở câu thứ i nếu học sinh trả lời đúng sẽ được i điểm còn nếu sai hoặc không trả lời sẽ bì trừ i điểm ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hiệu điểm số hai bài thi.

b) Chứng minh rằng có ít nhất 4 thí sinh có cùng điểm.

b) Chứng minh rằng có ít nhất hai thí sinh có cùng số điểm ở mỗi câu hỏi.

***Lời giải*:**

a) Dễ thấy hiệu số điểm giữa hai bài thi là một số chẵn và số điểm này nhỏ nhất bằng 2. Hai bài thi có hiệu số điểm bằng 2 nếu hai học sinh có câu trả lời khác nhau ở câu 1 và cùng câu trả lời ở các câu còn lại.

b) Số điểm lớn nhất mà một học sinh có thể đạt được là 1+2+3+4+5+6=21 và số điểm nhỏ nhất là -21. Vì số điểm một học sinh bất kì đạt được chỉ có thể nằm trong tập $S = \{-21, -19, -17, ..., 17, 19, 21\}$, tập này có 22 phần tử. Nếu mỗi số điểm có nhiều nhất 3 học sinh đạt được thì số học sinh không quá 66, vô lí. Vậy có ít nhất 4 học sinh đạt được cùng một số điểm.

c) Số điểm mỗi học sinh đạt được là một cách chọn các dấu +, - trong tổng

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6.$$

Có tất cả $2^6 = 64$ cách chọn các dấu +.- trong tổng trên nên có tất cả 64 khả năng về số điểm ở từng câu trả lời mà một học sinh có thể đạt được. Vì có 67 học sinh nên có ít nhất hai học sinh có cùng số điểm ở mỗi câu hỏi.

Ví dụ 10.43. Mỗi điểm trong số 2009 điểm cho trước trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Biết rằng mỗi đường tròn đơn vị có tâm màu xanh đều đi qua đúng hai điểm đỏ. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu điểm xanh?

***Lời giải*:**

Rõ ràng mỗi cặp điểm đỏ thuộc tối đa hai đường tròn có tâm màu xanh. Gọi n là số điểm đỏ thì số cặp tương ứng sẽ là $\frac{n(n-1)}{2}$ và sẽ có không quá $n(n-1)$ đường tròn có tâm xanh. Suy ra tổng số điểm không vượt quá

$$n(n-1)+n=n^2$$

điểm. Do đó $n^2 \geq 2009$ hay $n \geq 45$. Khi đó, số điểm xanh không vượt quá $2009-45=1964$ điểm.

Ta sẽ chỉ ra cách xây dựng thỏa đề bài. Xếp 45 điểm đỏ phân biệt lên một đoạn thẳng có độ dài là 1. Sau đó vẽ 45 đường tròn đơn vị có tâm đỏ. Rõ ràng chúng sẽ đôi một cắt nhau và các giao điểm đều phân biệt. Tổng số giao điểm là $45 \cdot 44 = 1980$. Ta sẽ tô màu xanh cho đúng 1964 giao điểm trong số đó thì rõ ràng mỗi đường tròn đơn vị có tâm là điểm xanh sẽ đi qua đúng hai điểm đỏ. Do đó, mô hình này thỏa mãn đề bài. Vậy số điểm xanh lớn nhất là 1964.

Ví dụ 10.44. (JBMO 2012) Trên bảng, có n điểm đôi một nối với nhau bởi các đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng được tô bởi một trong n màu phân biệt. Với mỗi ba màu tùy ý, tồn tại ba điểm mà ba đoạn nối chúng được tô tương ứng bởi ba màu đó. Hỏi giá trị của n có thể là

(a) $n=6$?

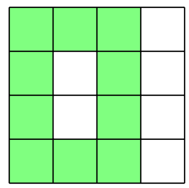
(b) $n=7$ hay không?

***Lời giải*:**

(a) Câu trả lời là phủ định. Giả sử ngược lại rằng có thể có thể tô màu thỏa mãn đề bài. Xét một màu trong số các màu, giả sử là xanh. Mỗi cạnh xanh là cạnh của 4 tam giác có đỉnh trong số các điểm đã cho. Ngoài ra, có tất cả $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ cặp hai màu khác màu xanh và ứng với mỗi cặp như thế, cùng với màu xanh thì luôn có một tam giác nhận chúng làm ba cạnh.

