

# CÁC ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC PHẪNG

Đào Sơn Trà - Trình bày lại từ nguồn [Mathscope.org](https://mathscope.org)

*Ngày 7 tháng 10 năm 2018*



# Mục lục

<b>Chương 1. Các định lý hình học</b>	<b>5</b>
1.1 Các định lý về các điểm, đường thẳng . . . . .	5
1.2 Một số điểm và đường đặc biệt được xác định duy nhất với tam giác và tứ giác . . . . .	62



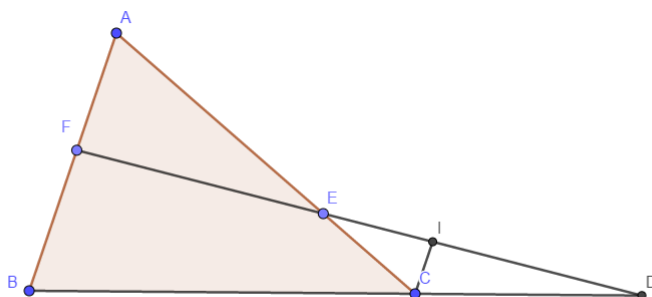
# Chương 1

## Các định lý hình học

### 1.1 Các định lý về các điểm, đường thẳng

**Định lý 1.1.1** (Định lý Menelaus-Dạng hình học) Cho tam giác  $ABC$ .  $D, E, F$  lần lượt nằm trên các đường thẳng  $BC, CA$  và  $AB$ . Khi đó các điểm  $D, E, F$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$

**Chứng minh.**



*Chiều thuận:* Giả sử  $D, E, F$  thẳng hàng. Lấy điểm  $I$  thuộc  $DE$  sao cho  $CI \parallel AB$ .

Áp dụng định lý *Thales* ta có:

$$\frac{EC}{EA} = \frac{IC}{FA}; \frac{DB}{DC} = \frac{FB}{IC} \Rightarrow \frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$$

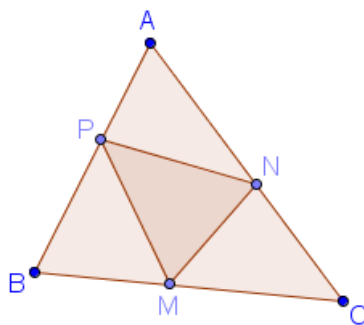
*Chiều đảo:* Giả sử các điểm  $D, E, F$  thỏa mãn  $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$ . Lấy  $F' \in AB$

sao cho  $D, E, F'$  thẳng hàng. Theo chiều thuận ta có  $\frac{F'A}{F'B} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$ , suy ra

$$\frac{F'A}{F'B} = \frac{FA}{FB}. \text{ Vậy } F \equiv F' \text{ hay } D, E, F \text{ thẳng hàng (đpcm)}$$

**Định lý 1.1.2** (Mở rộng định lý Menelaus theo diện tích) Cho tam giác  $ABC$ , các điểm  $M, N, P$  lần lượt nằm trên các đường thẳng  $BC, CA, AB$ . Khi đó  $\frac{S_{[MNP]}}{S_{[ABC]}} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{AP} - \overline{CM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{BP}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}}$ .

**Chứng minh.**



Ta có  $S_{[ABC]} = S_{[MAB]} + S_{[MCA]} = S_{[PMA]} + S_{[PBM]} + S_{[NMC]} + S_{[NAM]} = S_{[MNP]} + S_{[BMP]} + S_{[CNM]} + S_{[APN]}$

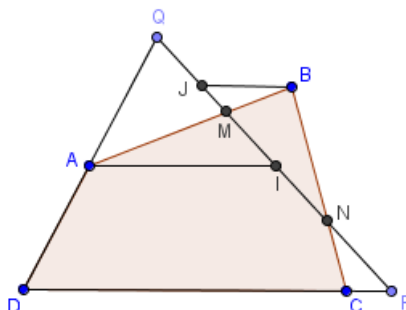
Mặt khác  $\frac{S_{[BMP]}}{S_{[ABC]}} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BP}}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}$ ;  $\frac{S_{[CNM]}}{S_{[ABC]}} = \frac{\overline{CN} \cdot \overline{CM}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}$ ;  $\frac{S_{[APN]}}{S_{[ABC]}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AN}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}$

Suy ra  $\frac{S_{[MNP]}}{S_{[ABC]}} = 1 - \frac{S_{[BMP]}}{S_{[ABC]}} - \frac{S_{[CNM]}}{S_{[ABC]}} - \frac{S_{[APN]}}{S_{[ABC]}} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{AP} - \overline{CM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{BP}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}}$

(đpcm)

**Định lý 1.1.3** (Định lý Menelaus cho tứ giác) Cho tứ giác  $ABCD$  và đường thẳng  $d$  cắt  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt ở  $M, N, P, Q$ . Khi đó  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$ .

**Chứng minh.**



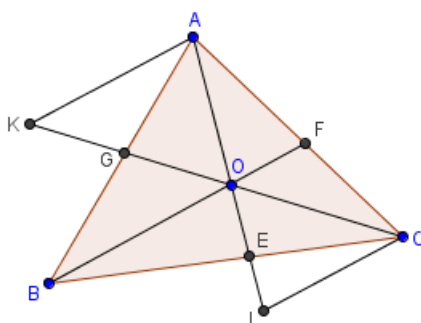
Trên  $d$  lấy  $I, J$  sao cho  $AI // BJ // CD$ .

Theo định lý Thales, ta có  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{JB}}$ ;  $\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{JB}}{\overline{PC}}$ ;  $\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{IA}}$ . Từ đó suy ra đpcm.

Chú ý: dạng đảo của định lý trên không đúng và định lý trên có thể mở rộng ra cho đa giác bất kì.

**Định lý 1.1.4** (Định lý Ceva) Cho tam giác  $ABC$ , các điểm  $E, F, G$  tương ứng nằm trên  $BC, CA, AB$ . Ba đường thẳng  $AE, BF, CG$  đồng quy tại một điểm  $O$  khi và chỉ khi  $\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = -1$ .

**Chứng minh.**



Thuận:

Giả sử ba đường thẳng  $AE, BF, CG$  đồng quy tại một điểm  $O$ . Từ  $A$  và  $C$ , kẻ các đường thẳng song song với  $BF$ , lần lượt cắt  $CG$  và  $AE$  tại  $K, I$  tương ứng.

Áp dụng định lý Thales, ta có:  $\frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{OK}}; \frac{\overline{CI}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{OK}} \Rightarrow \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{AK}}$ .

Các cặp tam giác đồng dạng  $IEC$  và  $OEB, AKG$  và  $BOG$ :  $\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{OI}}; \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{BO}}$

Do đó:  $\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{BO}} \cdot \frac{\overline{BO}}{\overline{OI}} \cdot \frac{\overline{CI}}{\overline{AK}} = -1$  (đpcm)

Đảo: chứng minh tương tự định lý Menelaus.

**Định lý 1.1.5** (Định lý Ceva dạng sin) Cho tam giác  $ABC$ , các điểm  $E, F, G$  tương ứng nằm trên  $BC, CA, AB$ . Ba đường thẳng  $AE, BF, CG$  đồng quy tại một điểm  $O$  khi và chỉ khi  $\frac{\sin \widehat{ABF}}{\sin \widehat{CBF}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCG}}{\sin \widehat{ACG}} \cdot \frac{\sin \widehat{CAE}}{\sin \widehat{BAE}} = 1$

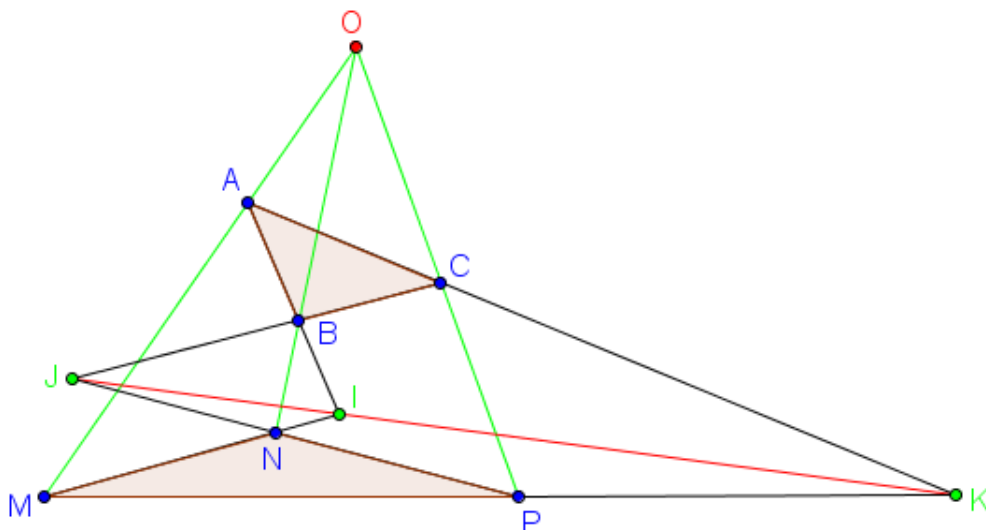
**Chứng minh.**

Ta có:  $\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{S_{ABE}}{S_{ACE}} = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAE}}{AC \cdot \sin \widehat{CAE}}; \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{BC \cdot \sin \widehat{CBF}}{BA \cdot \sin \widehat{ABF}}; \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \frac{CA \cdot \sin \widehat{ACG}}{CB \cdot \sin \widehat{BCG}}$ .

Nhân theo vế 3 đẳng thức trên, ta có đpcm.

**Định lý 1.1.6** (Định lý Desargues) Cho 2 tam giác  $ABC$  và  $MNP$  có  $AM, BN, CP$  đồng quy tại  $O$ . Gọi  $I, J, K$  theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng  $(AB, MN), (BC, NP), (CA, PM)$ . Khi đó 3 điểm  $I, J, K$  thẳng hàng.

**Chứng minh.**



Áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác  $OAB, OBC, OCA$ , ta có:

$$\frac{IA}{IB} \cdot \frac{NB}{NO} \cdot \frac{MO}{MA} = 1; \quad \frac{JB}{JC} \cdot \frac{PC}{PO} \cdot \frac{NO}{NB} = 1; \quad \frac{KC}{KA} \cdot \frac{MA}{MO} \cdot \frac{PO}{PC} = 1$$

Nhân theo vế 3 đẳng thức trên, ta có  $\frac{IA}{IB} \cdot \frac{JB}{JC} \cdot \frac{KC}{KA} = 1 \Rightarrow I, J, K$  thẳng hàng (đpcm)

Định lý đảo của định lý Desargues được phát biểu như sau: Cho 2 tam giác  $ABC$  và  $MNP$  có  $AB \cap MN = I, BC \cap NP = J, CA \cap PM = K$  và  $I, J, K$  thẳng hàng. Khi đó  $AM, BN, CP$  đồng quy tại  $O$ .

**Chứng minh.**

Gọi  $O$  là giao điểm của  $AM$  và  $CP$ . Áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác  $CPK, PKJ, JKC$ , ta có:

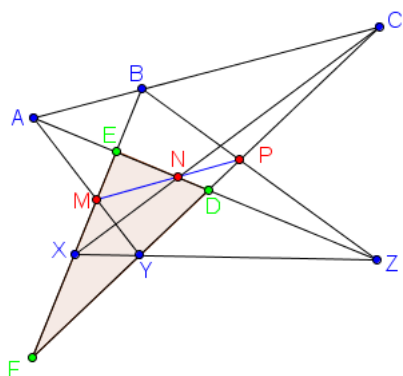
$$\frac{OC}{OP} \cdot \frac{MP}{MK} \cdot \frac{AK}{AC} = 1; \quad \frac{NP}{NJ} \cdot \frac{IJ}{IK} \cdot \frac{MK}{MP} = 1; \quad \frac{BJ}{BC} \cdot \frac{AC}{AK} \cdot \frac{IK}{IJ} = 1$$

Nhân theo vế 3 đẳng thức trên, ta có  $\frac{OC}{OP} \cdot \frac{NP}{NJ} \cdot \frac{BJ}{BC} = 1 \Rightarrow O, N, B$  thẳng hàng

$\Rightarrow AM, BN, CP$  đồng quy tại  $O$  (đpcm)

**Định lý 1.1.7** (Định lý Pappus) Cho 2 đường thẳng  $a, b$ . Trên  $a$  lấy các điểm  $A, B, C$ ; trên  $b$  lấy các điểm  $X, Y, Z$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $AX$  và  $BY$ ,  $N$  là giao điểm của  $AZ$  và  $CX$ ,  $P$  là giao điểm của  $BZ$  và  $CY$ . Khi đó  $M, N, P$  thẳng hàng. Định lý Pappus là một trường hợp riêng của định lý Pascal khi conic suy biến thành cặp đường thẳng

**Chứng minh.**



Gọi  $D, E, F$  là giao điểm của các cặp đường thẳng  $(AZ, CY), (AZ, BX), (BX, CY)$ .

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $DEF$  với cát tuyến  $CNX$ , ta có  $\frac{ND}{NE} \cdot \frac{XE}{XF} \cdot \frac{CF}{CD} =$

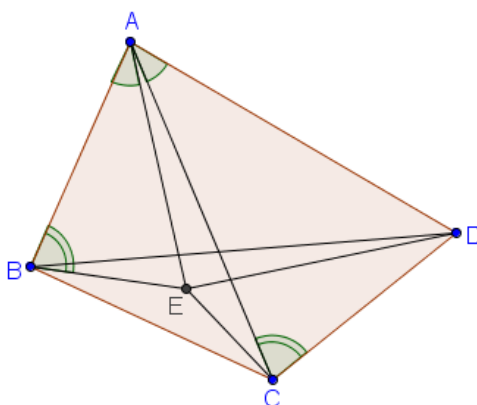
$$1 \Rightarrow \frac{ND}{NE} = \frac{CD}{CF} \cdot \frac{XF}{XE}. \text{ Tương tự, ta có } \frac{PF}{PD} = \frac{ZE}{ZD} \cdot \frac{BF}{BE}, \frac{ME}{MF} = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{YD}{YF} \Rightarrow$$

$$\frac{ND}{NE} \cdot \frac{ME}{MF} \cdot \frac{PF}{PD} = \frac{CD}{CF} \cdot \frac{XF}{XE} \cdot \frac{ZE}{ZD} \cdot \frac{BF}{BE} \cdot \frac{AE}{AD} \cdot \frac{YD}{YF}$$

Mặt khác, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $DEF$  với các cát tuyến  $ABC, XYZ$ , ta có  $\frac{AE}{AD} \cdot \frac{CD}{CF} \cdot \frac{BF}{BE} = \frac{XF}{XE} \cdot \frac{ZE}{ZD} \cdot \frac{YD}{YF} = 1$ . Suy ra  $\frac{ND}{NE} \cdot \frac{ME}{MF} \cdot \frac{PF}{PD} = 1$ . Do đó  $M, N, P$  thẳng hàng (đpcm)

**Định lý 1.1.8** (Bất đẳng thức Ptolemy) Cho tứ giác lồi  $ABCD$  bất kỳ, ta có bất đẳng thức sau:  $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow ABCD$  là tứ giác nội tiếp.

**Chứng minh.**



Trong tứ giác  $ABCD$ , lấy điểm  $E$  sao cho  $\widehat{EAB} = \widehat{DAC}; \widehat{EBA} = \widehat{ACD}$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{EAD}. \text{ Khi đó } \Delta ABE \sim \Delta ACD \text{ nên } \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AB \cdot CD =$$

$$AC \cdot BE \text{ và } \Delta AED \sim \Delta ABC. \text{ Suy ra } \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot ED$$

$$\text{Do đó } AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot (BE + ED) \geq AC \cdot BD.$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow E \in BD \Leftrightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ABE} = \widehat{ACD} \Leftrightarrow ABCD$  là tứ giác nội tiếp.

Từ đó suy ra định lý Ptolemy: Tứ giác lồi  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp  $\Leftrightarrow AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

**Định lý 1.1.9** (Định lý Pascal) Cho 6 điểm bất kì  $A, B, C, D, E, F$  cùng nằm trên một conic bất kì. Gọi  $G, H, K$  theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng  $(AB, DE), (BC, EF), (CD, FA)$ . Khi đó 3 điểm  $G, H, K$  thẳng hàng.

### Chứng minh.

- Trước hết, ta xét với trường hợp conic là đường tròn

*Cách 1:* Sử dụng góc định hướng của 2 đường thẳng. Gọi  $I$  là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn  $(DBG)$  và  $(DFK)$ . Ta có:

$$(IB, IF) \equiv (IB, ID) + (ID, IF) \equiv (GB, GD) + (KD, KF) \pmod{\pi}$$

Mặt khác:

$$(KD, KF) \equiv \frac{1}{2} ((OC, OA) - (OF, OD)) \equiv ((OC, OB) + (OB, OA) - (OF, OE) - (OE, OD)) \pmod{\pi}$$

$$(GB, GD) \equiv \frac{1}{2} ((OA, OE) - (OD, OB)) \equiv ((OA, OF) + (OF, OE) - (OD, OC) - (OC, OB)) \pmod{\pi}$$

$$(HB, HF) \equiv \frac{1}{2} ((OB, OF) - (OE, OC)) \pmod{\pi}$$

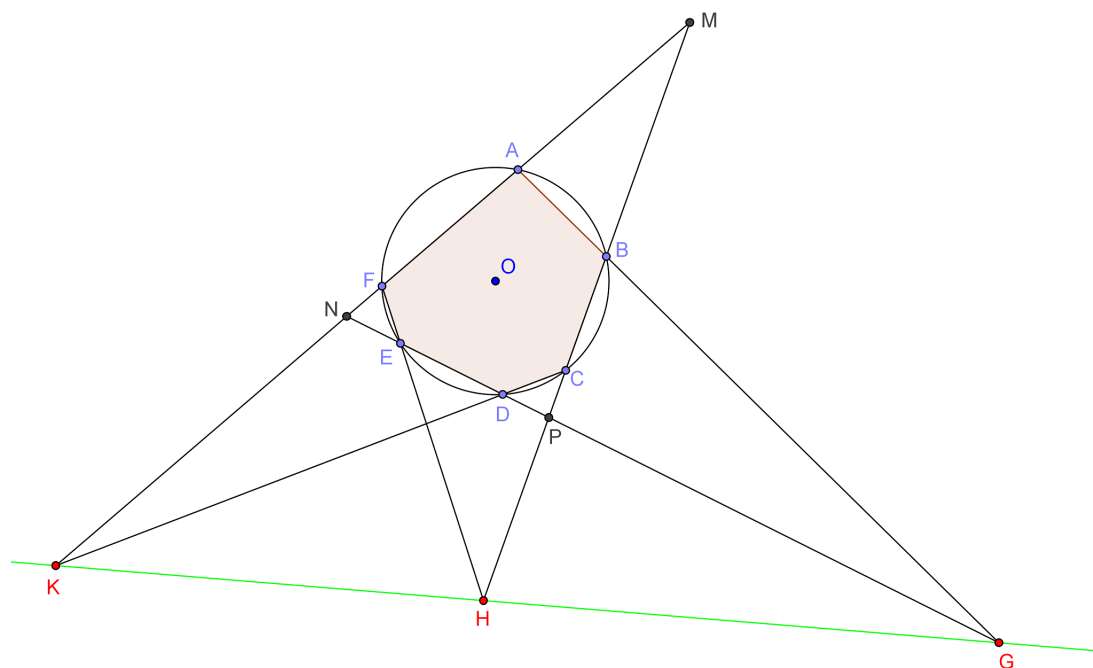
$\Rightarrow (HB, HF) \equiv (KD, KF) + (GB, GD) \equiv (IB, IF) \pmod{\pi} \Rightarrow B, H, I, F$  đồng viên.

$$\text{Lại có } (IB, IG) \equiv (DB, DG) \equiv (FB, FE) \pmod{\pi}$$

$$4 \text{ điểm } B, H, I, F \text{ đồng viên} \Rightarrow (FB, FE) \equiv (IB, IH) \pmod{\pi}$$

Do đó  $(IB, IG) \equiv (IB, IH) \pmod{\pi}$  hay 3 điểm  $I, G, H$  thẳng hàng. Tương tự, ta có  $I, H, K$  thẳng hàng, suy ra đpcm

*Cách 2:* Áp dụng định lý Menelaus



1 Gọi các giao điểm như hình vẽ. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $MNP$  với cát tuyến  $KCD$ , ta có:

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{KN}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{DP}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{KM}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{DN}}$$

Tương tự, ta có:  $\frac{\overline{HP}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{FN}}{\overline{FM}} \cdot \frac{\overline{EP}}{\overline{EN}}; \frac{\overline{GN}}{\overline{GP}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{BP}}$ .