Suy ra phải có ít nhất 3 cạnh màu xanh, vì nếu không thì số tam giác nhận cạnh xanh là cạnh của nó sẽ không quá $2\cdot 4=8$, ít hơn số lượng ở trên. Rõ ràng điều này cũng đúng với một màu tùy ý nên suy ra tổng số cạnh tạo thành ít nhất là $6 \cdot 3 = 18$, trong khi chỉ có $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ cạnh mà thôi. Điều mâu thuẫn này cho thấy không thể có câu trả lời ứng với $n = 6$.

(b) Câu trả lời là khẳng định. Ta xét mô hình bên dưới với các điểm tạo thành đa giác đều và các cạnh, đường chéo song song với nhau sẽ được đánh cùng một số. Khi đó rõ ràng mỗi màu trong số các màu sẽ được dùng đúng 3 lần. Do tính đối xứng nên ta sẽ chỉ cần xét các bộ ba các màu và có chứa màu 1.



Đó là các bộ:

$$(1,2,3) \to (CEG); (1,2,4) \to (ABF); (1,2,5) \to (ABG);$$
$$(1,2,6) \to (ADG); (1,2,7) \to (BDF); (1,3,4) \to (BCE);$$
$$(1,3,5) \to (BCF); (1,3,6) \to (ADG); (1,3,7) \to (AEG);$$
$$(1,4,5) \to (CDE); (1,4,6) \to (BEF); (1,4,7) \to (FGA);$$
$$(1,5,6) \to (CEF); (1,5,7) \to (BFG); (1,6,7) \to (ACE).$$

Do tính bình đẳng nên các bộ khác không chưa 1 vẫn tồn tại và vì thế nên mô hình trên thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Ví dụ 10.45. Tám số tự nhiên liên tiếp được chia vào hai tập, mỗi tập gồm bốn số. Chứng minh rằng nếu tổng bình phương của các số trong mỗi tập bằng nhau thì tổng các số trong mỗi tập này cũng bằng nhau.

Lời giải:

(a) Gọi $a, a+1, a+2, ..., a+7$ là tám số tự nhiên liên tiếp. Tổng bình phương của tám số này bằng $8a^2 + 56a + 140$ dẫn đến tổng bình phương của các số trong mỗi tập bằng $4a^2 + 28a + 70$. Gọi X là tập có chứa số $a + 7$ và gọi $a + i, a + j, a + k$ là ba số còn lại của tập X. Khi đó

$$3a^2 + 2a(i + j + k) + i^2 + j^2 + k^2 = 4a^2 + 28a + 70 - (a + 7)^2 = 3a^2 + 14a + 21,$$

dẫn đến

$$2a(i + j + k - 7) = 21 - (i^2 + j^2 + k^2) \quad (*).$$

(b) Đến đây để chứng minh tổng các số ở hai tập bằng nhau ta chỉ cần chỉ ra rằng $i + j + k = 7$.

(c) Giả sử rằng $i + j + k \geq 8$, khi đó $i^2 + j^2 + k^2 \geq \dfrac{(i + j + k)^2}{3} \geq \dfrac{64}{3} > 21$ dẫn đến vế phải của (*) là số âm, mâu thuẫn.

(d) Giả sử $i + j + k \leq 6$, khi đó vì $21 - (i^2 + j^2 + k^2)$ là số chẵn nên $i^2 + j^2 + k^2$ là số lẻ. Dẫn đến (i, j, k) là các bộ $(0, 1, 2), (0, 1, 4)$ hoặc $(0, 2, 3)$ và các hoán vị. Trong các trường hợp này

$$21 - (i^2 + j^2 + k^2) > 0 > 2a(i + j + k - 7),$$

mâu thuẫn. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 10.46. Cho 3 trường, mỗi trường có n học sinh, biết rằng cứ mỗi học sinh thì quen ít nhất $n + 1$ học sinh của hai trường khác. Chứng minh rằng có thể chọn được từ mỗi trường một bạn sao cho 3 bạn này đôi một quen nhau.

***Lời giải*:**

Giả sử 3 trường là X, Y, Z. Tồn tại một người có số người quen ở cùng một trường khác là nhiều nhất, giả sử A thuộc X có số người quen ở trường Y nhiều nhất là k. Khi đó số người quen của A ở Z ít nhất là $n + 1 - k$. Nếu nhóm người quen A ở Z quen với số người quen A ở X có hai người quen nhau thì ta có điều chứng minh. Ngược lại xét người quen A ở Z, đặt là B quen số người ở Y tối đa là $n - k$, khi đó B quen ở X ít nhất là $n + 1 - (n - k) = k + 1$, mâu thuẫn với cách chọn A. (Mâu thuẫn).

Ví dụ 10.47. Tập hợp M chứa 4 số nguyên phân biệt được gọi là tập *liên kết* nếu với mỗi $x \in M$ thì ít nhất một trong hai số $x-1, x+1$ thuộc M. Gọi U_n là số tập con liên kết của tập $\{1, 2, ..., n\}$.

(a) Tính U_7.

(b) Xác định giá trị nhỏ nhất của n sao cho $U_n \geq 2019$.

Lời giải:

Gọi $a < b < c < d$ là 4 phần tử của một tập liên kết M . Vì $a-1 \notin M$ nên $a+1 \in M$, suy ra $b = a+1$. Vì $d+1 \notin M$ nên $d-1 \in M$, suy ra $c = d-1$. Như vậy một tập liên kết sẽ có dạng $\{a, a+1, d-1, d\}$, với $d - a > 2$.

(a) Có 10 tập con liên kết của tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ là

$$\begin{aligned}&\{1,2,3,4\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,5,6\}, \{1,2,6,7\},\\ &\{2,3,4,5\}, \{2,3,5,6\}, \{2,3,6,7\},\\ &\{3,4,5,6\}, \{3,4,6,7\}, \{4,5,6,7\}.\end{aligned}$$

(b) Gọi $D = d - a + 1$ là *đường kính* của tập $\{a, b = a+1, c = d-1, d\}$, hiển nhiên $3 < D \leq n - 1 + 1 = n$. Với $D = 4$ sẽ có $n-3$ tập liên kết, với $D = 5$ sẽ có $n-4$ tập liên kết,..., với $D = n$ sẽ có đúng một tập liên kết. Do đó

$$U_n = 1 + 2 + ... + (n-3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}.$$

Do đó $U_n \geq 2019 \Leftrightarrow (n-3)(n-2) \geq 4038$. Như vậy giá trị nhỏ nhất của n là $n = 67$.

Ví dụ 10.48. Tìm các tập con A khác rỗng của tập $\{2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ sao cho với mọi $n \in A$ thì cả $n^2 + 4$ và $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ cũng thuộc A.

Lời giải:

(a) Gọi m là phần tử nhỏ nhất của A, vì $\lfloor \sqrt{m} \rfloor + 1 \in A$ nên $m \leq \lfloor \sqrt{m} \rfloor + 1 \leq \sqrt{m} + 1$. Từ đó suy ra $m = 2$.

(b) Với mọi $n \geq 2$ ta có $n^2 < n^2 + 4 < (n+1)^2$ nên $\lfloor\sqrt{n^2+4}\rfloor = n$. Từ giả thiết $n \in A$ thì $n^2 + 4 \in A$ và do đó $\lfloor\sqrt{n^2+4}\rfloor + 1 \in A$, suy ra $n + 1 \in A$.

(c) Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được rằng $A = \{2, 3, 4, 5, 6, ...\}$.

Ví dụ 10.49. Cho $n > 1$ là một số nguyên dương. Đặt $2n$ quân cờ vào một bàn cờ kích thước $n \times n$, mỗi quân cờ nằm trên một ô vuông. Chứng minh rằng tồn tại 4 quân cờ nằm tại 4 đỉnh của một hình bình hành.

***Lời giải*:**

(a) Gọi m là số dòng chứa ít nhất hai quân cờ, khi đó còn lại $n - m$ dòng chứa nhiều nhất một quân cờ. Gọi một *khoảng cách cực tiểu* là khoảng cách từ quân cờ ngoài cùng bên trái đến quân cờ tiếp theo trong mỗi dòng của m dòng trên. Khi đó có m khoảng cách cực tiểu tất cả, giá trị của các khoảng cách cực tiểu chỉ có thể là $1, 2, ..., n-1$.

(b) Số quân cờ trên tất cả m dòng trên ít nhất là $2n - (n - m) = n + m$. Khi đặt $m+n$ quân cờ này vào m dòng (mỗi dòng có ít nhất hai quân) thì theo nguyên lý Dirichlet phải có hai dòng mà hai khoảng cách cực tiểu bằng nhau. Khi đó 4 quân cờ này sẽ là 4 đỉnh của một hình bình hành, điều phải chứng minh.