Nhân theo vế các đẳng thức trên, kết hợp với các biểu thức phương tích sau:

$$\overline{BM} \cdot \overline{CM} = \overline{AM} \cdot \overline{FM}; \overline{DN} \cdot \overline{EN} = \overline{FN} \cdot \overline{AN}; \overline{BP} \cdot \overline{CP} = \overline{DP} \cdot \overline{EP}$$

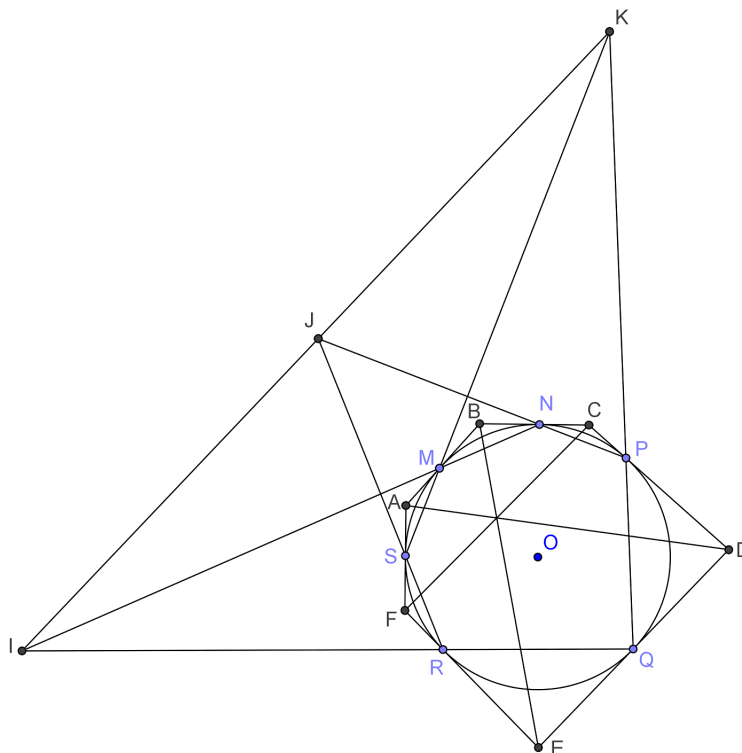
Ta suy ra  $\frac{\overline{KM}}{\overline{KN}} \cdot \frac{\overline{GN}}{\overline{GP}} \cdot \frac{\overline{HP}}{\overline{HM}} = 1 \Rightarrow G, H, K$  thẳng hàng (đpcm)

• Ta xét với trường hợp conic bất kì:

Giả sử 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$  nằm trên conic  $(C)$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  với mặt nón  $\mathfrak{N}$  trục  $\Delta$ , đỉnh  $S$ . Xét mặt phẳng  $(Q)$  vuông góc với trục  $\Delta$  của mặt nón. Khi đó thiết diện của  $(Q)$  và  $\mathfrak{N}$  là đường tròn  $(T)$ . Xét phép chiếu xuyên tâm  $S$  từ  $(P)$  lên  $(Q)$ . Gọi ảnh của điểm  $X$  qua phép chiếu trên là  $X'$ . Ta có các điểm  $A', B', C', D', E', F'$  nằm trên đường tròn  $(T) \Rightarrow G', H', K'$  thẳng hàng theo chứng minh trên. Gọi  $\delta$  là đường thẳng đi qua 3 điểm  $G', H', K'$ . Ta có các điểm  $K, H, G$  tương ứng nằm trên các đường thẳng  $SK', SH', SG'$  nên  $K, H, G$  cùng nằm trên mặt phẳng  $(S, \delta)$ . Mà  $K, H, G$  cùng nằm trên mặt phẳng  $(P)$ ;  $(P)$  và  $(S, \delta)$  là hai mặt phẳng phân biệt  $\Rightarrow G, H, K$  cùng nằm trên giao tuyến của  $(P)$  và  $(S, \delta)$ . Do đó  $K, H, G$  thẳng hàng (đpcm)

**Định lý 1.1.10** (Định lý Brianchon) Cho lục giác  $ABCDEF$  ngoại tiếp một conic bất kì. Chứng minh rằng ba đường chéo lớn  $AD, BE, CF$  đồng quy.

**Chứng minh.**



• Xét với trường hợp conic là đường tròn:

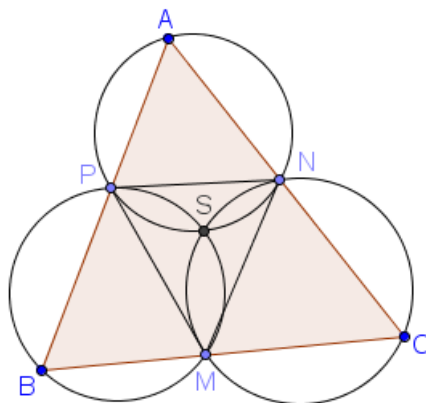
Ta kí hiệu các tiếp điểm của  $(O)$  trên  $AB, BC, CD, DE, EF, FA$  lần lượt là  $M, N, P, Q, R, S$ . Xét cực và đối cực đối với  $(O)$ . Gọi  $K, I, J$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $(SM, PQ), (MN, QR), (NP, RS)$ . Vì  $SM$  và  $PQ$  là đường đối cực của  $A$  và  $D$  nên  $AD$  là đường đối cực của  $K$ . Tương tự  $BE$  và  $FC$  lần lượt là đường đối cực của  $I$  và  $J$ .

Dùng định lý Pascal cho lục giác nội tiếp  $MNPQRS$  ta có  $I, J, K$  thẳng hàng. Nên ta có các đường đối cực của  $I, J, K$  (lần lượt là  $BE, CF, AD$ ) cùng đi qua cực của đường thẳng này (đường thẳng đi qua  $I, J, K$ ) nên  $AD, BE, CF$  đồng quy (đpcm).

• Với trường hợp conic bất kì: Giả sử lục giác  $ABCDEF$  ngoại tiếp conic  $(C)$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  với mặt nón  $\mathfrak{N}$  trục  $\delta$ , đỉnh  $S$ . Xét mặt phẳng  $(Q)$  vuông góc với trục  $\delta$  của mặt nón. Khi đó thiết diện của  $(Q)$  và  $\mathfrak{N}$  là đường tròn  $(T)$ . Xét phép chiếu xuyên tâm  $S$  từ  $(P)$  lên  $(Q)$ . Gọi ảnh của điểm  $X$  qua phép chiếu trên là  $X'$ . Ta có lục giác  $A'B'C'D'E'F'$  ngoại tiếp đường tròn  $(T) \Rightarrow A'D', B'E', C'F'$  đồng quy tại  $G \Rightarrow AD, BE, CF$  đồng quy tại giao điểm của  $SG$  và  $(P)$ .

**Định lý 1.1.11** (Định lý Miquel) Cho tam giác  $ABC$  và ba điểm  $M, N, P$  lần lượt nằm trên  $BC, CA, AB$ . Khi đó các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $APN, BPM$  và  $CMN$  đồng quy.

**Chứng minh.**

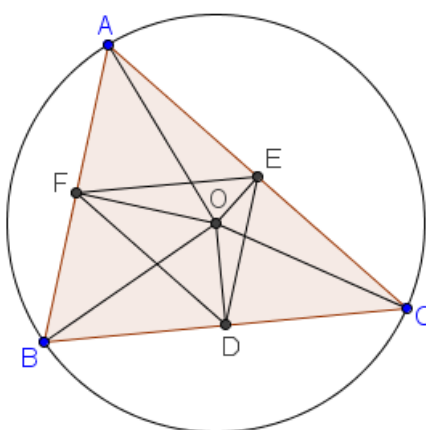


Gọi  $S$  là giao điểm của  $(BPM)$  và  $(CMN)$ . Ta có:

$$\begin{aligned} (SN, SP) &\equiv (SN, SM) + (SM, SP) \equiv (CN, CM) + (BM, BP) \equiv (CA, CB) + (BC, BA) \equiv \\ &(CA, BA) \equiv (AN, AP) \pmod{\pi} \\ \Rightarrow S &\in (ANP), \text{ suy ra đpcm.} \end{aligned}$$

**Định lý 1.1.12** (Công thức Carnot) Cho  $\Delta ABC$  nhọn nội tiếp  $(O, R)$ ,  $r$  là bán kính nội tiếp. Kí hiệu  $d_a, d_b, d_c$  theo thứ tự là khoảng cách từ  $O$  đến các cạnh  $BC, CA, AB$ . Khi đó ta có hệ thức sau:  $d_a + d_b + d_c = R + r$ .

**Chứng minh.**



Gọi  $D, E, F$  theo thứ tự là trung điểm  $BC, CA, AB \Rightarrow OD, OE, OF \perp BC, CA, AB$ . Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp  $AEOF$ , ta có  $OA \cdot EF = AF \cdot OE + AE \cdot OF \Rightarrow aR = c \cdot d_b + b \cdot d_c$ ; tương tự:  $bR = a \cdot d_c + c \cdot d_a, cR = a \cdot d_b + b \cdot d_a$ . Suy ra  $R(a + b + c) = a(d_b + d_c) + b(d_c + d_a) + c(d_a + d_b)$ .

Mặt khác,  $r(a + b + c) = 2S_{ABC} = a.d_a + b.d_b + c.d_c$ .

Do đó  $(a + b + c)(R + r) = (a + b + c)(d_a + d_b + d_c)$ , suy ra  $d_a + d_b + d_c = R + r$ . (đpcm)

Nếu tam giác ABC có  $\hat{A} > 90^\circ$  thì ta có  $-d_a + d_b + d_c = R + r$

Chú ý rằng định lý Carnot tương đương với hệ thức quen thuộc sau:  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

**Định lý 1.1.13** (Định lý Carnot) Cho tam giác ABC, gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB;  $d_M, d_N, d_P$  là các đường thẳng đi qua M, N, P và vuông góc với các cạnh tương ứng. Khi đó  $d_M, d_N, d_P$  đồng quy  $\Leftrightarrow MB^2 + NC^2 + PA^2 = MC^2 + NA^2 + PB^2$

**Chứng minh.** Thuận: Gọi O là giao điểm của 3 đường thẳng. Ta có:

$$MB^2 + NC^2 + PA^2 = MC^2 + NA^2 + PB^2$$

$$\Leftrightarrow MB^2 + OM^2 + NC^2 + ON^2 + PA^2 + OP^2 = MC^2 + OM^2 + NA^2 + ON^2 + PB^2 + OP^2$$

$$\Leftrightarrow OB^2 + OC^2 + OA^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2$$

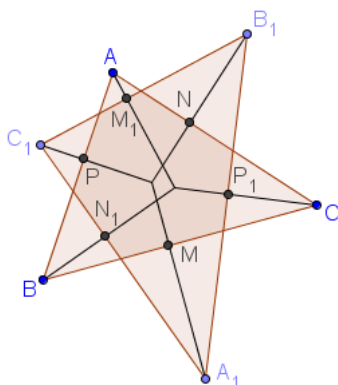
Đẳng thức này luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Đảo: Gọi O là giao điểm của  $d_M, d_N$ . Qua O, hạ đường vuông góc xuống AB tại P'.

Áp dụng định thuận, ta có  $P'A^2 - P'B^2 = PA^2 - PB^2 \Rightarrow P \equiv P' \Rightarrow$  đpcm

**Định lý 1.1.14** (Khái niệm về hai tam giác trực giao) Cho tam giác ABC và tam giác  $A_1B_1C_1$  như hình vẽ. Nếu các đường thẳng qua  $A_1, B_1, C_1$  và vuông góc với BC, CA, AB đồng quy thì các đường thẳng qua A, B, C và vuông góc với  $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$  đồng quy và ngược lại. Khi đó 2 tam giác ABC và  $A_1B_1C_1$  được gọi là 2 tam giác trực giao.

**Chứng minh.**



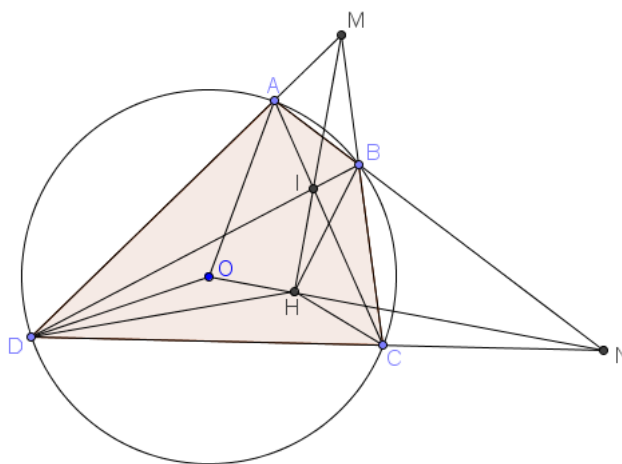
Gọi M, N, P,  $M_1, N_1, P_1$  là chân các đường vuông góc như hình vẽ. Áp dụng định lý Carnot, ta có:

$AM_1, BN_1, CP_1$  đồng quy

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (M_1C_1^2 - M_1B_1^2) + (P_1B_1^2 - P_1A_1^2) + (N_1A_1^2 - N_1C_1^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (AC_1^2 - AB_1^2) + (CB_1^2 - CA_1^2) + (BA_1^2 - BC_1^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (A_1B^2 - A_1C^2) + (B_1C^2 - B_1A^2) + (C_1A^2 - C_1B^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (MB^2 - MC^2) + (NC^2 - NA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow A_1M, B_1N, C_1, P \text{ đồng quy (đpcm)} \end{aligned}$$

**Định lý 1.1.15** (Định lý Brocard) Cho tứ giác lồi  $ABCD$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ .  $AD$  giao  $BC$  tại  $M$ ,  $AB$  giao  $CD$  tại  $N$ ,  $AC$  giao  $BD$  tại  $I$ . Chứng minh rằng  $O$  là trực tâm của tam giác  $MIN$ .

**Chứng minh.**



*Cách 1:*

Gọi  $H$  là giao thứ 2 của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $AID, BIC$ . Xét tứ giác  $DOHC$ , ta có:

$$\widehat{DHC} = 360^\circ - \widehat{DHI} - \widehat{CHI} = \widehat{DAC} + \widehat{DBC} = \widehat{DOC}$$

Từ đó suy ra tứ giác  $DOHC$  nội tiếp. Tương tự, ta suy ra tứ giác  $AOHB$  nội tiếp.

Mặt khác  $\overline{MA} \cdot \overline{MD} = \overline{MB} \cdot \overline{MC}$ , suy ra  $M$  nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn  $(AIHD), (BIHC) \Rightarrow M, I, H$  thẳng hàng.

$$\text{Ta có } \widehat{IHO} = \widehat{IHD} - \widehat{OHD} = \widehat{ADC} + \widehat{ACD} - \widehat{OCD} = \widehat{ADC} + \widehat{OCA} = 90^\circ$$

Từ đó suy ra  $IM \perp ON$ . Tương tự, ta có  $IN \perp OM$ , suy ra đpcm.

*Cách 2:*

Ta chứng minh bổ đề sau, từ đó suy trực tiếp ra khẳng định của bài toán: Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  nằm trên đường tròn tâm  $(O)$ , gọi  $P, Q, R$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $(AB, CD), (AD, BC), (AC, BD)$ , khi đó đường đối cực của  $P$  đối với  $(O)$  là đường thẳng  $QR$

Chứng minh:

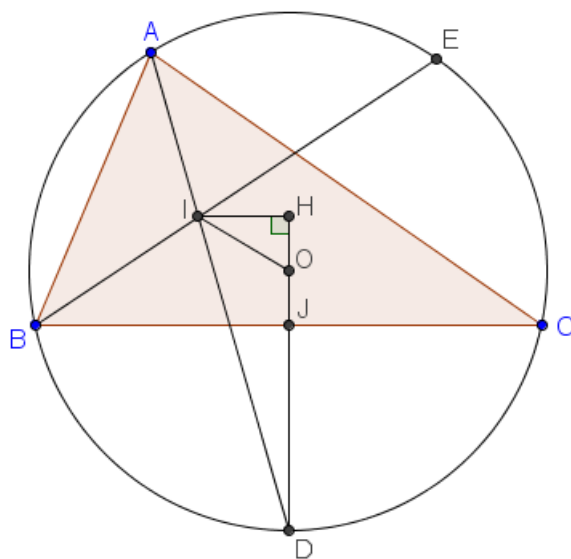
Gọi  $E, F$  lần lượt là cực của  $AB, CD$  đối với  $(O)$ , suy ra  $EF$  là đường đối cực của  $P$

đối với  $(O)$

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác  $ADDCCB$  ( $CC$  là tiếp tuyến tại điểm  $C$ ), ta có  $Q, F, R$  thẳng hàng. Tương tự, ta có  $Q, E, R$  thẳng hàng, suy ra 4 điểm  $E, F, Q, R$  thẳng hàng, do đó  $P$  là cực của đường thẳng  $QR$  đối với  $(O)$  (đpcm)

**Định lý 1.1.16** (Định lý Euler về khoảng cách giữa tâm 2 đường tròn nội, ngoại tiếp của tam giác) Cho  $\Delta ABC$ , nội tiếp  $(O, R)$ , ngoại tiếp  $(I, r)$ . Khi đó  $OI^2 = R^2 - 2Rr$ .

**Chứng minh.**



Gọi  $D, E$  theo thứ tự là trung điểm các cung nhỏ  $BC$  và  $AC$  thì  $OD \perp BC$ ;  $\widehat{BAD} = \frac{\widehat{A}}{2}$ . Gọi  $H$  là chân đường vuông góc kẻ từ  $I$  xuống  $OD$ .  $J$  là trung điểm  $BC$ . Theo một kết quả quen biết, ta có  $ID = BD = 2R \cdot \sin \frac{A}{2}$ .

Trong  $\Delta OID$ , có  $OI^2 = ID^2 + OD^2 - 2 \cdot \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{OD} = 4R^2 \cdot \sin^2 \frac{A}{2} + R^2 - 2 \cdot \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DH}$  (công thức hình chiếu).

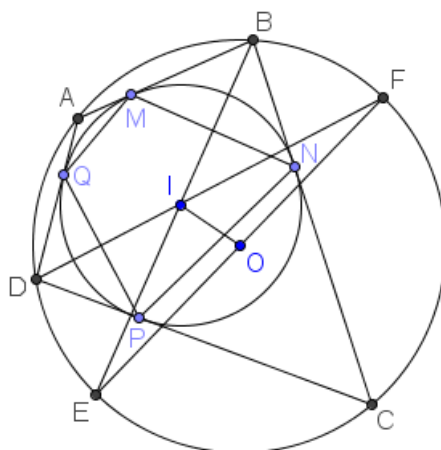
Mặt khác,  $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DH} = DO \cdot (DJ + JH) = R \cdot \left( BD \cdot \sin \frac{A}{2} + r \right) = 2R^2 \sin^2 \frac{A}{2} + Rr$ .

Từ đó suy ra đpcm.