Ví dụ 10.50. Trong một buổi tiệc, có n bạn nam và n bạn nữ được chia thành n cặp. Người ta quan sát thấy rằng trong một cặp bất kì hai bạn có chiều cao chênh lệch nhau không hơn $9cm$. Nếu bắt cặp k bạn nam cao nhất tương ứng với k bạn nữ cao nhất, hãy chứng minh rằng trong mỗi cặp này hai bạn cũng chênh lệch nhau không quá $9cm$, với mỗi $k = 1, 2, ..., n$.

***Lời giải*:**

(a) Gọi $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ lần lượt là chiều cao của các bạn nam và $g_1 \geq g_2 \geq ... \geq g_n$ lần lượt là chiều cao của các bạn nữ. Giả sử rằng tồn tại $k \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $|b_k - g_k| \geq 10$. Không mất tổng quát giả sử $b_k - g_k \geq 10$, khi đó $b_i - g_j \geq 10$ với mỗi $1 \leq i \leq k$ và $k \leq j \leq n$.

(b) Xét các bạn nam có chiều cao b_i, với $1 \leq i \leq k$ và các bạn nữ có chiều cao g_j, với $k \leq j \leq n$. Theo nguyên lí Dirichlet trong $n+1$ bạn này phải có hai bạn lập thành một cặp trong n cặp ban đầu. Tuy nhiên $b_i - g_j \geq 10$ sẽ mâu thuẫn với giả thiết là trong n cặp đầu tiên không có cặp nào chênh lệch nhau quá $9cm$. Như vậy $|b_k - g_k| \leq 9$ với mọi k, bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 10.51. Một bảng $2n \times 2n$ ô, người ta đánh dấu bất kì $3n$ ô trong bảng. Chứng minh rằng tồn tại n dòng và n cột sao cho $3n$ ô được đánh dấu thuộc n dòng và n cột này.

***Lời giải*:**

Chọn n dòng sao cho số ô được tô là lớn nhất, ta chứng minh rằng số ô được tô trong n dòng này là không ít hơn $2n$ ô.

Thực vậy giả sử số ô được tô là ít hơn $2n$, khi đó n dòng còn lại có nhiều hơn n ô được tô, nên có ít nhất một một dòng có 2 ô được tô. Do đó n dòng đã chọn, mỗi dòng ít nhất 2 ô được tô nên tổng số ô hơn hoặc bằng $2n$ (mâu thuẫn).

Vậy ta chỉ cần chọn n cột chứa các ô được tô màu nhưng chưa được chọn trong n dòng trên thì sẽ có điều cần chứng minh.

Ví dụ 10.52. (JBMO 2016) Một bảng kích thước 5×5 được gọi là "tốt" nếu như mỗi ô của nó có chứa một đúng bốn giá trị phân biệt, và mỗi giá trị xuất hiện đúng một lần trong tất cả các bảng con 2×2 của bảng đã cho. Tổng tất cả các số có trên bảng được gọi là "giá" của bảng. Với mỗi bộ bốn số thực, ta có thể xây dựng tất cả các bảng tốt và tính giá của nó. Tính số giá phân biệt lớn nhất có thể có.

***Lời giải*:**

Ta sẽ chứng minh rằng số giá phân biệt lớn nhất là 60. Ta có nhận xét sau:

Nhận xét. Trong mỗi bảng tốt, mỗi hàng chứa đúng hai số trong các số hoặc mỗi cột chứa đúng hai số trong các số.

Thật vậy, ta thấy mỗi hàng của bảng đều chứa ít nhất hai số (vì nếu chứa toàn bộ là một số thì mâu thuẫn với giả thiết). Khi đó, nếu toàn bộ các hàng đều chứa hai số thì nhận xét đúng.

Giả sử ngược lại là có hàng R chứa ít nhất ba số trong bốn số của bảng là x, y, z, t. Khi đó, các số đó phải có nằm ở vị trí liên tiếp nào đó trên hàng, giả sử là x, y, z liên tiếp. Theo giả thiết thì trong mỗi bảng 2×2, ta đều có đủ bốn giá trị nên trong hàng phía trên và phía dưới của R phải chứa z, t, x theo đúng thứ tự đó, và tương tự là x, y, z. Ta có bảng như bên dưới

$$\begin{pmatrix} * & x & y & z & * \\ * & z & t & x & * \\ * & x & y & z & * \\ * & z & t & x & * \\ * & x & y & z & * \end{pmatrix}$$

Điền thêm các ô còn lại, dễ thấy rằng các cột đều chứa đúng hai số. Nhận xét được chứng minh.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử mỗi hàng của bảng đều có đúng hai số (nếu không thì có thể xoay bảng lại). Nếu không xét hàng đầu tiên và cột đầu tiên, ta sẽ có bảng 4×4 mà trong đó, mỗi số trong x, y, z, t đều xuất hiện 4 lần nên tổng các số trong bảng này là $4(x + y + z + t)$. Do đó, ta chỉ cần tính xem có bao nhiêu cách khác nhau để đặt các số lên hàng đầu tiên R_1 và cột đầu tiên C_1. Gọi a, b, c, d là số lần xuất hiện của các số x, y, z, t thì khi đó, tổng tất cả các số của bảng sẽ là

$$4(x + y + z + t) + xa + yb + zc + td.$$

Nếu hàng $1 - 3 - 5$ chứa các số x, y với x ở vị trí đầu tiên của hàng 1 thì các hàng $2 - 4$ sẽ chứa các số z, t (theo giả sử ở trên). Khi đó, ta có $a + b = 7$ và $a \geq 3, b \geq 2$, $c + d = 2$ và $c \geq d$.

Khi đó $(a, b) = (5, 2), (4, 3)$ tương ứng với $(c, d) = (2, 0), (1, 1)$. Suy ra (a, b, c, d) sẽ nhận các bộ là

$$(5, 2, 2, 0), (5, 2, 1, 1), (4, 3, 2, 0), (4, 3, 1, 1).$$

Tổng số hoán vị của các bộ là

$$\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + 4! + \frac{4!}{2!} = 60.$$

Bằng cách chọn $x = 10^3, y = 10^2, z = 10, t = 1$ thì dễ thấy rằng các tổng tương ứng với mỗi hoán vị của bộ số trên đều phân biệt, nghĩa là giá của các bảng đều phân biệt. Vậy số lượng giá tối đa là 60.

Ví dụ 10.53. Dùng 12 màu để tô tất cả các cạnh và đường chéo của một thập nhị giác đều (12 cạnh), mỗi đoạn thẳng được tô bằng một màu. Khi đó khẳng định *"với 3 màu bất kì luôn tồn tại một tam giác có đỉnh là đỉnh của thập nhị giác đã cho đồng thời các cạnh của tam giác này được tô bởi 3 màu trên "* là đúng hay sai? Hãy giải thích rõ câu trả lời.

***Lời giải*:**

(a) Một đa giác 12 đỉnh sẽ cho 12 cạnh và 54 đường chéo, do đó có 66 đoạn thẳng được tô màu. Với 12 màu, tồn tại một màu X sao cho nó được sử dụng để tô nhiều nhất 5 đoạn thẳng. Với mỗi đoạn thẳng được tô bởi màu X sẽ có 10 tam giác nhận đoạn thẳng này làm cạnh. Do đó có nhiều nhất 50 tam giác có ít nhất một cạnh được tô bởi màu X.

(b) Dễ thấy khẳng định trên là sai vì nếu ngược lại thì ta xét màu X, còn lại 11 màu nên sẽ có $\dfrac{11.10}{2} = 55$ tam giác có ít nhất một cạnh được tô bằng màu X, mâu thuẫn.

Ví dụ 10.54. Điền các số 1,2,3,...,121 vào một bảng ô vuông kích thước 11×11 sao cho mỗi ô chứa một số. Tồn tại hay không một cách điền sao cho hai số tự nhiên liên tiếp sẽ được điền vào hai ô có chung một cạnh và các tất cả các số chính phương thì nằm trong cùng một cột?

***Lời giải*:**

(a) Giả sử tồn tại một cách điền số vào các ô thỏa yêu cầu đặt ra. Khi đó bảng ô vuông được chia thành hai phần ngăn cách nhau bởi cột điền các số chính phương. Một phần chứa $11n$ ô vuông 1×1, và phần còn lại chứa $110 - 11n$ ô vuông 1×1 , với $0 \leq n \leq 5$.