**Định lý 1.1.17** (Định lý Euler về khoảng cách giữa tâm 2 đường tròn nội, ngoại tiếp của tứ giác (Định lý Fuss)) Cho tứ giác  $ABCD$  vừa nội tiếp  $(O, R)$ , vừa nội tiếp  $(I, r)$ . Đặt  $d = OI$ . Khi đó ta có hệ thức

$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}$$

**Chứng minh.**



Gọi tiếp điểm của  $(I)$  trên  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt là  $M, N, P, Q$ .  $BI, DI$  cắt  $(O)$  lần lượt ở  $E, F$ . Ta thấy:

$$(DE, DF) \equiv (DE, DC) + (DC, DF) \equiv (BE, BC) + (DC, DF) \equiv \frac{(BA, BC) + (DC, DA)}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

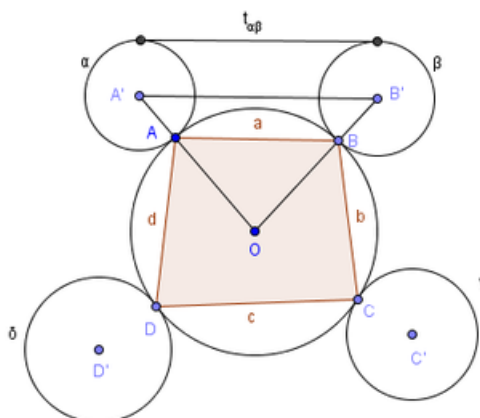
Do đó  $E, O, F$  thẳng hàng, nên  $O$  là trung điểm của  $EF$ . Theo công thức đường trung tuyến trong tam giác  $IEF$  ta có:  $d^2 = \frac{IE^2 + IF^2}{2} - \frac{EF^2}{4} = \frac{IE^2 + IF^2}{2} - R^2$ .

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} &= \frac{2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{IE^2 + IF^2}{(P_{I/(O)})^2} = \frac{IE^2}{(P_{I/(O)})^2} + \frac{IF^2}{(P_{I/(O)})^2} = \\ &= \frac{IE^2}{(IE \cdot IB)^2} + \frac{IF^2}{(IF \cdot ID)^2} \\ &= \frac{1}{IB^2} + \frac{1}{ID^2} = \frac{\sin^2 \frac{B}{2}}{IM^2} + \frac{\sin^2 \frac{D}{2}}{IP^2} = \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

**Định lý 1.1.18** (Định lý Casey (định lý Ptolemy mở rộng)) Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp  $(O, R)$ . Đặt các đường tròn  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  là các đường tròn tiếp xúc với  $(O)$  tại các đỉnh  $A, B, C, D$ . Đặt  $t_{\alpha\beta}$  là độ dài đoạn tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $\alpha, \beta$ . Trong đó  $t_{\alpha\beta}$  là độ dài tiếp tuyến chung ngoài nếu hai đường tròn  $\alpha, \beta$  cùng tiếp xúc trong hoặc cùng tiếp xúc ngoài với  $(O)$ , và là độ dài đoạn tiếp tuyến chung trong với trường hợp còn lại. Các đoạn  $t_{\alpha\gamma}, t_{\beta\gamma}, \dots$  được xác định tương tự. Khi đó ta có  $t_{\alpha\beta} \cdot t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma} \cdot t_{\alpha\delta} = t_{\alpha\gamma} \cdot t_{\beta\delta}$ .

**Chứng minh.**



Ta chứng minh cho trường hợp  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  cùng tiếp xúc ngoài với  $(O)$ , các trường hợp khác chứng minh tương tự. Gọi tâm các đường tròn trên là  $A', B', C', D'$  và bán kính lần lượt là  $x, y, z, t$ . Đặt độ dài các đoạn thẳng như hình vẽ và  $AC = m, BD = n$ . Theo định lý Pythagore:  $t_{\alpha\beta}^2 = A'B'^2 - (x - y)^2$ . Áp dụng định lý cosin, ta có:

$$\begin{aligned} A'B'^2 &= (R + x)^2 + (R + y)^2 - 2(R + x)(R + y) \cos \widehat{A'OB'} = (R + x)^2 + (R + y)^2 - 2(R + x)(R + y) \left(1 - \frac{a^2}{2R^2}\right) \\ &= (R + x)^2 + (R + y)^2 - 2(R + x)(R + y) + (R + x)(R + y) \frac{a^2}{R^2} = (x - y)^2 + (R + x)(R + y) \frac{a^2}{R^2} \\ \Rightarrow t_{\alpha\beta} &= \frac{a}{R} \sqrt{(R + x)(R + y)} \end{aligned}$$

Tương tự với các đoạn thẳng còn lại, ta có  $t_{\alpha\beta} \cdot t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma} \cdot t_{\alpha\delta} = t_{\alpha\gamma} \cdot t_{\beta\delta} \Leftrightarrow ac + bd = mn$  (luôn đúng theo định lý Ptolemy)

Cho  $x = y = z = t = 0$ , ta có định lý Ptolemy.

**Định lý 1.1.19** (Định lý Stewart) Cho 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng và điểm  $M$  bất kì. Ta có hệ thức sau:  $MA^2 \cdot \overline{BC} + MB^2 \cdot \overline{CA} + MC^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$

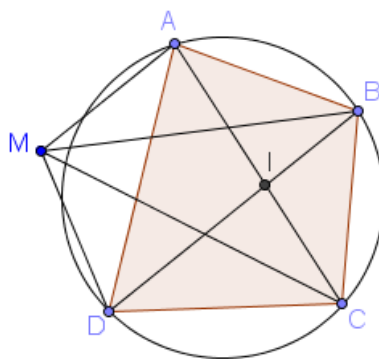
**Chứng minh.** Qua  $M$ , hạ  $MH \perp ABC$ , ta có

$$\begin{aligned} &MA^2 \cdot \overline{BC} + MB^2 \cdot \overline{CA} + MC^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \\ &= (MH^2 + HA^2) \overline{BC} + (MH^2 + HB^2) \overline{CA} + (MH^2 + HC^2) \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \\ &= MH^2 (\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB}) + HA^2 \cdot \overline{BC} + HB^2 \cdot \overline{CA} + HC^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \\ &= HA^2 \cdot \overline{BC} + HB^2 \cdot \overline{CA} + HC^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \\ &= HA^2 (\overline{HC} - \overline{HB}) + HB^2 (\overline{HA} - \overline{HC}) + HC^2 (\overline{HB} - \overline{HA}) + (\overline{HC} - \overline{HB}) (\overline{HA} - \overline{HC}) (\overline{HB} - \overline{HA}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Định lý 1.1.20** (Định lý Feuerbach–Luchterhand) Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp,  $M$  là điểm bất kì trong mặt phẳng tứ giác. Ta có hệ thức:

$$MA^2 \cdot BC \cdot CD \cdot DB - MB^2 \cdot CD \cdot DA \cdot AC + MC^2 \cdot DA \cdot AB \cdot BD - MD^2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA = 0$$

**Chứng minh.**



Gọi  $I$  là giao điểm  $AC$  và  $BD$ . Áp dụng định lý Stewart, ta có:

$$MA^2 \cdot IC + MC^2 \cdot IA - IA \cdot IC \cdot AC = MI^2 \cdot AC; MB^2 \cdot ID + MD^2 \cdot IB - IB \cdot ID \cdot BD = MI^2 \cdot BC$$

$$\Rightarrow MA^2 \cdot IC \cdot BD + MC^2 \cdot IA \cdot BD - IA \cdot IC \cdot AC \cdot BD = MI^2 \cdot AC \cdot BD = MB^2 \cdot ID \cdot AC + MD^2 \cdot IB \cdot AC - IB \cdot ID \cdot BD \cdot AC$$

$$\Rightarrow MA^2 \cdot IC \cdot BD + MC^2 \cdot IA \cdot BD = MB^2 \cdot ID \cdot AC + MD^2 \cdot IB \cdot AC \quad (1)$$

Mặt khác, ta có  $\frac{IA}{IC} = \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AD \cdot AB}{CB \cdot CD} \Rightarrow IC = \frac{CB \cdot CD}{AD \cdot AB} \cdot IA$ . Tương tự:  $ID = \frac{DA \cdot DC}{BA \cdot BC} \cdot IB$

Thay vào (1), ta có:

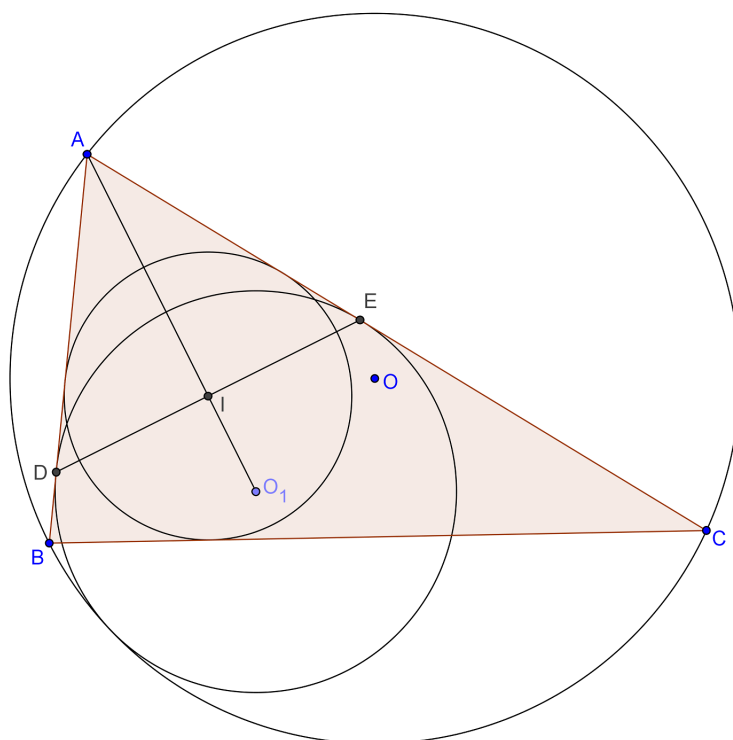
$$MA^2 \cdot \frac{CB \cdot CD}{AD \cdot AB} \cdot IA \cdot BD + MC^2 \cdot IA \cdot BD = MB^2 \cdot \frac{DA \cdot DC}{BA \cdot BC} \cdot IB \cdot AC + MD^2 \cdot IB \cdot AC$$

$$\Leftrightarrow \frac{IA}{AB \cdot AD} \left( MA^2 \cdot BC \cdot CD \cdot DB + MC^2 \cdot AB \cdot BD \cdot DA \right) = \frac{IB}{AB \cdot AC} \left( MB^2 \cdot AC \cdot DC \cdot CA + MD^2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA \right)$$

Lại có  $\Delta IAD \sim \Delta IBC \Rightarrow \frac{IA}{AD} = \frac{IB}{IC}$ , thay vào (2), ta có đpcm.

**Định lý 1.1.21** (Định lý Lyness) Cho tam giác  $ABC$ , đường tròn ngoại tiếp  $(O, R)$ , đường tròn nội tiếp  $(I, r)$ . Đường tròn  $(O_1, \rho)$  tiếp xúc trong với  $(O)$  và tiếp xúc với các cạnh  $AB, AC$  theo thứ tự tại  $D, E$ . Khi đó  $I$  là trung điểm  $DE$ .

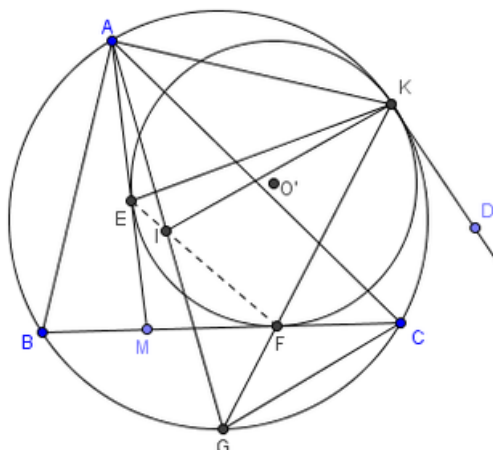
**Chứng minh.**



Ta có  $AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$ ;  $AO_1 = \frac{\rho}{\sin \frac{A}{2}} \Rightarrow IO_1 = \frac{\rho - r}{\sin \frac{A}{2}} \Rightarrow \frac{IO_1}{AO_1} = \frac{\rho - r}{\rho} = 1 - \frac{r}{\rho}$ . Áp dụng định lý Stewart cho tam giác  $AOO_1$ , ta có:  $OO_1^2 \cdot AI + OA^2 \cdot O_1I - OI^2 \cdot AO_1 = AI \cdot O_1I \cdot AO_1$ . Chú ý rằng  $OO_1 = R - \rho$ ,  $OI^2 = R^2 - 2Rr$ ,  $OA = R$ , ta tính được  $\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{\rho}$ . Suy ra  $\frac{IO_1}{AO_1} = \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\rho^2}{AO_1^2} \Rightarrow IO_1 \cdot AO_1 = \rho^2$ . Do đó  $I$  nằm trên đường đối cực của  $A$  đối với  $(O_1) \Rightarrow I \in DE \Rightarrow I = AO_1 \cap DE \Rightarrow I$  là trung điểm  $DE$  (đpcm)

**Định lý 1.1.22** (Định lý Lyness mở rộng (Bổ đề Sawayama)) Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $M$  thuộc  $BC$  (có cách phát biểu khác là: cho tứ giác  $ABDC$  và  $M$  là giao của  $BC$  và  $AD \dots$ ; nhưng hai cách phát biểu này là tương đương). Một đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với hai cạnh  $MA$  và  $MC$  tại  $E$  và  $F$  đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  tại  $K$ . Khi đó ta có tâm đường tròn nội tiếp của tam giác  $ABC$  nằm trên đường thẳng  $EF$ .

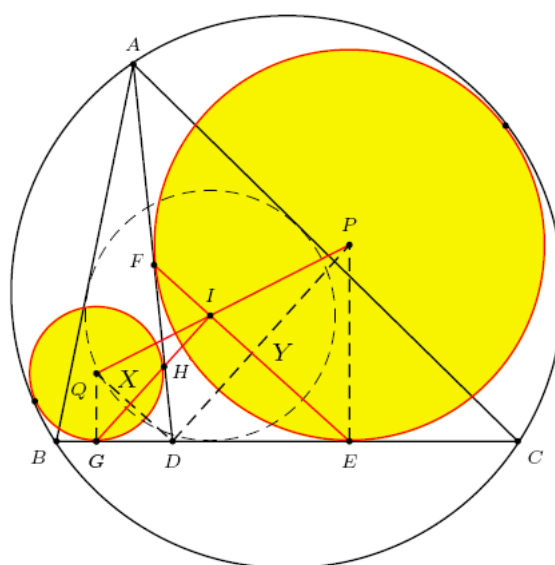
**Chứng minh.**



Gọi  $G$  là giao điểm khác  $K$  của  $KF$  và  $(O)$ . Phép vị tự biến  $(O') \rightarrow (O)$  biến  $F \rightarrow G, BC \rightarrow$  tiếp tuyến của  $(O)$  song song với  $BC$  tại  $G \Rightarrow G$  là trung điểm cung  $BC \Rightarrow GC^2 = GF.GK$ . Gọi  $I$  là giao  $AG$  và  $EF$ . Ta có  $\widehat{IEK} = \widehat{IAK}(= \widehat{FKD}) \Rightarrow AEIK$  nội tiếp  
 $\Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{EFK}(= \widehat{AEK}) \Rightarrow \Delta AIK \sim \Delta IFK$  (g.g)  
 $\Rightarrow \widehat{GKI} = \widehat{GIF}(= \widehat{EKA}) \Rightarrow \Delta GIF \sim \Delta GKI$  (g.g)  $\Rightarrow GI^2 = GF.GK \Rightarrow GI = GC \Rightarrow I$  là tâm nội tiếp  $\Delta ABC$

**Định lý 1.1.23** (Định lý Thébault) Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $D$  là một điểm nằm trên cạnh  $BC$ . Đường tròn tâm  $P$  tiếp xúc với 2 đoạn  $AD, DC$  và tiếp xúc trong với  $(O)$ . Đường tròn tâm  $Q$  tiếp xúc với 2 đoạn  $AD, DB$  và tiếp xúc trong với  $(O)$ . Gọi  $I$  là tâm nội tiếp tam giác  $ABC$ . Ta có  $P, I, Q$  thẳng hàng.

**Chứng minh.**



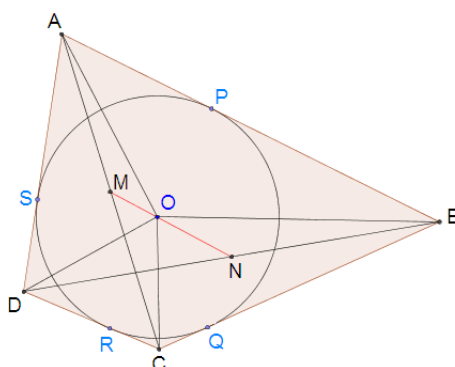
Gọi  $E, F$  là tiếp điểm của  $(P)$  với  $BC, AD$ ;  $G, H$  là tiếp điểm của  $(Q)$  với  $BC, AD$ .

Gọi  $I$  là giao điểm của  $EF$  và  $GH \Rightarrow I$  là tâm nội tiếp  $\Delta ABC$ . Gọi  $X$  là giao điểm  $GH$  và  $QD$ ;  $Y$  là giao điểm  $EF$  và  $PD$ . Ta thấy  $IXDY$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow \frac{IX}{PD} = \frac{YD}{PD} = \frac{QX}{QD} \Rightarrow P, I, Q$  thẳng hàng (đẳng thức thứ 2 có là do  $\Delta QGD \sim \Delta DEP$ )

**Định lý 1.1.24** (Định lý Newton cho tứ giác ngoại tiếp) Cho tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Khi đó trung điểm 2 đường chéo của tứ giác thẳng hàng với  $O$ .

**Chứng minh.**

*Cách 1:*



Gọi  $P, Q, R, S$  lần lượt là các tiếp điểm của các đoạn thẳng  $AB, BC, CD, DA$  đối với đường tròn  $(O)$ . Đặt  $SA = AP = a, BP = BQ = b, CQ = CR = c, DR = DS = d$ .

Áp dụng định lý con nhím cho tứ giác  $ABCD$  ta có:

$$(a + b)\vec{OP} + (b + c)\vec{OQ} + (c + d)\vec{OR} + (d + a)\vec{OS} = \vec{0}$$

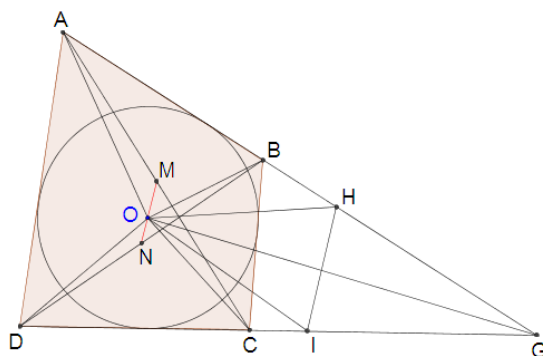
$$\Leftrightarrow \sum (a + b) \left( \frac{b}{a + b} \vec{OA} + \frac{a}{a + b} \vec{OB} \right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (b + d) (\vec{OA} + \vec{OC}) + (a + c) (\vec{OB} + \vec{OD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (b + d)\vec{OM} + (a + c)\vec{ON} = \vec{0}$$

Suy ra 2 vector  $\vec{OM}, \vec{ON}$  cùng phương  $\Rightarrow O, M, N$  thẳng hàng (đpcm)

*Cách 2:*



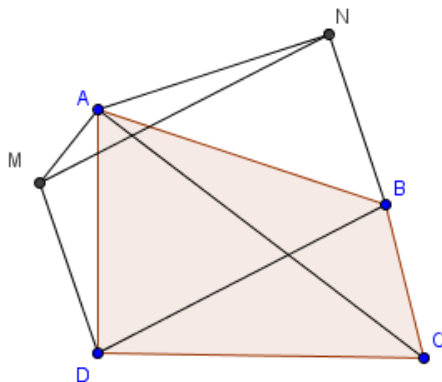
Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của hai đường chéo  $AC, BD$ . Ta xét trường hợp  $AB$  cắt  $CD$  tại  $G$ . Ta có:

$S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}r(AB + CD); S_{OBC} + S_{ODA} = \frac{1}{2}r(AD + BC)$  ( $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tứ giác). Mà tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp  $\Rightarrow AB + CD = AD + BC \Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ . Trên các tia  $GA, GD$  lấy các điểm  $H, I$  theo thứ tự sao cho  $GH = AB, GI = CD$ . Khi đó  $S_{OAB} = S_{OHG}, S_{OCD} = S_{OIG}$ .  
 $\Rightarrow S_{OHI} = S_{OHG} + S_{OIG} - S_{GHI} = S_{OAB} + S_{OCD} - S_{GHI} = \frac{1}{2}S_{ABCD} - S_{GHI}$ .

Mặt khác, ta cũng có  $S_{MAB} + S_{MCD} = S_{NAB} + S_{NCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ . Suy ra  $S_{OHI} = S_{MHI} = S_{NHI} \Rightarrow d(O, HI) = d(M, HI) = d(N, HI) \Rightarrow O, M, N$  thẳng hàng.  
 Với trường hợp  $AB // CD$  thì  $d(O, AB) = d(M, AB) = d(N, AB) = r \Rightarrow O, M, N$  thẳng hàng (đpcm)

**Định lý 1.1.25** (Định lý Breichneider) Cho tứ giác lồi  $ABCD, AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = m, BD = n$ . Khi đó  $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \cos(A + C)$

**Chứng minh.**



Trên cạnh  $AB$  ra phía ngoài dựng tam giác  $ABN$  đồng dạng với tam giác  $CAD$ , và dựng ra phía ngoài cạnh  $AD$  tam giác  $ADM$  đồng dạng với tam giác  $CAB$ . Khi đó dễ thấy  $AN = \frac{ac}{m}, AM = \frac{bd}{m}, NB = DM = \frac{ad}{m}$  và  $BDMN$  là hình bình hành. Đồng thời có  $\widehat{NAM} = \widehat{A} + \widehat{C}$ .

Áp dụng định lý cosin cho tam giác  $AMN$ , ta có  $n^2 = \left(\frac{ac}{m}\right)^2 + \left(\frac{bd}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{ac}{m} \cdot \frac{bd}{m} \cdot \cos(A + C)$ , suy ra đpcm.

Vì  $0^\circ < \widehat{A} + \widehat{C} < 360^\circ$  nên ta có  $mn \leq ac + bd$ , do đó bất đẳng thức Ptolemy là một hệ quả của định lý Breichneider.

**Định lý 1.1.26** (Định lý con nhím) Cho đa giác  $A_1A_2 \dots A_n$  bất kỳ, điểm  $M$  bất kỳ nằm trong đa giác. Gọi  $\vec{e}_i$  là các vector đơn vị có gốc tại  $M$ , hướng ra ngoài đa giác và  $\vec{e}_i \perp A_iA_{i+1}$  (coi  $A_{n+1} \equiv A_1$ ). Khi đó ta có  $\sum_{i=1}^n A_iA_{i+1} \cdot \vec{e}_i = \vec{0}$ . Các vector  $A_iA_{i+1} \cdot \vec{e}_i$  được gọi là các “lông nhím”.

**Chứng minh.** Giả sử đa giác  $A_1A_2 \dots A_n$  có hướng dương (tức là chiều đi theo thứ tự chỉ số các đỉnh đa giác tăng dần ngược chiều kim đồng hồ). Gọi  $f$  là phép quay  $90^\circ$  ngược chiều kim đồng hồ.

Ta có  $f(A_iA_{i+1} \cdot \vec{e}_i) = \overrightarrow{A_iA_{i+1}} \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(A_iA_{i+1} \cdot \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n A_iA_{i+1} \cdot \vec{e}_i = \vec{0}$  (đpcm).

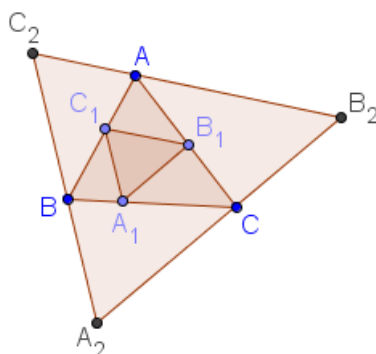
**Định lý 1.1.27** (Định lý Gergonne–Euler) Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $S$  trong mặt phẳng tam giác.  $AS, BS, CS$  cắt  $BC, CA, AB$  lần lượt tại  $D, E, F$ . Khi đó  $\frac{SD}{AD} + \frac{SE}{BE} + \frac{SF}{CF} = 1$ .

**Chứng minh.** Ta có  $\frac{SD}{AD} = \frac{S_{[SBD]}}{S_{[ABD]}} = \frac{S_{[SDC]}}{S_{[ADC]}} = \frac{S_{[SBD]} + S_{[SDC]}}{S_{[ABD]} + S_{[ADC]}} = \frac{S_{[SBC]}}{S_{[ABC]}}$

Tương tự:  $\frac{SE}{BE} = \frac{S_{[SCA]}}{S_{[ABC]}}$ ;  $\frac{SF}{CF} = \frac{S_{[SAB]}}{S_{[ABC]}}$ . Cộng theo vế 3 đẳng thức trên, ta có đpcm.

**Định lý 1.1.28** (Định lý Peletier) Ta nói  $\Delta ABC$  nội tiếp trong  $\Delta A_2B_2C_2$  (nghĩa là  $A \in B_2C_2, B \in C_2A_2, C \in A_2B_2$ ) đồng thời ngoại tiếp  $\Delta A_1B_1C_1$  (nghĩa là  $A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$ ) nếu  $A_2B_2 // A_1B_1, B_2C_2 // B_1C_1, C_2A_2 // C_1A_1$ . Khi đó  $S^2 = S_1 \cdot S_2$ .

**Chứng minh.**



Ta quy ước chỉ số 1 cho  $\Delta A_1B_1C_1$ , chỉ số 2 cho tam giác  $\Delta A_2B_2C_2$ . Vì  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$  nên  $\frac{c_1}{c_2} = \frac{h_1}{h_2}$ . Do đó  $S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{4} (c_1 h_2)^2$ . Trong đó  $h_i$  là đường cao xuất

phát từ đỉnh C của các tam giác.

Mặt khác  $S = S_{AB_1C_1} + S_{BC_1A_1} + S_{CA_1B_1} + S_{A_1B_1C_1}$ . Lại có  $S_{AB_1C_1} = S_{C_2B_1C_1}; S_{BA_1C_1} = S_{C_2A_1C_1}; S_{C_2A_1B_1} = S_{C_2B_1C_1} + S_{C_2A_1C_1} + S_{A_1B_1C_1}$ , suy ra  $S = S_{CA_1B_1} + S_{C_2A_1B_1} = \frac{1}{2}c_1(h' + h'')$ , trong đó  $h'$  và  $h''$  tương ứng là khoảng cách từ  $c$  và  $c_2$  đến  $A_1B_1$ , mà  $h' + h'' = h_2$  nên  $S = \frac{1}{2}c_1h_2$ . Từ đó suy ra đpcm.

**Định lý 1.1.29** (Định lý Viviani) Trong tam giác đều  $ABC$  ta lấy 1 điểm  $S$ . Khi đó tổng các khoảng cách từ điểm  $S$  tới ba cạnh sẽ có độ dài bằng 1 đường cao của tam giác.

**Chứng minh.** Gọi khoảng cách từ  $S$  đến  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $x, y, z$ ; gọi độ dài cạnh tam giác đều là  $a$ , độ dài đường cao của tam giác là  $h$ . Ta có  $ah = 2S_{ABC} = 2(S_{SBC} + S_{SCA} + S_{SAB}) = ax + ay + az \Rightarrow x + y + z = h$  (đpcm)

**Định lý 1.1.30** (Công thức Lagrange mở rộng) Gọi  $I$  là tâm tỉ cự của hệ điểm  $A_i$  ứng với các hệ số  $a_i$  thì với mọi điểm  $M$  ta có

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot MA_i^2 = \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j A_i A_j^2}{\sum_{i=1}^n a_i} + MI^2 \sum_{i=1}^n a_i$$

**Chứng minh.** Do  $I$  là tâm tỉ cự của hệ nên  $\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \overrightarrow{IA_i}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 IA_i^2 +$

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \overrightarrow{IA_i} \overrightarrow{IA_j} = 0$$

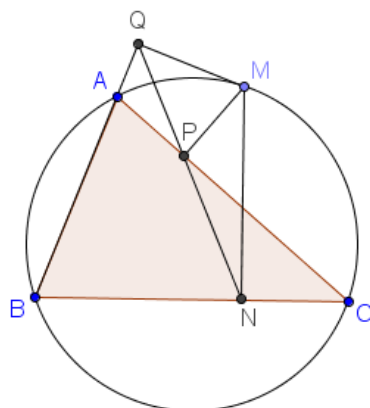
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 IA_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j (IA_i^2 + IA_j^2 - A_i A_j^2) = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n a_i IA_i^2\right) -$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j A_i A_j^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j A_i A_j^2}{\sum_{i=1}^n a_i} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot IA_i^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i MA_i^2 = \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j A_i A_j^2}{\sum_{i=1}^n a_i} + MI^2 \sum_{i=1}^n a_i$$

**Định lý 1.1.31** (Đường thẳng Simson) Cho  $\Delta ABC$  và điểm  $M$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tâm  $O$  của tam giác. Gọi  $N, P, Q$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên các đường thẳng  $BC, CA, AB$  thì chúng cùng thuộc một đường thẳng (gọi là đường thẳng Simson của điểm  $M$  đối với  $\Delta ABC$ )

**Chứng minh.**

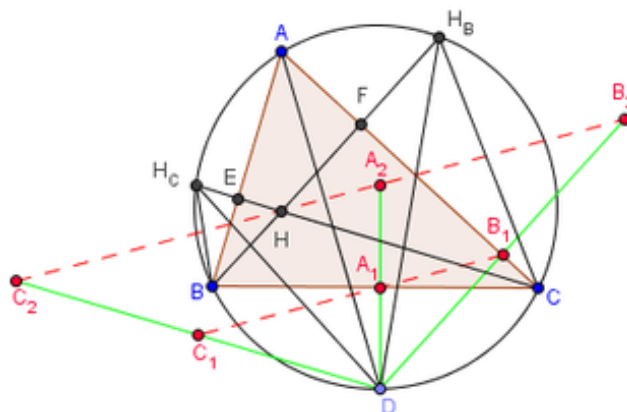


$$(PN, PQ) \equiv (PN, PM) + (PM, PQ) \equiv (CN, CM) + (AM, AQ) \equiv (BC, MC) + (MA, BA) \equiv 0 \pmod{\pi}$$

**Định lý 1.1.32** (Đường thẳng Steiner) Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $D$  trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi  $A_2, B_2, C_2$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $D$  qua các đường thẳng  $BC, CA, AB$  thì chúng cùng nằm trên một đường thẳng được gọi là đường thẳng Steiner ứng với điểm  $D$  của tam giác  $ABC$ . Đường thẳng Steiner của một tam giác thì đi qua trực tâm của tam giác đó. Điểm  $D$  được gọi là điểm anti-Steiner.

**Chứng minh.** Dựa vào định nghĩa đường thẳng Simson, ta suy ra  $A_2, B_2, C_2$  thẳng hàng và đường thẳng Steiner là ảnh của đường thẳng Simson qua phép vị tự tâm  $D$ , tỉ số 2. Để chứng minh đường thẳng Steiner đi qua trực tâm tam giác, ta có 2 cách sau:

Cách 1:

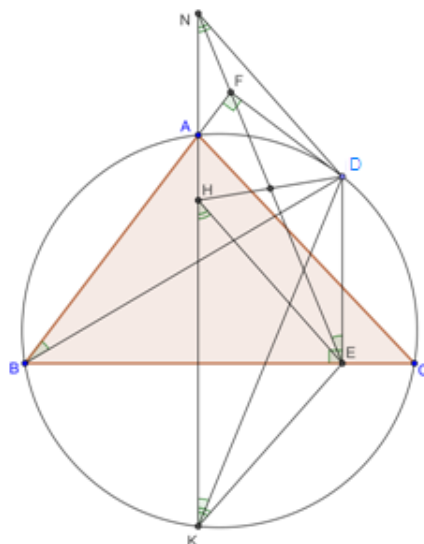


Gọi  $H_A, H_B, H_C$  lần lượt là các điểm đối xứng với trực tâm  $H$  qua  $BC, CA, AB \Rightarrow H_A, H_B, H_C$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi  $E, F$  là giao của  $CH, BH$  với  $AB, AC$ . Ta có:

$$(HC_2, HB_2) \equiv (HC_2, HB) + (HB, HC) + (HC, HB_2) \equiv (H_C B, H_C D) + (HF, HE) + (H_B D, H_B C) \equiv (AB, AD) + (AC, AB) + (AD, AC) \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$\Rightarrow H$  nằm trên đường thẳng Steiner của  $D$  đối với  $\Delta ABC$ .

Cách 2:



Không mất tính tổng quát, giả sử  $D$  nằm trên cung  $AC$  không chứa  $B$  của  $(ABC)$ . Gọi  $E, F$  là chân đường vuông góc từ  $D$  xuống  $BC, AB$ ;  $N$  là giao điểm  $AH$  và  $EF$ ;  $K$  là giao điểm khác  $A$  của  $AH$  với  $(ABC)$ .

Vì  $H$  là trực tâm  $\Delta ABC$  nên  $NK \perp BC \Rightarrow NK // DE$  (1)

$\widehat{DEB} = \widehat{DFB} = 90^\circ$  nên  $D, E, F, B$  đồng viên  $\Rightarrow \widehat{NED} = \widehat{ABD}$ .

$\widehat{NKD} = \widehat{ABD}$  (vì  $ABKD$  là tứ giác nội tiếp), do đó  $\widehat{NED} = \widehat{NKD} \Rightarrow NKED$  là tứ giác nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $NKED$  là hình thang cân. Do đó  $\widehat{NKE} = \widehat{DNK}$ . (3)

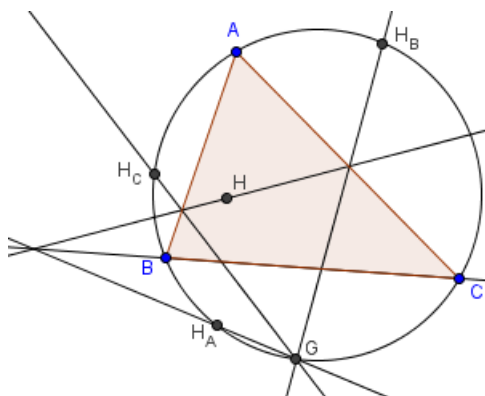
Vì  $H$  là trực tâm  $\Delta ABC$  nên  $H$  và  $K$  đối xứng với nhau qua  $BC$ . Suy ra  $\widehat{NKE} = \widehat{KHE}$ . (4)

Từ (3) và (4), ta suy ra  $\widehat{DNK} = \widehat{EHK}$ . Do đó  $DN // EH$ , kết hợp với (1), suy ra  $DNHE$  là hình bình hành.

Vậy  $EF$  đi qua trung điểm  $DH$ . Suy ra  $H$  nằm trên đường thẳng Steiner của  $D$  đối với  $\Delta ABC$  (vì  $EF$  là đường thẳng Simson của  $D$  đối với  $\Delta ABC$ ).

**Định lý 1.1.33** (Định lý Collings) Cho tam giác  $ABC$  và đường thẳng  $d$  đi qua trực tâm  $H$  của tam giác. Gọi  $d_a, d_b, d_c$  lần lượt là các đường thẳng đối xứng với  $d$  qua  $BC, CA, AB$ . Các đường thẳng đó đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn  $(ABC)$  (điểm anti-Steiner của  $d$ ). Và  $d$  là đường thẳng Steiner của điểm đó.

**Chứng minh.**

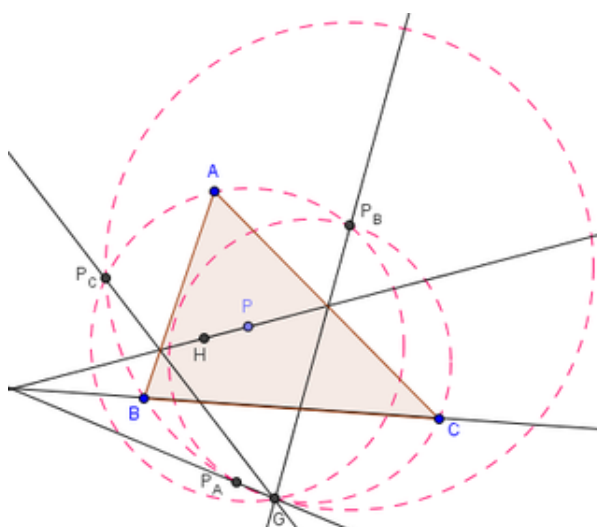


Gọi  $H_A, H_B, H_C$  lần lượt là điểm đối xứng của  $H$  qua 3 cạnh  $\Rightarrow H_A, H_B, H_C$  cùng nằm trên  $(O)$  ngoại tiếp  $ABC$  và  $H_A, H_B, H_C$  lần lượt thuộc  $d_a, d_b, d_c$ . Ta có:

$$(d_a, d_b) \equiv (d_a, BC) + (BC, CA) + (CA, d_b) \equiv (BC, d) + (BC, CA) + (d, CA) \equiv 2(BC, CA) \equiv (CH_A, CH_B) \pmod{\pi}$$

Gọi giao điểm của  $d_a, d_b$  là  $G$  thì  $G \in (O)$ . Tương tự, ta suy ra  $d_a, d_b, d_c$  đồng quy tại  $G$ . Mặt khác, dễ thấy  $d$  chính là đường thẳng Steiner của  $G$  (đpcm)

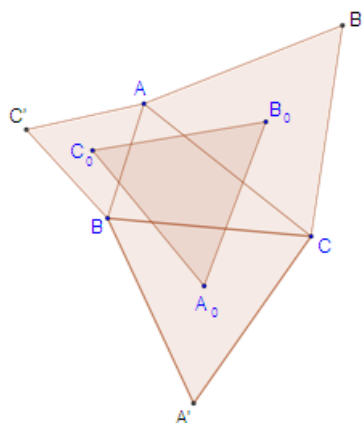
Ta có một tính chất khác của điểm anti-Steiner như sau: Gọi  $P$  là một điểm bất kì trên  $d$ .  $P_A, P_B, P_C$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $P$  qua các cạnh tam giác. Ta có các đường tròn  $(AP_B P_C), (BP_C P_A), (CP_A P_B)$  cùng đi qua  $G$ .



Chứng minh:  $(AP_C, AP_B) \equiv 2(AB, AC) \equiv (d_c, d_b) \pmod{\pi} \Rightarrow G \in (AP_B P_C)$ . Tương tự, ta có đpcm.