(b) Để ý rằng các số tự nhiên nằm giữa hai số chính phương liên tiếp a^2 và $(a+1)^2$ sẽ cùng nằm về một phần và dó đó các số tự nhiên nằm giữa $(a+1)^2$ và $(a+2)^2$ sẽ nằm ở phần còn lại.

(c) Số lượng các số tự nhiên nằm giữa 1 và 4, 4 và 9, 9 và 16,...,100 và 121 lần lượt là 2,4,6,8,...,20. Do đó một phần sẽ chứa 2+6+10+14+18=50 số, phần còn lại chứa 4+8+12+16+20=60 số. Cả 50 và 60 đều không chia hết cho 11, mâu thuẫn. Vậy không tồn tại cách điền số thỏa yêu cầu đề bài.

Ví dụ 10.55. Tất cả các điểm trong mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật mà tất cả cấc đỉnh của nó được tô bằng cùng một màu.

***Lời giải*:**

(a) Xét một hệ trục tọa độ Descartes bất kì với các điểm có tọa độ (x, y), với $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ và $y = 1, 2, 3$. Trên đường thẳng $y = 1$ có ít nhất 4 điểm A, B, C, D được tô cùng một màu, gọi đó là màu X.

(b) Trên đường thẳng $y = 2$ nếu có hơn một điểm có cùng hoành độ với các điểm A, B, C, D được tô bằng màu X thì dễ dàng chọn ra được một hình chữ nhật thỏa yêu cầu đề bài. Tương tự trên đường thẳng $y = 3$ cũng vậy.

(c) Ngược lại, trên mỗi đường thẳng $y = 2$ và $y = 3$ có ít nhất 3 điểm có cùng hoành độ với các điểm A, B, C, D được tô bằng màu Y khác với màu X. Khi đó theo nguyên lý Dirichlet sẽ trên mỗi đường sẽ có hai điểm cùng hoành độ được tô cùng màu. Bốn điểm này là bốn đỉnh của một hình chữ nhật được tô bằng màu Y, bài toán được chứng minh.

Ví dụ 10.56. Cho 2 số nguyên dương m, n. Xét bảng ô vuông kích thước $2m + 1 \times 2n + 1$, ban đầu trong mỗi ô vuông 1×1 đặt một con kiến. Biết rằng sau đó mỗi con kiến di chuyển sang một trong những ô vuông có chung cạnh với nó. Chứng minh rằng sau khi các con kiến di chuyển có một ô vuông không có con kiến nào.

***Lời giải*:**

(a) Điền vào ô vuông 1×1 ở dòng i và cột j số $(-1)^{i+j}$. Vì $2m + 1$ và $2n + 1$ là số lẻ nên số lượng ô vuông điền số 1 nhiều hơn số lượng ô vuông điền số -1 đúng 1 ô do đó trước khi các con kiến di chuyển số lượng kiến ở các ô có số -1 nhiều hơn số lượng kiến ở các ô được điền số 1 đúng 1 con.

(b) Sau bước di chuyển sẽ có hai con kiến ở ô mang số 1 chiếm giữ ô mang số -1 nên sẽ có một ô không còn chứa con kiến nào. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 10.57. Trong mặt phẳng cho 6 đường tròn phân biệt sao cho tâm của mỗi đường tròn nằm ngoài 5 đường tròn khác. Chứng minh rằng trong mặt phẳng không tồn tại một điểm nào nằm bên trong cả 6 đường tròn này.

***Lời giải*:**

(a) Gọi (C_i) có tâm O_i và bán kính r_i, với $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ là 6 đường tròn đã cho. Giả sử tồn tại một điểm P nằm bên trong cả 6 đường tròn này. Khi đó $O_iP < r_i$ với mọi $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Nối P với các điểm O_i khi đó tồn tại góc $\widehat{O_mPO_n} \leq 60^0$, với $m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(b) Xét ΔO_mPO_n , hoặc $O_mO_n \leq O_mP < r_m$ hoặc $O_mO_n \leq O_nP < r_n$. Dẫn đến hoặc O_n nằm bên trong (C_m) hoặc O_m nằm bên trong (C_n), mâu thuẫn. Vậy bài toán được chứng minh xong.

10.2 Bài tập rèn luyện

Bài 10.1 (Bình Thuận, 25–26).

Cho bàn cờ vua có 64 ô vuông như hình vẽ. Trong mỗi ô vuông của bàn cờ ghi ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 10 đồng thời hai số được ghi trong hai ô vuông