**Định lý 1.1.34** (Định lý Napoleon) Cho tam giác  $ABC$ , về phía ngoài tam giác dựng các tam giác đều  $BCA', CAB', ABC'$ . Gọi  $A_0, B_0, C_0$  theo thứ tự là tâm của các tam giác đều trên. Khi đó  $A_0 B_0 C_0$  là tam giác đều

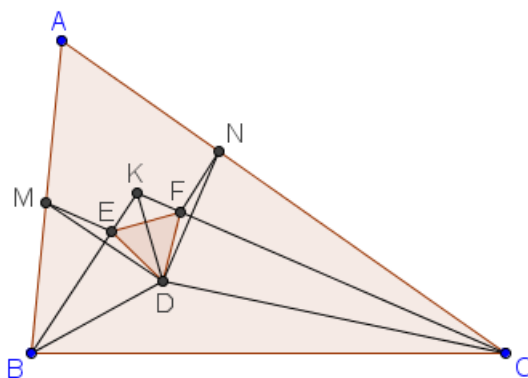
**Chứng minh.**



Đặt  $Z_1 = Z(C, 30^\circ, \sqrt{3})$ ,  $Z_2 = Z(B, 30^\circ, \frac{1}{\sqrt{3}})$ . Xét tích  $Z_2 \circ Z_1$ . Ta thấy  $Z_1 : A_0 \rightarrow A', B_0 \rightarrow A$  và  $Z_2 : A' \rightarrow A_0, A \rightarrow C_0$ . Do đó  $Z_2 \circ Z_1 : B_0 \rightarrow C_0$  và  $A_0 \rightarrow A_0$ . Mặt khác,  $k_1.k_2 = 1, \alpha_1 + \alpha_2 = 60^\circ$  nên  $Z_2 \circ Z_1$  là một phép dời hình, cụ thể là phép quay tâm  $A_0$  biến  $B_0 \rightarrow C_0$ . Mà góc quay bằng  $60^\circ$  nên  $A_0B_0C_0$  là tam giác đều (đpcm)

**Định lý 1.1.35** (Định lý Morley) Những đường chia ba của những cặp góc kề nhau của một tam giác bất kì cắt nhau tại ba điểm xác định một tam giác đều.

**Chứng minh.**



*Cách 1:*

Đặt  $\widehat{A} = 3\alpha, \widehat{B} = 3\beta, \widehat{C} = 3\gamma$ . Lấy điểm  $K$  trong tam giác sao cho  $\widehat{KBA} = \beta, \widehat{KCA} = \gamma$ . Gọi  $D$  là giao điểm các đường phân giác của tam giác  $DBC$ . Lấy  $E, F$  theo thứ tự trên  $KB, KC$  sao cho  $\widehat{KDE} = \widehat{KDF} = 30^\circ \Rightarrow \Delta KED = \Delta KFD \Rightarrow DE = DF$ . Lại có  $\widehat{EDF} = 60^\circ$  nên tam giác  $DEF$  đều.

Gọi  $M, N$  theo thứ tự là điểm đối xứng với  $D$  qua  $KB, KC$ . Vì  $KD$  là phân giác của góc  $BKC$  nên ta chứng minh được  $DM = DN$ . Tam giác cân  $DMN$  có  $DK$  là phân giác góc  $MDN$  (dễ thấy) nên  $DK \perp MN$ . Tam giác đều  $DEF$  có  $DK$  là phân giác góc  $EDF$  nên  $DK \perp EF$ . Suy ra  $MN \parallel EF$ .

Ta có  $\widehat{MEF} = 360^\circ - 60^\circ - 2\widehat{DEB} = 300^\circ - 2\widehat{DEB}, \widehat{DEB} = 30^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BKC}, \widehat{BKC} =$

$180^\circ - 2(\beta + \gamma) = 180^\circ - 2(60^\circ - \alpha) = 60^\circ + 2\alpha$ . Từ đó suy ra  $\widehat{MEF} = 180^\circ - 2\alpha$ . Lại có  $ME = ED = EF$  nên  $\triangle MEF$  cân có góc ở đỉnh bằng  $180^\circ - 2\alpha$  nên  $\widehat{MFE} = 2\alpha$ . Suy ra  $\widehat{MFN} = \widehat{EFN} - \widehat{MFE} = 180^\circ - 3\alpha$ . Lại có  $\widehat{A} = 3\alpha \Rightarrow$  tứ giác  $AMFN$  nội tiếp. Mặt khác,  $MEFN$  là hình thang cân nên  $MEFN$  là tứ giác nội tiếp. Vậy năm điểm  $A, M, E, F, N$  đồng viên. Vì  $ME = EF = FN$  nên  $\widehat{MAE} = \widehat{EAF} = \widehat{FAN}$ . Suy ra  $D, E, F$  là các giao điểm của các đường chia ba các góc của tam giác  $ABC \Rightarrow đpcm$ .

Cách 2:

Đặt  $AE = n, AF = m$ . Ta có  $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ - \gamma$ . Áp dụng định lý sin cho tam giác  $AEB$ , ta có  $\frac{n}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow n = \frac{c \sin \beta}{\sin(60^\circ - \gamma)}$ .

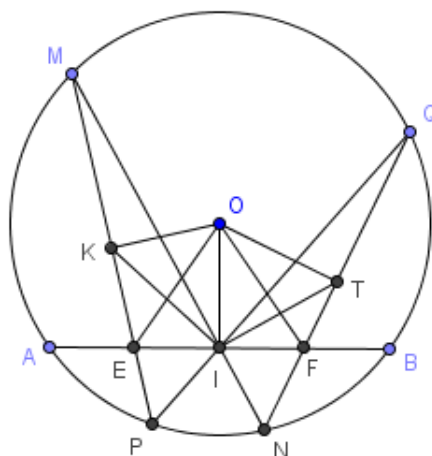
Tương tự:  $m = \frac{b \sin \gamma}{\sin(60^\circ - \beta)}$ . Áp dụng định lý sin cho tam giác  $ABC$ , ta có  $\frac{b}{c} = \frac{\sin 3\beta}{\sin 3\gamma} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\sin 3\beta \cdot \sin \gamma \cdot \sin(60^\circ - \gamma)}{\sin 3\gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin(60^\circ - \beta)}$ .

Mặt khác, ta có hệ thức  $\sin 3x = 4 \sin x \cdot \sin(60^\circ + x) \cdot \sin(60^\circ - x)$ . Suy ra  $\frac{m}{n} = \frac{\sin(60^\circ + \beta)}{\sin(60^\circ + \gamma)}$ . Do đó  $\widehat{AEF} = 60^\circ + \beta, \widehat{AFE} = 60^\circ + \gamma$ . Tương tự, ta có  $\widehat{BED} = 60^\circ + \alpha \Rightarrow \widehat{FEA} + \widehat{AEB} + \widehat{BED} = 300^\circ \Rightarrow \widehat{DEF} = 60^\circ$ . Tương tự, ta suy ra tam giác  $DEF$  có các góc bằng  $60^\circ \Rightarrow$  tam giác  $DEF$  đều.

Sau đây là bài toán mở rộng nhất về định lý Morley: Nếu chia  $n$  ( $n \geq 3$ ) tất cả các góc của một đa giác  $m$  cạnh, thì tất cả các giao của các đường thẳng là các đỉnh phân biệt của một hệ  $\frac{1}{2}m(m-1)n(n-1)^2$  đa giác đều  $n$  cạnh, có thể phân chia làm  $\frac{1}{2}m(m-1)$  họ, mỗi họ có  $n(n-1)^2$  đa giác có tâm thẳng hàng.

**Định lý 1.1.36** (Định lý con bướm với đường tròn) Cho đường tròn  $(O)$  và dây cung  $AB$ .  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Qua  $I$  vẽ hai dây cung tùy ý  $MN$  và  $PQ$  sao cho  $MP$  và  $NQ$  cắt  $AB$  tại  $E, F$ . Khi đó  $I$  là trung điểm của  $EF$ .

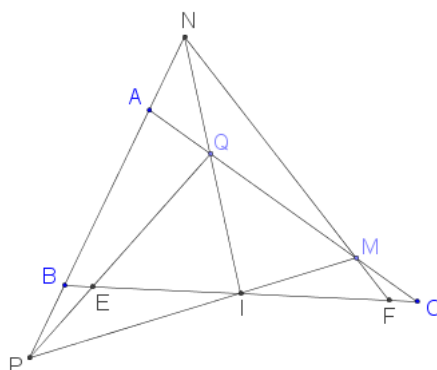
**Chứng minh.**



Gọi  $K, T$  là trung điểm  $MP$  và  $NQ$ . Ta có  $OIEK, OIFT$  là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow$   
 $(OE, OI) \equiv (KE, KI)$ ,  
 $(OI, OF) \equiv (TI, TF) \pmod{\pi}$   
 Lại có  $\Delta MIP \sim \Delta QIN \Rightarrow (KE, KI) \equiv (TI, TF) \pmod{\pi} \Rightarrow (OE, OI) \equiv (OI, OF)$   
 $\pmod{\pi} \Rightarrow \Delta EOF$  cân tại  $O \Rightarrow I$  là trung điểm  $EF$  (đpcm)

**Định lý 1.1.37** (Định lý con bướm với cặp đường thẳng) Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Qua  $I$  kẻ các đường thẳng  $\Delta$  cắt  $AB, AC$  tại  $N, Q$ , đường thẳng  $\Delta'$  cắt  $AB, AC$  tại  $P, M$ . Gọi  $MN, PQ$  cắt  $BC$  tại  $F, E$ . Khi đó ta có  $I$  là trung điểm của  $EF$ .

**Chứng minh.**



Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $ABC$ , ta có các hệ thức sau:

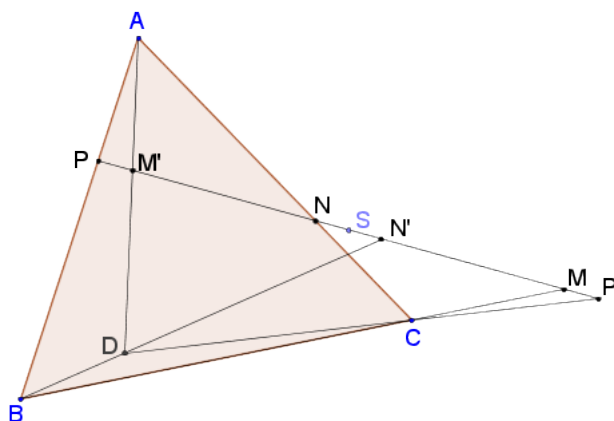
$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = 1; \frac{\overline{IC}}{\overline{IB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}$$

Lại có  $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1; \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}} \Rightarrow I$  là trung điểm  $EF$   
 (đpcm)

**Định lý 1.1.38** (Định lý Blaikie) Cho tam giác  $ABC$  và đường thẳng  $d$  sao cho  $d$  cắt  $BC, CA, AB$  lần lượt ở  $M, N, P$ . Gọi  $S$  là 1 điểm bất kì trên  $d$ . Gọi  $M', N', P'$  lần lượt là điểm đối xứng của  $M, N, P$  qua  $S$ . Khi đó  $AM', BN', CP'$  đồng quy tại một điểm  $D$  và ta gọi  $D$  là điểm Blaikie của  $d$  và  $S$  đối với tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.**



Gọi  $D$  là giao điểm  $AM'$  và  $BN'$ . Áp dụng định lý Menelaus, ta có:

$$\text{Xét } \triangle PBN' \text{ với cát tuyến } ADM: \frac{AP}{AB} \cdot \frac{DB}{DN'} \cdot \frac{M'N'}{M'P} = 1$$

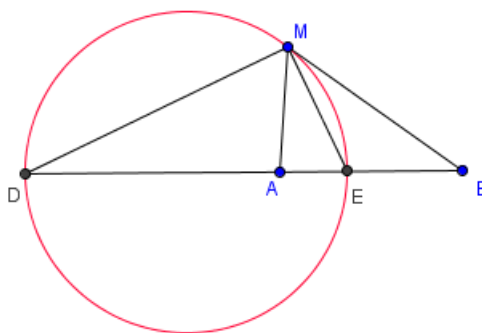
$$\text{Xét } \triangle MBP \text{ với cát tuyến } CAN: \frac{CM}{CB} \cdot \frac{AB}{AP} \cdot \frac{NP}{NM} = 1$$

$$\text{Nhân theo vế 2 đẳng thức trên, chú ý rằng } \overline{M'N'} = \overline{NM}, \text{ ta có } \frac{DB}{DN'} \cdot \frac{NP}{M'P} \cdot \frac{CM}{CB} = 1$$

$$\text{Lại có } \overline{NP} = \overline{P'N'}, \overline{M'P} = \overline{P'M} \Rightarrow \frac{DB}{DN'} \cdot \frac{P'N'}{P'M} \cdot \frac{CM}{CB} = 1 \Rightarrow D, C, P' \text{ thẳng hàng} \\ \Rightarrow AM', BN', CP' \text{ đồng quy tại } D \text{ (đpcm)}$$

**Định lý 1.1.39** (Đường tròn Apollonius) Cho 2 điểm  $A, B$  cố định. Khi đó quỹ tích các điểm  $M$  sao cho  $\frac{MA}{MB} = k \neq 1$  là một đường tròn cố định được gọi là đường tròn Apollonius của hai điểm  $A$  và  $B$  với tỉ số  $k$ .

**Chứng minh.**



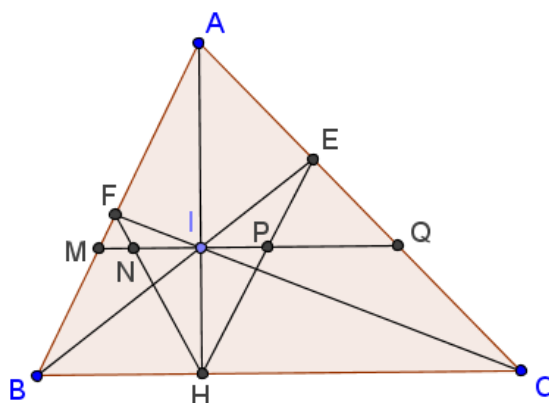
Lấy  $D, E$  trên đường thẳng  $AB$  sao cho  $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = k \Rightarrow (DEAB) = -1$ .

Thuận: Ta có  $\frac{MA}{MB} = \frac{EA}{EB} = \frac{DA}{DB} = k \Rightarrow MD, ME$  là phân giác ngoài và trong của  $\widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{DME} = 90^\circ \Rightarrow M$  nằm trên đường tròn đường kính  $DE$ .

Đảo: Lấy  $M'$  trên đường tròn đường kính  $DE \Rightarrow \widehat{DM'E} = 90^\circ \Rightarrow M'E$  là phân giác trong của  $\widehat{AMB}$  (vì  $(DEAB) = -1$ )  $\Rightarrow đpcm$ .

**Định lý 1.1.40** (Định lý Blanchet) Cho tam giác  $ABC$  có  $AH$  là đường cao ứng với cạnh  $BC$ . Gọi  $I$  là một điểm tùy ý thuộc đoạn  $AH$ . Các đoạn thẳng  $BI, CI$  cắt các cạnh tam giác tại  $E$  và  $F$ . Chứng minh rằng  $HA$  là phân giác của  $\widehat{EHF}$ .

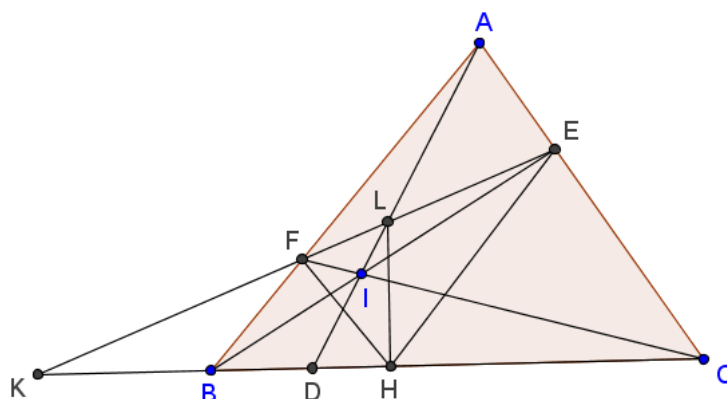
**Chứng minh.**



Qua  $I$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $AB, HF, HE, AC$  lần lượt tại  $M, N, P, Q$ . Áp dụng định lý Thales, ta có  $\frac{IN}{IM} = \frac{CH}{CB}, \frac{IQ}{IP} = \frac{BC}{BH}, \frac{CH}{BH} = \frac{IQ}{BM}$ . Nhân theo vế 3 đẳng thức trên, ta có  $IN = IP \Rightarrow \Delta HNP$  cân tại  $H \Rightarrow đpcm$ .

**Định lý 1.1.41** (Định lý Blanchet mở rộng) Cho tam giác  $ABC$ , lấy  $D, E, F$  lần lượt thuộc các đoạn  $BC, CA, AB$  sao cho 3 đường thẳng  $AD, BE, CF$  đồng quy tại một điểm  $I$ . Gọi  $L$  là giao điểm của  $AD$  và  $EF$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $L$  xuống  $BC$ . Khi đó  $HL$  là phân giác của  $\widehat{EHF}$ .

**Chứng minh.**

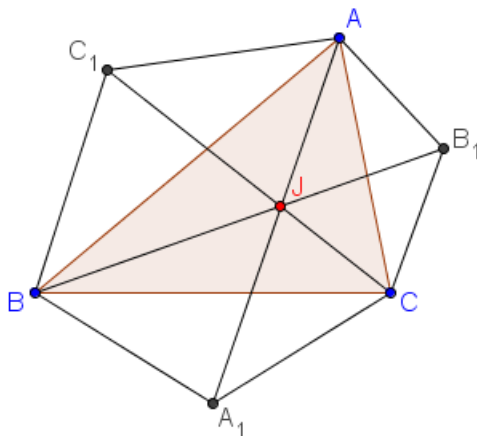


Áp dụng định lý Ceva cho tam giác  $ABC$ , ta có  $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $ABC$  với cát tuyến  $KEF$ , ta có  $\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$   
 $\Rightarrow (KDBC) = -1 \Rightarrow (KFLE) = -1$ . Lại có  $\widehat{LHK} = 90^\circ \Rightarrow HL$  là phân giác của  $\widehat{FHE}$  (đpcm)

**Định lý 1.1.42** (Định lý Jacobi) Cho  $\Delta ABC$  và các điểm  $A_1, B_1, C_1$  trên mặt phẳng sao cho  $\widehat{BAC_1} = \widehat{CAB_1} = \alpha, \widehat{ABC_1} = \widehat{CBA_1} = \beta, \widehat{BCA_1} = \widehat{ACB_1} = \gamma$ . Khi đó  $AA_1, BB_1, CC_1$  đồng quy tại điểm Jacobi  $J$ .

**Chứng minh.**



Ta có  $AA_1, BA_1, CA_1$  đồng quy tại  $A_1$ . Áp dụng định lý Ceva sin, ta có:

$$\frac{\sin \widehat{CBA_1} \cdot \sin \widehat{BAA_1} \cdot \sin \widehat{ACA_1}}{\sin \widehat{ABA_1} \cdot \sin \widehat{CAA_1} \cdot \sin \widehat{BCA_1}} = 1 \Rightarrow \frac{\sin \beta \cdot \sin \widehat{BAA_1} \cdot \sin(C + \gamma)}{\sin(B + \beta) \cdot \sin \widehat{CAA_1} \cdot \sin \gamma} = 1$$

Xây dựng 2 đẳng thức tương tự cho  $B_1, C_1$  rồi nhân theo vế 3 đẳng thức trên, ta có

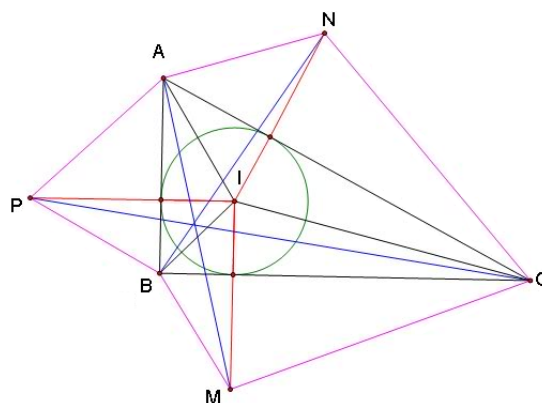
$$\frac{\sin \widehat{BAA_1} \cdot \sin \widehat{ACC_1} \cdot \sin \widehat{CBB_1}}{\sin \widehat{CAA_1} \cdot \sin \widehat{BCC_1} \cdot \sin \widehat{ABB_1}} = 1 \Rightarrow AA_1, BB_1, CC_1 \text{ đồng quy (đpcm)}$$

**Định lý 1.1.43** (Định lý Kiepert) Dựng ra phía ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác cân đồng dạng  $BCM, CAN, ABP$  (cân ở  $M, N, P$ ). Khi ấy ta có  $AM, BN, CP$  đồng quy.

**Chứng minh.** Dễ thấy định lý Kiepert là hệ quả trực tiếp của định lý Jacobi khi  $\alpha = \beta = \gamma$ .

**Định lý 1.1.44** (Định lý Kariya) Cho tam giác  $ABC$  có  $(I)$  là đường tròn nội tiếp. Ở phía ngoài tam giác lấy các điểm  $M, N, P$  sao cho  $IM = IN = IP$  và  $IM, IN, IP$  tương ứng vuông góc  $BC, CA, AB$ . Khi đó ta có  $AM, BN, CP$  đồng quy.

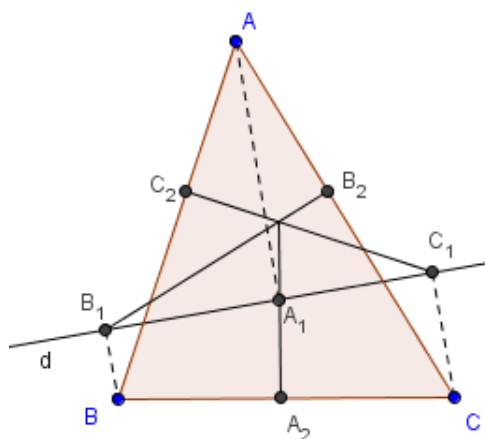
**Chứng minh.**



Ta thấy  $\triangle BIM = \triangle BIP$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{IBM} = \widehat{IBP} \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{ABP}$ . Tương tự:  $\widehat{BAP} = \widehat{CAN}, \widehat{ACN} = \widehat{BCM}$ . Theo định lý Jacobi ta có đpcm.

**Định lý 1.1.45** (Cực trực giao (khái niệm mở rộng của trực tâm tam giác)) Cho tam giác  $ABC$ ;  $d$  là một đường thẳng bất kì trong mặt phẳng. Gọi  $A_1, B_1, C_1$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B, C$  trên  $d$ . Gọi  $A_2, B_2, C_2$  lần lượt là hình chiếu của  $A_1, B_1, C_1$  trên  $BC, CA, AB$ . Khi đó  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  đồng quy tại một điểm gọi là cực trực giao của đường thẳng  $d$  đối với tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.**



Áp dụng định lý Carnot, ta có:

$A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  đồng quy

$$\Leftrightarrow (A_2B^2 - A_2C^2) + (B_2C^2 - B_2A^2) + (C_2A^2 - C_2B^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A_1B^2 - A_1C^2) + (B_1C^2 - B_1A^2) + (C_1A^2 - C_1B^2) = 0$$

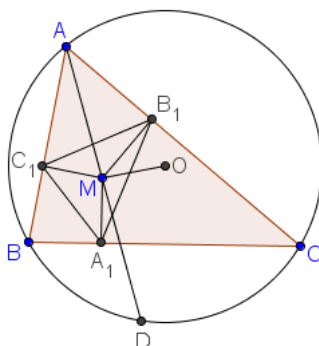
$$\Leftrightarrow (A_1B^2 - C_1B^2) + (B_1C^2 - A_1C^2) + (C_1A^2 - B_1A^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A_1B_1^2 - C_1B_1^2) + (B_1C_1^2 - A_1C_1^2) + (C_1A_1^2 - B_1A_1^2) = 0 \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

Trục tâm là trường hợp riêng của cực trục giao khi  $d$  trùng với một trong ba cạnh của  $\Delta ABC$ .

**Định lý 1.1.46** (Khái niệm tam giác hình chiếu, công thức Euler về diện tích tam giác hình chiếu) Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp trong  $(O; R)$ ,  $M$  là điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Gọi  $A_1, B_1, C_1$  theo thứ tự là hình chiếu của  $M$  trên  $BC, CA, AB$ .  $\Delta A_1B_1C_1$  được gọi là tam giác hình chiếu của  $M$  đối với  $\Delta ABC$ , ta có  $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{d^2}{R^2} \right) S_{ABC}$ , trong đó  $d = MO$ .

**Chứng minh.**



Gọi  $D$  là giao điểm của  $AM$  với  $(O), D \neq A$ . Ta thấy  $\widehat{MC_1A_1} = \widehat{MBA_1}$  và  $\widehat{MC_1B_1} = \widehat{MAB_1} = \widehat{DBC}$  nên  $\widehat{A_1C_1B_1} = \widehat{MBD}$ . Áp dụng định lý sin cho tam

giác  $MBD$ , ta có  $\frac{MB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{MD}{\sin \widehat{MBD}}$ . Do đó:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 \cdot \sin \widehat{A_1C_1B_1} = \frac{1}{2} MA \cdot \sin A \cdot MB \cdot \sin B \cdot \sin \widehat{MBD} = \frac{1}{2} MA \cdot MD \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

Mặt khác,  $MA \cdot MD = P_{M/(O)} = R^2 - OM^2$  và  $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{abc}{8R^3} = \frac{S_{ABC}}{2R^2}$ .

Từ đó suy ra đpcm.

**Định lý 1.1.47** (Khái niệm hai điểm liên hợp đẳng giác) Cho tam giác  $ABC$ .  $M$  là một điểm nằm trong tam giác.

1. Khi đó các đường thẳng đối xứng với  $AM, BM, CM$  qua tia phân giác đồng quy tại  $M'$ .  $M'$  được gọi là điểm liên hợp đẳng giác của  $M$  trong tam giác  $ABC$ .

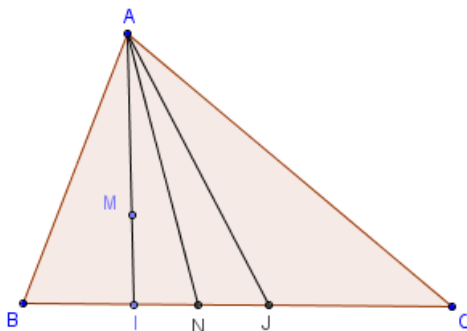
2. Lần lượt đặt  $D, E, F$  và  $D', E', F'$  là chân các đường cao hạ từ  $M$  và  $M'$  xuống  $BC, AC, AB$ .

a. Khi đó  $D, E, F, D', E', F'$  cùng thuộc một đường tròn tâm  $O$ . Và  $O$  là trung điểm của  $MM'$ .

b. Khi đó cũng có  $AM' \perp EF, BM' \perp FD, CM' \perp DE; AM \perp E'F', BM \perp F'D', CM \perp D'E'$ .

$$3. \frac{AM \cdot AM'}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BM'}{BC \cdot BA} + \frac{CM \cdot CM'}{CA \cdot CB} = 1.$$

**Chứng minh. 1.**



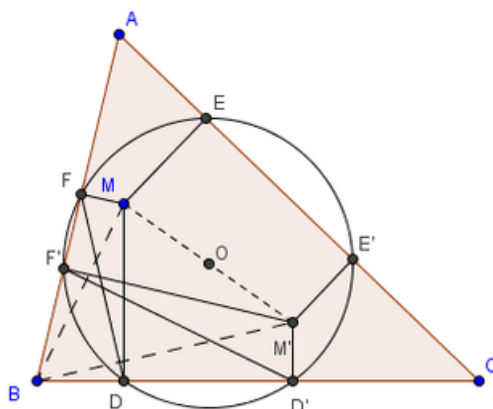
$$\frac{BI}{CJ} = \frac{S_{ABI}}{S_{ACJ}} = \frac{AB \cdot AI}{AC \cdot AJ}; \frac{BJ}{CI} = \frac{S_{ABJ}}{S_{ACI}} = \frac{AB \cdot AJ}{AC \cdot AI} \quad (\text{vì } \widehat{BAI} = \widehat{CAJ}, \widehat{BAJ} = \widehat{CAI})$$

$\Rightarrow \frac{BI}{IC} \cdot \frac{BJ}{JC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ . Ta có 2 đẳng thức tương tự, kết hợp với định lý Ceva ta có đpcm.

Một cách chứng minh khác xem bài tập 28, chương 1, SBT hình học 11 nâng cao.

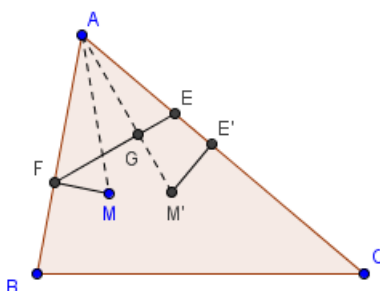
2.

a.

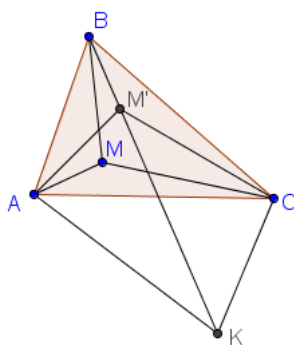


$(BA, BM) \equiv (BM', BC) \Leftrightarrow (DF, DM) \equiv (F'M', F'D') \Leftrightarrow (DF, DM) + \frac{\pi}{2} \equiv$   
 $(F'M', F'D') + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$   
 $\Leftrightarrow (DF, DM) + (DM, DD') \equiv (F'M', F'D') + (F'F, F'M') \pmod{\pi}$   
 $\Leftrightarrow (DF, DD') \equiv (F'F, F'D) \pmod{\pi}$   
 $\Rightarrow FF'DD'$  nội tiếp. Dễ thấy tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác này chính là trung  
 điểm  $O$  của  $MM'$ . Tương tự, ta suy ra 6 điểm  $D, D', E, E', F, F'$  cùng nằm trên một  
 đường tròn tâm  $O$ .

b.



$\widehat{MAF} = \widehat{M'AE}, \widehat{AMF} = \widehat{AEG} \Rightarrow \Delta AMF \sim \Delta AEG \Rightarrow \widehat{AGE} = \widehat{AFM} = 90^\circ$ .  
 Tương tự, ta suy ra đpcm. 3.



Trên tia  $BM'$ , lấy điểm  $K$  sao cho  $\widehat{BCK} = \widehat{BMA}$ .  $\widehat{BMA} > \widehat{BCA} \Rightarrow K$  nằm ngoài  
 $\Delta ABC$ .

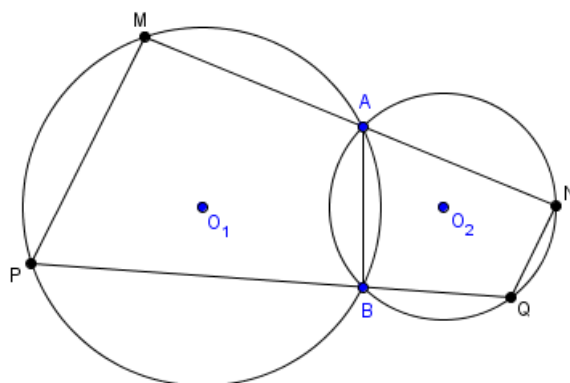
Có  $\widehat{MBA} = \widehat{CBK} \Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta KBC \Rightarrow \frac{AB}{BK} = \frac{BM}{BC} = \frac{AM}{CK}$ . Ta có  $\widehat{ABK} = \widehat{MBC}$ ,  $\frac{AB}{BK} = \frac{BM}{BC}$   
 $\Rightarrow \Delta ABK \sim \Delta MBC \Rightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{BK}{BC} = \frac{AK}{CM}$ . Mặt khác,  $\widehat{CKM'} = \widehat{MAB} = \widehat{M'AC} \Rightarrow A, M', C, K$  đồng viên.

Áp dụng định lý Ptolemy, ta có  $AC.M'K = AM'.CK + CM'.AK \Rightarrow AC(BK - BM') = AM'.CK + CM'.AK$ . Lại có  $CK = \frac{AM.BC}{BM}$ ,  $AK = \frac{AB.CM}{BM}$ ,  $BK = \frac{AB.BC}{BM}$   
 $\Rightarrow AC \left( \frac{AB.BC}{BM} - BM' \right) = \frac{AM'.AM.BC}{BM} + \frac{CM'.AB.CM}{BM}$ . Từ đó suy ra đpcm.

**Định lý 1.1.48** (Định lý Reim) Cho hai đường tròn  $(O_1), (O_2)$  cắt nhau tại  $A, B$ . Một đường thẳng qua  $A$  cắt  $(O_1), (O_2)$  tại  $M, N$ ; một đường thẳng qua  $B$  cắt  $(O_1), (O_2)$  tại  $P, Q$ . Khi đó  $MP // NQ$ .

**Chứng minh.**

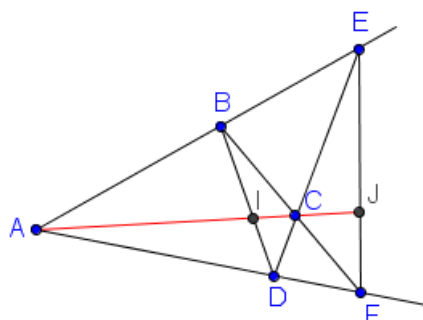
*Chứng minh:*



$(MP, MN) \equiv (MP, MA) \equiv (BP, BA) \equiv (NQ, NA) \equiv (NQ, NM) \pmod{\pi} \Rightarrow$  đpcm.

**Định lý 1.1.49** (Khái niệm tứ giác toàn phần) Một tứ giác toàn phần là một hình được tạo nên bởi bốn đường thẳng, từng đôi một cắt nhau nhưng không có ba đường nào đồng qui. Một hình tứ giác toàn phần có 4 cạnh là 4 đường thẳng đã cho, có 6 đỉnh là 6 giao điểm của chúng và 3 đường chéo là 3 đoạn đi qua đỉnh đối diện (chú ý hai đỉnh này không cùng thuộc một cạnh). Chúng ta có một kết quả cơ bản và thú vị về tứ giác này như sau: Trong hình tứ giác toàn phần cặp đỉnh đối diện nằm trên một đường chéo và cặp giao điểm của đường chéo đó với hai đường chéo còn lại lập thành một hàng điểm điều hòa.

**Chứng minh.**



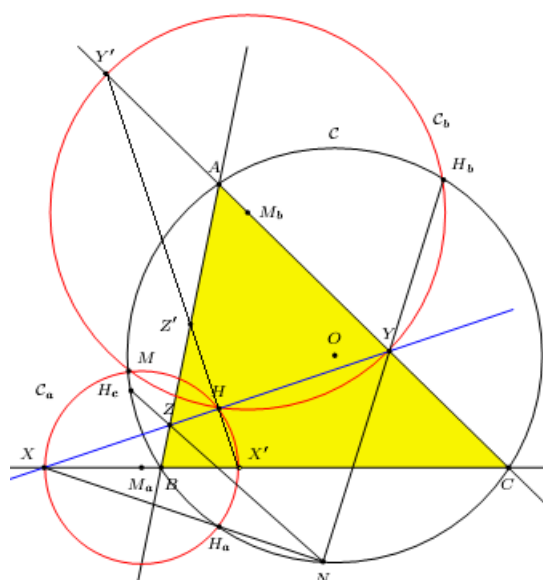
Kí hiệu như hình vẽ. Áp dụng định lý Menelaus, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{IA}}{\overline{IC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} &= 1 \\ \frac{\overline{JA}}{\overline{JC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left( \frac{\overline{IA}}{\overline{IC}} : \frac{\overline{JA}}{\overline{JC}} \right) \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = -1.$$

Mặt khác, ta có  $\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = 1$  ( $\Delta BCE$  với cát tuyến  $ADF$ ). Do đó  $\frac{\overline{IA}}{\overline{IC}} : \frac{\overline{JA}}{\overline{JC}} = -1 \Rightarrow A, C, I, J$  là hàng điểm điều hòa.

**Định lý 1.1.50** (Đường thẳng Droz–Farny) Cho hai đường thẳng bất kì vuông góc với nhau tại trực tâm của tam giác  $ABC$ . Chúng tương ứng cắt các cạnh  $BC, AC, AB$  tại  $X, X'; Y, Y'; Z, Z'$ . Khi đó ta có  $M_a, M_b, M_c$  tương ứng là các trung điểm của  $XX', YY', ZZ'$  thẳng hàng.

**Chứng minh.**



Đặt  $(C)$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  $C_a$  là đường tròn ngoại tiếp  $HXX'$  và  $H_a$  là điểm đối xứng với  $H$  qua  $BC$ . Tương tự với các đường tròn khác.

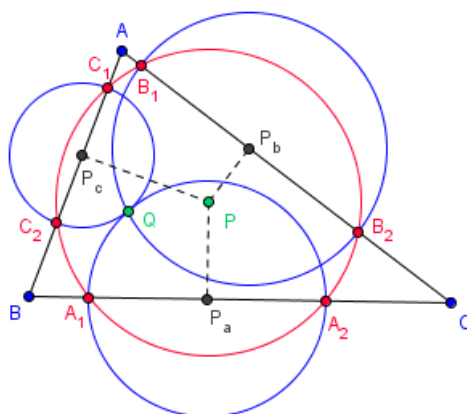
$\Rightarrow C_a, C_b, C_c$  có tâm lần lượt là  $M_a, M_b, M_c$ .  $XX'$  là đường kính của đường tròn  $C_a$ ,

$H_a$  nằm trên đường tròn  $C_a \Rightarrow H_a$  là giao của  $(C)$  và  $C_a$  và  $HH_a \perp BC$ .

Áp dụng định lý Collings với đường thẳng  $XYZ$  đi qua  $H$ , ta có  $H_aX, H_bY, H_cZ$  đồng quy tại  $N$  trên  $C$ . Áp dụng định lý Miquel cho tam giác  $XNY$  với các điểm  $H_a, H_b, H \Rightarrow (C), C_a, C_b$  cùng đi qua  $M$ . Tương tự  $C_c$  cũng đi qua  $M$ . Như vậy  $C_a, C_b, C_c$  cùng đi qua  $H$  và  $M$  suy ra tâm của chúng thẳng hàng.

**Định lý 1.1.51** (Đường tròn Droz–Farny) Cho điểm  $P$  bất kì và tam giác  $ABC$ . Điểm  $Q$  là điểm liên hợp đẳng giác với  $P$  đối với tam giác  $ABC$ . Chân các đường vuông góc với các cạnh  $BC, AC, AB$  của  $P$  là  $P_a, P_b, P_c$ . Lấy  $P_a$  làm tâm vẽ đường tròn đi qua  $Q$  cắt  $BC$  tại  $A_1, A_2$ ;  $B_1, B_2, C_1, C_2$  được định nghĩa tương tự. Khi đó 6 điểm  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  cùng nằm trên một đường tròn tâm  $P$ .

**Chứng minh.**

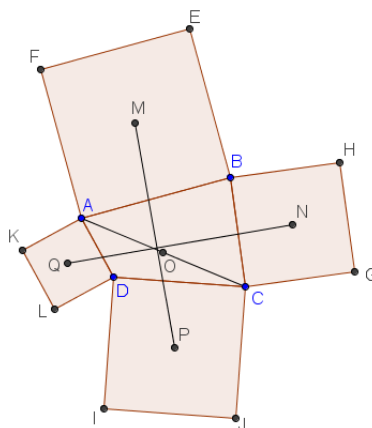


Gọi  $O$  là trung điểm  $PQ$ . Ta đã biết  $O$  cách đều  $P_a, P_b, P_c$ . Áp dụng công thức trung tuyến, ta có:

$$PC_1^2 = PP_c^2 + P_cC_1^2 = PP_c^2 + QP_c^2 = \frac{PQ^2}{2} + 2P_cO^2, \text{ Tương tự, ta suy ra đpcm.}$$

**Định lý 1.1.52** (Định lý Van Aubel về tứ giác và các hình vuông dựng trên cạnh) Về phía ngoài tứ giác  $ABCD$  ta dựng các hình vuông  $ABEF, BCGH, CDIJ, DAKL$  với các tâm tương ứng là  $M, N, P, Q$ . Khi đó ta có  $MP$  và  $NQ$  vuông góc và bằng nhau.

**Chứng minh.**



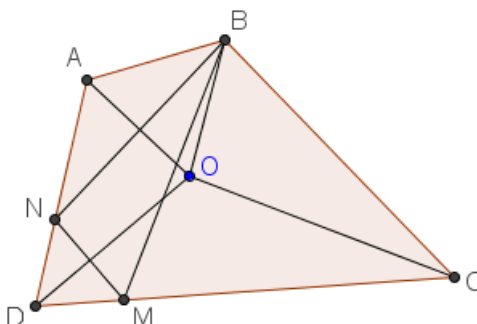
Gọi  $O$  là trung điểm đoạn  $AC$ . Ta thấy  $Z(C, \sqrt{2}, 45^\circ) : N \rightarrow B; Z(A, \frac{1}{\sqrt{2}}, 45^\circ) : B \rightarrow M$ . Do đó  $F = Z(C, \sqrt{2}, 45^\circ) \circ Z(A, \frac{1}{\sqrt{2}}, 45^\circ) : N \rightarrow M$ . Mặt khác,  $F$  là phép đồng dạng thuận, có góc quay bằng  $90^\circ$ , tỉ số 1 và có  $O$  là điểm bất động nên  $F$  là phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$ . Lại có  $F(N) = M, F(Q) = P \Rightarrow$  đpcm.

**Định lý 1.1.53** (Hệ thức Van Aubel) Cho  $\Delta ABC$  và một điểm  $S$  nằm trong tam giác, 3 đường  $AD, BE, CF$  đồng quy tại  $S$  ( $D, E, F$  tương ứng nằm trên các cạnh  $BC, CA, AB$  của tam giác). Khi đó ta có hệ thức  $\frac{AS}{SD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EB}$ .

**Chứng minh.** Áp dụng định lý Gergonne–Euler cho điểm  $A$  với  $\Delta ABC$ , ta có  $\frac{AD}{SD} + \frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE} = 1 \Rightarrow \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{SD} - 1 = \frac{AS}{SD}$  (đpcm)

**Định lý 1.1.54** (Định lý Pithot) Tứ giác lồi  $ABCD$  là tứ giác ngoại tiếp khi và chỉ khi:  $AB + CD = BC + DA$ .

**Chứng minh.**



Thuận: Tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp  $\Rightarrow AB + CD = BC + DA$ . (dễ chứng minh)

Đảo:  $AB + CD = BC + DA \Rightarrow$  tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp.

Không giảm tổng quát, giả sử  $AB \leq AD \Rightarrow BC \leq CD$ . Khi đó tồn tại  $M, N$  trên

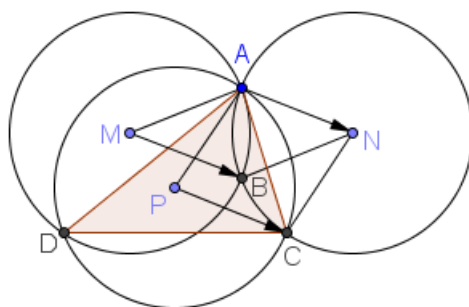
$CD, DA$  sao cho  $AN = AB, CM = CB$ . Suy ra  $DN = DM$ .

Do đó các đường phân giác của các góc tại đỉnh  $A, D, C$  sẽ là ba đường trung trực của tam giác  $BMN$  nên chúng đồng quy tại một điểm  $O$ .

Để thấy  $O$  cách đều 4 cạnh tứ giác nên ta có điều cần chứng minh.

**Định lý 1.1.55** (Định lý Johnson) Cho ba đường tròn có cùng bán kính  $R$  với tâm lần lượt là  $M, N, P$  và cùng đi qua một điểm  $A$ . Khi ấy ba giao điểm khác  $A$  của ba đường tròn ấy cùng nằm trên một đường tròn có bán kính là  $R$ .

**Chứng minh.**

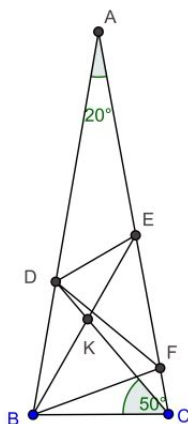


Kí hiệu các giao điểm như hình vẽ. Để thấy các tứ giác  $AMBN, APCN$  là hình thoi, suy ra  $\vec{MB} = \vec{PC}$

( $= \vec{AN}$ )  $\Rightarrow MPCB$  là hình bình hành  $\Rightarrow M$  và  $C, P$  và  $B$  đối xứng với nhau qua trung điểm  $O$  của  $MC$ . Tương tự, ta có  $D$  và  $N$  đối xứng với nhau qua  $O$ . Do đó phép đối xứng tâm  $O$  biến  $(MNP) \rightarrow (CBD)$   
 $\Rightarrow đpcm$ .

**Định lý 1.1.56** (Bài toán Langley) Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  có góc ở đỉnh bằng  $20^\circ$ . Trên các cạnh  $AB, AC$  lấy  $D, E$  sao cho  $\widehat{BCD} = 50^\circ, \widehat{CBE} = 60^\circ$ . Tính góc  $\widehat{BED}$ .

**Chứng minh.**



Đặt  $\widehat{BED} = x$ , trên cạnh  $AC$ , lấy điểm  $F$  sao cho  $BF = BC$ .

Mặt khác tam giác  $BDC$  cân tại (vì  $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = 50^\circ$ )  $\Rightarrow BD = BC \Rightarrow BD =$

BF.

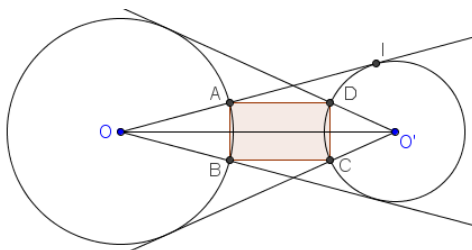
Ta tính được  $\widehat{DBF} = 60^\circ \Rightarrow \triangle DBF$  đều  $\Rightarrow DF = BF$ .

$\triangle BFE$  cân tại F ( $\widehat{BEF} = \widehat{BFE} = 40^\circ$ )  $\Rightarrow EF = BF$

$\Rightarrow DF = EF \Rightarrow \triangle DFE$  cân tại F  $\Rightarrow x + 40^\circ = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} \Rightarrow x = 30^\circ$

**Định lý 1.1.57** (Định lý Eyeball) Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  ngoài nhau. 2 tiếp tuyến kẻ từ  $O$  đến  $(O')$  cắt  $(O)$  tại  $A$  và  $B$ . 2 tiếp tuyến kẻ từ  $O'$  đến  $(O)$  cắt  $(O')$  tại  $C$  và  $D$ . Khi đó  $ABCD$  là hình chữ nhật.

**Chứng minh.**



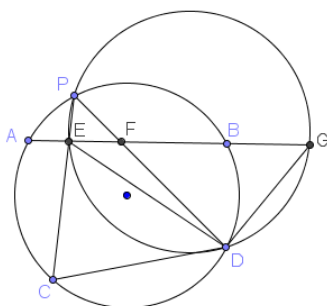
Đặt bán kính của  $(O)$  và  $(O')$  lần lượt là  $R$  và  $R'$ . Ta có  $AB = 2R \sin \widehat{IOO'} = \frac{2R \cdot R'}{OO'}$ .

Tương tự, ta suy ra  $AB = CD$ .

Mặt khác, ta có  $A$  và  $B, C$  và  $D$  đối xứng với nhau qua  $OO'$ . Suy ra  $ABCD$  là hình chữ nhật (đpcm)

**Định lý 1.1.58** (Bổ đề Haruki) Cho  $AB$  và  $CD$  là hai dây cung không cắt nhau của cùng một đường tròn và  $P$  là một điểm bất kỳ trên cung  $AB$  không chứa  $CD$  của đường tròn ấy. Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là giao điểm của  $PC, PD$  với  $AB$ . Khi đó giá trị biểu thức  $\frac{AE \cdot BF}{EF}$  không phụ thuộc vào vị trí điểm  $P$ .

**Chứng minh.**

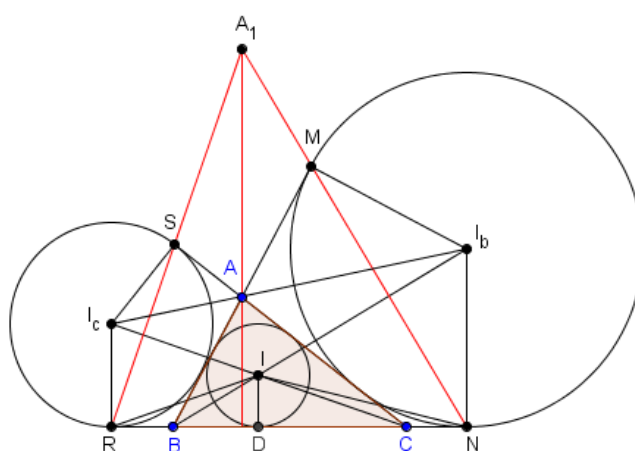


Gọi  $G$  là giao điểm khác  $E$  của  $(PDE)$  với  $AB$ . Ta có  $\widehat{AGD} = \widehat{CPD}$  không đổi  $\Rightarrow G$  cố định  $\Rightarrow BG$  không đổi. Mặt khác:  $AF \cdot FB = PF \cdot FD = EF \cdot FG \Rightarrow (AE + EF) \cdot FB = EF \cdot (FB + BG)$

$\Rightarrow AE \cdot FB = EF \cdot BG \Rightarrow \frac{AE \cdot BF}{EF} = BG$  không đổi (đpcm)

**Định lý 1.1.59** (Định lý Paul Yiu về đường tròn bàng tiếp) Cho  $\Delta ABC$ , các đường tròn bàng tiếp trong các góc tiếp xúc với các cạnh như hình vẽ. Các đường thẳng  $MN, PQ, RS$  cắt nhau đôi một tại  $A_1, B_1, C_1$ . Khi đó  $AA_1, BB_1, CC_1$  đồng quy tại trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.**



Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ ,  $D$  là tiếp điểm của  $(I)$  với  $BC$ . Ta sẽ chứng minh  $AA_1 \perp BC$ .

Ta biết rằng:  $CR = p, CD = p - c$  nên  $RD = c$ . Suy ra  $RB = RD - BD = c - (p - b) = p - a$ . Hoàn toàn tương tự thì  $ND = b$  và  $NC = p - a$ . Ta thấy

$$RI^2 - RC^2 + AC^2 - AB^2 + NB^2 - NI^2 = (RI^2 - NI^2) + b^2 - c^2 = (DR^2 - DN^2) + b^2 - c^2 = c^2 - b^2 + b^2 - c^2 = 0$$

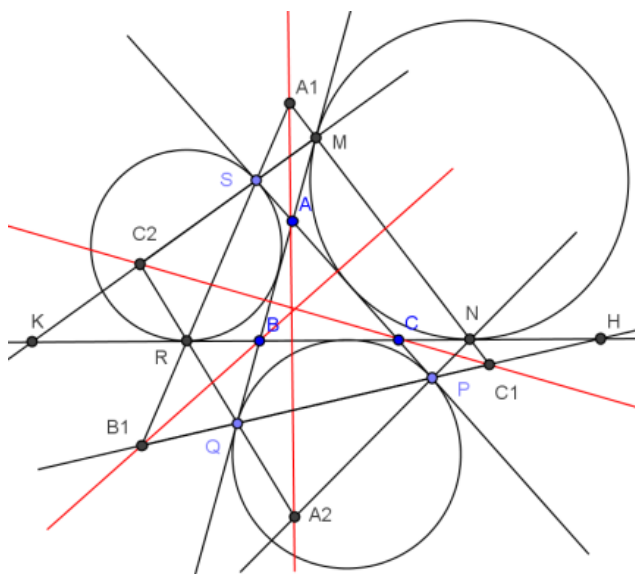
Từ đó theo định lý Carnot thì đường thẳng đi qua  $A$  vuông góc với  $BC$ , đường thẳng đi qua  $A$  vuông góc với  $CI$  và đường thẳng đi qua  $N$  vuông góc với  $BI$  đồng quy.

Do đó  $AA_1$  vuông góc với  $BC$ , hay  $AA_1$  đi qua  $H$ .

Hoàn toàn tương tự, ta có  $BB_1, CC_1$  đi qua  $H$ . Như vậy ta có đpcm.

Ta có kết quả sau: Các đường thẳng  $NP, RQ, MS$  cắt nhau đôi một tại  $A_2, B_2, C_2$ . Khi đó các bộ 3 điểm  $(A, A_1, A_2), (B, B_1, B_2), (C, C_1, C_2)$  thẳng hàng và các đường thẳng qua chúng đồng quy.

Chứng minh:



Gọi  $H, K$  là giao điểm của  $PQ$  và  $MS$  với  $BC$ . Áp dụng định lí Menelaus cho  $\Delta MBK$  với cát tuyến  $C_2RQ$ ) và  $\Delta BMN$  với cát tuyến  $QC_1H$  ta có:  $\frac{QB}{QM} \cdot \frac{C_1M}{C_1N} \cdot \frac{HN}{HB} =$

$$1; \frac{C_2K}{C_2M} \cdot \frac{QM}{QB} \cdot \frac{RB}{RK} = 1. \text{ Nhân theo vế 2 đẳng thức trên, suy ra } \frac{C_1M}{C_1N} \cdot \frac{C_2K}{C_2M} \cdot \frac{RB}{RK} \cdot \frac{HN}{HB} =$$

1 (1). Áp dụng định lí Menelaus cho  $\Delta ABC$  với cát tuyến  $MSK$  và  $QPH$ , ta có  $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{KB}{KC} \cdot \frac{SC}{SA} = 1 = \frac{HC}{HB} \cdot \frac{QB}{QA} \cdot \frac{PA}{PC}$ .

Mặt khác, ta tính được  $MA = BQ = p - c, SA = CP = p - b$

$$\Rightarrow \frac{SC}{SA} = \frac{PA}{PC}, \frac{MA}{MB} = \frac{QB}{QA} \Rightarrow \frac{KB}{KC} = \frac{HC}{HB}$$

$$\Rightarrow KB(HC + CB) = HC(KB + BC) \Rightarrow HC = BK \Rightarrow HB = CK, HN = RK, \frac{RB}{HB} =$$

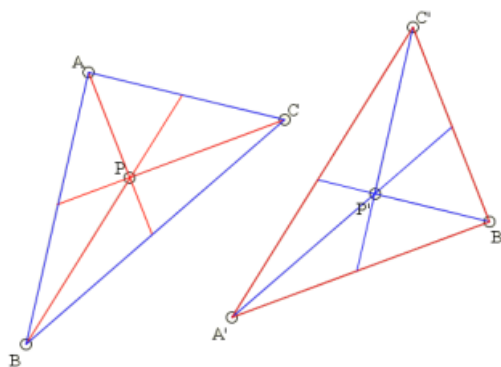
$$\frac{CN}{CK}$$

(vì  $NC = BR = \pm(p - a)$ )

Thay vào (1), ta có  $\frac{C_2K}{C_2M} \cdot \frac{C_1M}{C_1N} \cdot \frac{CN}{CK} = 1 \Rightarrow C, C_1, C_2$  thẳng hàng. Hai bộ 3 điểm còn lại chứng minh tương tự.

**Định lý 1.1.60** (Định lý Maxwell) Cho  $\Delta ABC$  và một điểm  $P$ , các cạnh của  $\Delta A'B'C'$  song song với các đường thẳng đi qua một đỉnh  $\Delta ABC$  và điểm  $P$ . Qua  $A', B', C'$  kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của  $\Delta ABC$ . Khi đó ta có các đường thẳng này đồng quy tại một điểm  $P'$ .

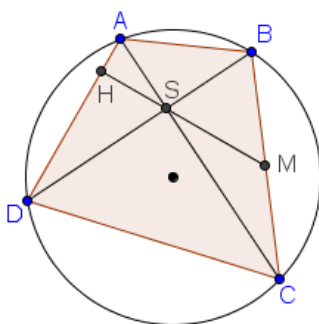
**Chứng minh.**



Để kiểm tra được các góc bằng nhau nên áp dụng định lý Ceva sin thuận và đảo, ta có đpcm. Trường hợp tương tự cũng xảy ra nếu đổi 'song song' thành 'vuông góc'.

**Định lý 1.1.61** (Định lý Brahmagupta về tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc) Cho tứ giác nội tiếp  $ABCD$  có  $AC$  vuông góc với  $BD$  tại  $S$ . Khi đó đoạn nối trung điểm một cạnh với  $S$  sẽ vuông góc với cạnh đối diện.

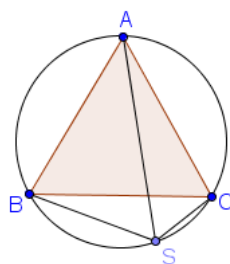
**Chứng minh.**



Ta chứng minh đại diện, chẳng hạn gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  ta cần chứng minh  $MS$  vuông góc với  $AD$ . Thật vậy,  $MS$  cắt  $AD$  ở  $H$ . Ta có  $\widehat{BSC} = 90^\circ$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$  nên  $MS = MC \Rightarrow$  tam giác  $SMC$  cân tại  $M$ .  
 $\Rightarrow \widehat{ASH} = \widehat{MSC} = \widehat{MCS} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ . Từ đây dễ suy ra đpcm.

**Định lý 1.1.62** (Định lý Schooten) Cho tam giác đều  $ABC$  nội tiếp  $(O)$ . Khi đó với mọi điểm  $S$  nằm trên  $(O)$  thì một trong 3 đoạn  $SA, SB, SC$  có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn còn lại.

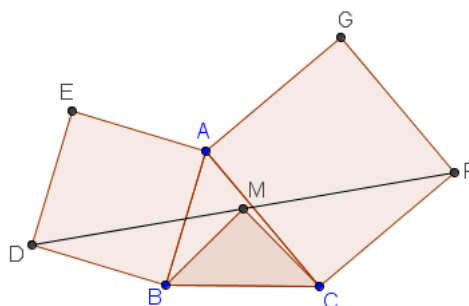
**Chứng minh.**



Gọi độ dài cạnh tam giác đều là  $a$ . Không giảm tính tổng quát, giả sử  $S$  nằm trên cung nhỏ  $BC$ . Áp dụng định lý Ptolemy, ta có  $BS.AC + CS.AB = AS.BC \Rightarrow a.BS + a.CS = a.AS \Rightarrow BS + CS = AS$  (đpcm)

**Định lý 1.1.63** (Định lý Bottema) Cho 2 điểm  $B, C$  cố định, điểm  $A$  di động trong nửa mặt phẳng bờ  $BC$ . Về phía ngoài tam giác  $ABC$ , ta dựng hai hình vuông  $ABDE, ACFG$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $DF$ . Khi đó trí điểm  $M$  không phụ thuộc vào vị trí điểm  $A$  và tam giác  $MBC$  vuông cân tại  $M$ .

**Chứng minh.**



Ta có  $Q\left(C, \frac{\pi}{2}\right) : F \rightarrow A$  và  $Q\left(B, \frac{\pi}{2}\right) : A \rightarrow D$ . Do đó  $F = Q\left(C, \frac{\pi}{2}\right) \circ Q\left(B, \frac{\pi}{2}\right) : F \rightarrow D$ . Mặt khác,  $F$  phép quay góc  $\pi$  nên  $F$  là phép đối xứng tâm có tâm là trung điểm  $DF$ . Gọi  $Bx, Cy$  là 2 đường thẳng được xác định bởi  $(Cy, CB) \equiv (BC, Bx) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$ ,  $D(\Delta)$  là phép đối xứng trục  $\Delta$  thì ta có  $F = Q\left(C, \frac{\pi}{2}\right) \circ Q\left(B, \frac{\pi}{2}\right) = (D(Cy) \circ D(CB)) \circ (D(BC) \circ D(Bx)) = D(Cy) \circ D(Bx)$  nên  $M$  là giao điểm của  $Bx$  và  $Cy$  hay  $MBC$  là tam giác vuông cân (đpcm)

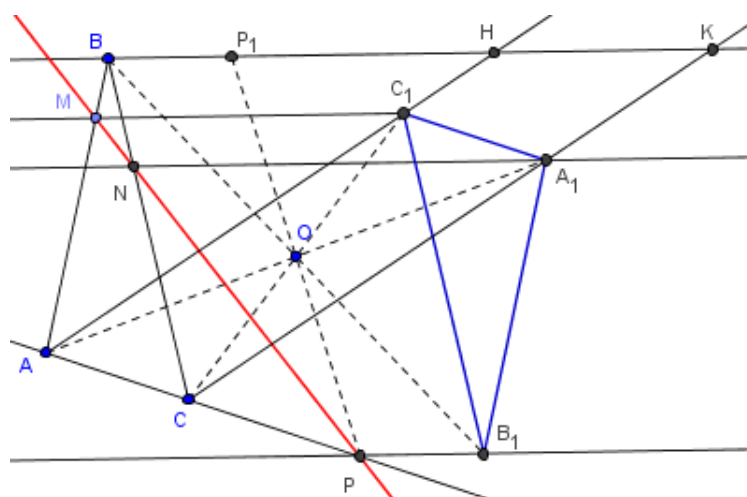
**Định lý 1.1.64** (Định lý Pompeiu) Cho tam giác  $ABC$  đều, và một điểm  $D$  trên mặt phẳng tam giác. Khi đó luôn tồn tại một tam giác (có thể suy biến) với độ dài các cạnh là  $DA, DB, DC$ .

**Chứng minh.** Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy, ta suy ra 3 BĐT sau:  $DA + DB \geq DC, DB + DC \geq DA, DC + DA \geq DB$ . Do đó tồn tại một tam giác với độ dài 3 cạnh là  $DA, DB, DC$ , kí hiệu là  $\mathfrak{T}(DA, DB, DC)$ . Nếu một (và chỉ một) trong 3

bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức thì tam giác  $\mathcal{T}$  suy biến thành một đoạn thẳng. (đpcm)

**Định lý 1.1.65** (Định lý Zaslavsky) Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $O$ . Tam giác  $A_1B_1C_1$  là ảnh của tam giác  $ABC$  qua phép đối xứng tâm  $O$ . Từ  $A_1, B_1, C_1$  kẻ các đường thẳng song song với nhau cắt  $BC, CA, AB$  tại  $N, P, M$ . Khi đó  $M, N, P$  thẳng hàng.

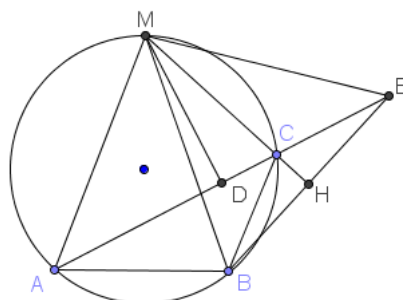
**Chứng minh.**



Từ  $B$  kẻ đường thẳng song song với  $C_1M$  cắt  $AC_1, CA_1, A_1C_1$  tại  $H, K, P_1$ . Vì  $BK, A_1C_1$  là ảnh của  $B_1P, AC$  qua phép đối xứng tâm  $O$  nên  $P_1$  là ảnh của  $P$  qua phép đối xứng tâm  $O$ , suy ra  $\overrightarrow{P_1C_1} = -\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{P_1A_1} = -\overrightarrow{PA}$ . Suy ra  $\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{C_1H}}{\overline{C_1A}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1K}} = -\frac{\overline{C_1H}}{\overline{A_1K}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = -\frac{\overline{C_1P_1}}{\overline{A_1P_1}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = 1$ . Do đó  $M, N, P$  thẳng hàng (đpcm)

**Định lý 1.1.66** (Định lý Archimedes) Cho đường tròn  $(O)$  và 2 điểm  $A, B$  cố định trên  $(O)$ .  $M$  là trung điểm cung  $AB$  của  $(O)$ , điểm  $C$  chuyển động tùy ý trên cung  $AB$  chứa  $M$ . Từ  $M$  kẻ  $MD \perp AC$ . Ta có  $AD = BC + CD$ .

**Chứng minh.**

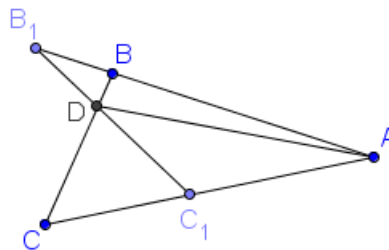


Lấy điểm  $E$  đối xứng với  $B$  qua  $MC$ .  $MC$  cắt  $BE$  tại  $H$ .

Ta có  $\widehat{BCH} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{BCE} = 2\widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{BCE} = \widehat{AMB} + 2\widehat{MAB} = 180^\circ \Rightarrow A, C, D, E$  thẳng hàng. Có  $ME = MB = MA \Rightarrow \Delta AME$  cân tại  $M \Rightarrow D$  là trung điểm  $AE \Rightarrow AD = DE = DC + CE = DC + CB$  (đpcm)

**Định lý 1.1.67** (Định lý Urquhart) Cho 2 bộ 3 điểm thẳng  $ABB_1$  và  $ACC_1$ ,  $D$  là giao điểm  $BC$  và  $B_1C_1$ . Chứng minh rằng  $AB + BD = AC_1 + C_1D \Leftrightarrow AB_1 + B_1D = AC + CD$ .

**Chứng minh.**



Bổ đề: Với mọi  $\Delta ABC$ , ta có  $a = p \left( 1 - \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \right)$

Chứng minh: Áp dụng định lý sin, ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \Rightarrow \frac{a}{p} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$\Rightarrow$  đpcm

Áp dụng bổ đề, ta có

$$AB + BD = AC_1 + C_1D \Leftrightarrow \tan \frac{\widehat{BAD}}{2} \tan \frac{\widehat{ADB}}{2} = \tan \frac{\widehat{CAD}}{2} \tan \frac{\widehat{C_1DA}}{2} \Leftrightarrow \frac{\tan \frac{\widehat{CAD}}{2}}{\tan \frac{\widehat{BAD}}{2}} =$$

$$\frac{\tan \frac{\widehat{ADB}}{2}}{\tan \frac{\widehat{ADC_1}}{2}}$$

$$AB_1 + B_1D = AC + CD \Leftrightarrow \tan \frac{\widehat{BAD}}{2} \tan \frac{\widehat{ADB_1}}{2} = \tan \frac{\widehat{CAD}}{2} \tan \frac{\widehat{CDA}}{2} \Leftrightarrow \frac{\tan \frac{\widehat{CAD}}{2}}{\tan \frac{\widehat{BAD}}{2}} =$$

$$\frac{\tan \frac{\widehat{ADB}_1}{2}}{\tan \frac{\widehat{ADC}}{2}}$$

Mặt khác,  $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = \widehat{ADC}_1 + \widehat{ADB}_1 = 180^\circ \Rightarrow \frac{\tan \frac{\widehat{ADB}}{2}}{\tan \frac{\widehat{ADC}_1}{2}} = \frac{\tan \frac{\widehat{ADB}_1}{2}}{\tan \frac{\widehat{ADC}}{2}}$ .

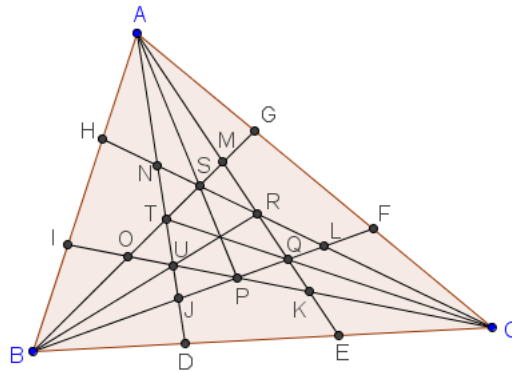
Suy ra đpcm.

**Định lý 1.1.68** (Định lý Poncelet về bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp trong tam giác vuông) Cho tam giác  $ABC$  có  $r$  là bán kính nội tiếp;  $r_a, r_b, r_c$  là các bán kính bàng tiếp. Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  khi và chỉ khi  $r_a = r + r_b + r_c$ .

**Chứng minh.**  $r_a = r + r_b + r_c \Leftrightarrow \frac{S}{p-a} = \frac{S}{p} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} \Leftrightarrow \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \Leftrightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{a}{(p-b)(p-c)}$   
 $\Leftrightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$  (đpcm)

**Định lý 1.1.69** (Định lý Marion Walter) Cho tam giác  $ABC$  và  $D, E, F, G, H, I$  là các điểm chia 3 các cạnh, các giao điểm được xác định như hình vẽ. Ta có  $S_{PQRSTU} = \frac{1}{10}S_{ABC}$ .

**Chứng minh.**



**Bổ đề:** Cho  $\Delta ABC$ , các điểm  $N, M$  trên đường thẳng  $AB, AC$  sao cho  $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MC}$ ,  $\overrightarrow{NA} = n\overrightarrow{NB}$ . Gọi  $P$  là giao điểm  $BM$  và  $CN$ , ta có  $\frac{PN}{PC} = \frac{m}{1-n}$

Chứng minh:

Gọi  $Q$  là giao điểm của  $AP$  và  $BC$ , áp dụng định lý Ceva, ta có  $\frac{QB}{QC} = \frac{-m}{n}$

Áp dụng định lý Van Aubel, ta có:  $\frac{CP}{PN} = \frac{CM}{MA} + \frac{CQ}{QB} = \frac{-1}{m} + \frac{n}{m} \Rightarrow$  đpcm

Áp dụng bổ đề nhiều lần, ta tính được

$$S_{BIPFC} = \frac{7}{15}S_{ABC}, S_{AQF} = \frac{1}{6}S_{ABC}, S_{AHR} = \frac{2}{15}S_{ABC}, S_{HIOS} = \frac{5}{42}S_{ABC}, S_{OUT} = \frac{1}{70}S_{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{PQRSTU} = \frac{1}{10}S_{ABC} \text{ (đpcm)}$$

Cùng với giả thiết trên, ta có kết quả sau: Các bộ 3 điểm  $(A, S, P), (B, U, R), (C, Q, T)$  thẳng hàng và các đường thẳng đi qua chúng đồng quy tại trọng tâm tam giác  $ABC$ .

Chứng minh:

$$\text{Ta tính được } \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \frac{1}{2}, \frac{\overline{PF}}{\overline{PB}} = -\frac{2}{3}, \frac{\overline{SB}}{\overline{SG}} = -3 \Rightarrow \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{SB}}{\overline{SG}} = 1 \Rightarrow A, P, S$$

$$\text{thẳng hàng. Gọi } X \text{ là trung điểm } BC, \text{ ta có } \frac{\overline{XC}}{\overline{XB}} = -1, \frac{\overline{SB}}{\overline{SG}} = -3, \frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{XC}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{SB}}{\overline{SG}} \cdot \frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} = 1 \Rightarrow A, S, X \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \text{đường thẳng } ASP \text{ là trung tuyến của } \triangle ABC. \text{ Tương tự, ta suy ra đpcm.}$$

**Định lý 1.1.70** (Định lý Hansen) Cho tam giác  $ABC$  có  $r$  là bán kính nội tiếp;  $r_a, r_b, r_c$  là các bán kính bàng tiếp. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

1.  $\triangle ABC$  vuông.
2.  $r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$
3.  $r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = a^2 + b^2 + c^2$

**Chứng minh.**

Ta có các bổ đề sau:

$$a. r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$d. \sum \sin A = 4 \prod \cos \frac{A}{2}$$

$$b. r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$e. \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$$

$$c. \sum \sin^2 A = 2 + 2 \prod \cos A$$

Các bổ đề trên tương đối đơn giản nên không nêu ra chứng minh ở đây.

Ta có:

$$r + r_a + r_b + r_c = a + b + c \Leftrightarrow 4R \left( \prod \sin \frac{A}{2} + \sum \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right) = 2R \sum \sin A$$

$$\Leftrightarrow \prod \sin \frac{A}{2} + \sum \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \prod \cos \frac{A}{2}$$

Chia cả 2 vế cho  $\prod \cos \frac{A}{2}$ , đặt  $x = \tan \frac{A}{2}, y = \tan \frac{B}{2}, z = \tan \frac{C}{2}$ , ta có

$$(2) \Leftrightarrow xyz + x + y + z = 2 = 1 + xy + yz + zx \Leftrightarrow (1-x)(1-y)(1-z) = 0 \Leftrightarrow (1)$$

$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow (4R)^2 \left( \prod \sin^2 \frac{A}{2} + \sum \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \right) =$$

$$(2R)^2 \left( \sum \sin^2 A \right)$$

$$\Leftrightarrow 4 \left( \prod \sin^2 \frac{A}{2} + \sum \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \right) = 2 \left( 1 + \prod \cos A \right)$$

$$\Leftrightarrow 4 \left( \prod \cos^2 \frac{A}{2} \right) \left( \prod \tan^2 \frac{A}{2} + \sum \tan^2 \frac{A}{2} \right) = 2 (1 + \prod \cos A)$$

Chú ý rằng  $\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $\cos A = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ , ta có:

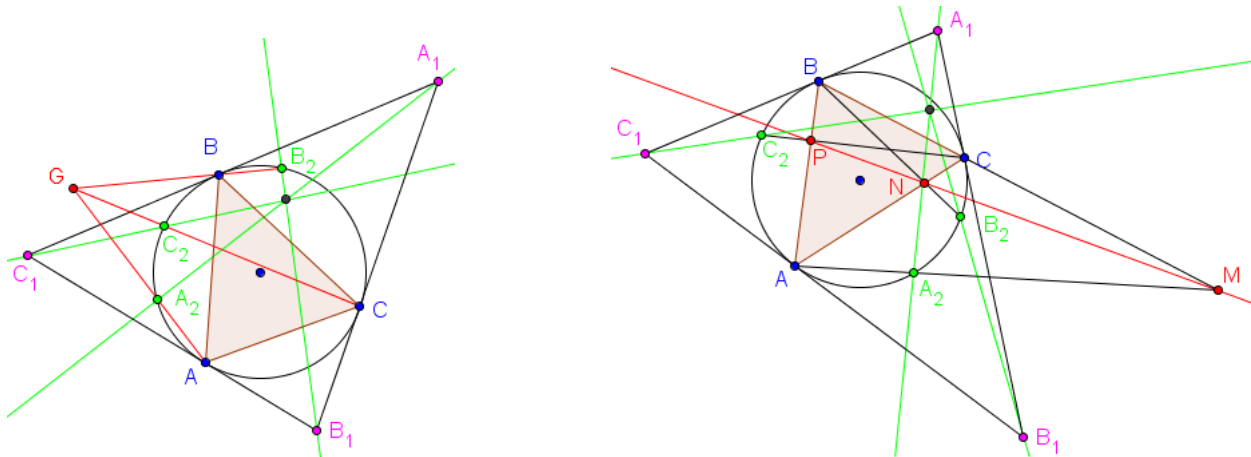
$$(3) \Leftrightarrow \frac{2((xyz)^2 + \sum x^2)}{\prod(1+x^2)} = 1 + \prod \frac{1-x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow 2((xyz)^2 + \sum x^2) = \prod(1+x^2) + \prod(1-x^2)$$

$$\Leftrightarrow (xyz)^2 + \sum x^2 = 1 + \sum (xy)^2 \Leftrightarrow (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) = 0. \text{ Vì } x, y, z > 0$$

nên (3)  $\Leftrightarrow$  (1) (đpcm)

**Định lý 1.1.71** (Định lý Steinbart suy rộng) Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp  $(O)$ . Các tiếp tuyến của đường tròn tại  $A, B, C$  giao nhau tại  $A_1, B_1, C_1$ . Trên  $(O)$  lấy các điểm  $A_2, B_2, C_2$ . Chứng minh rằng  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  đồng quy khi và chỉ khi  $AA_2, BB_2, CC_2$  đồng quy hoặc các giao điểm của  $AA_2, BB_2, CC_2$  với 3 cạnh tam giác thẳng hàng.

**Chứng minh.**



$$\text{Ta có } \frac{S_{[A_1BA_2]}}{S_{[A_1CA_2]}} = \frac{BA_2 \cdot BA_1 \cdot \sin(\overrightarrow{BA_2}; \overrightarrow{BA_1})}{CA_2 \cdot CA_1 \cdot \sin(\overrightarrow{CA_2}; \overrightarrow{CA_1})} = \frac{A_1B \cdot A_1A_2 \cdot \sin(\overrightarrow{A_1B}; \overrightarrow{A_1A_2})}{A_1C \cdot A_1A_2 \cdot \sin(\overrightarrow{A_1C}; \overrightarrow{A_1A_2})}$$

$$\Rightarrow \frac{BA_2 \cdot \sin(\overrightarrow{BA_2}; \overrightarrow{BA_1})}{CA_2 \cdot \sin(\overrightarrow{CA_2}; \overrightarrow{CA_1})} = \frac{\sin(\overrightarrow{A_1B}; \overrightarrow{A_1A_2})}{\sin(\overrightarrow{A_1C}; \overrightarrow{A_1A_2})}$$

$$\text{Áp dụng định lý sin, ta có } -\frac{BA_2}{CA_2} = \frac{\sin(\overrightarrow{AA_2}; \overrightarrow{AB})}{\sin(\overrightarrow{AA_2}; \overrightarrow{AC})} = \frac{\sin(\overrightarrow{BA_2}; \overrightarrow{BA_1})}{\sin(\overrightarrow{CA_2}; \overrightarrow{CA_1})}.$$

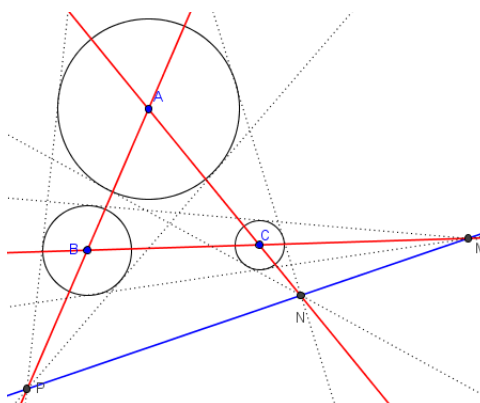
$$\text{Do đó } \frac{\sin(\overrightarrow{A_1B}; \overrightarrow{A_1A_2})}{\sin(\overrightarrow{A_1C}; \overrightarrow{A_1A_2})} = - \left( \frac{\sin(\overrightarrow{AA_2}; \overrightarrow{AB})}{\sin(\overrightarrow{AA_2}; \overrightarrow{AC})} \right)^2. \text{ Ta xây dựng được 2 đẳng thức}$$

tương tự, suy ra 
$$\left( \frac{\sin(\overrightarrow{AA_2}; \overrightarrow{AB})}{\sin(\overrightarrow{AA_2}; \overrightarrow{AC})} \frac{\sin(\overrightarrow{BB_2}; \overrightarrow{BC})}{\sin(\overrightarrow{BB_2}; \overrightarrow{BA})} \frac{\sin(\overrightarrow{CC_2}; \overrightarrow{CA})}{\sin(\overrightarrow{CC_2}; \overrightarrow{CB})} \right)^2 = - \frac{\sin(\overrightarrow{A_1B}; \overrightarrow{A_1A_2})}{\sin(\overrightarrow{A_1C}; \overrightarrow{A_1A_2})} \frac{\sin(\overrightarrow{C_1A}; \overrightarrow{C_1A_2})}{\sin(\overrightarrow{C_1B}; \overrightarrow{C_1A_2})}$$

Đặt biểu thức trong ngoặc ở vế trái là  $E$ , biểu thức ở vế phải (không tính dấu - là  $F$ ). Khi  $AA_2, BB_2, CC_2$  đồng quy hoặc các giao điểm của  $AA_2, BB_2, CC_2$  với 3 cạnh tam giác thẳng hàng thì ta có  $E = \pm 1 \Leftrightarrow F = -1 \Leftrightarrow A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  đồng quy (đpcm)

**Định lý 1.1.72** Định lý Monge & d'Alembert 1 Cho 3 đường tròn  $(A, R_1), (B, R_2), (C, R_3)$  có bán kính khác nhau và ngoài nhau. Tiếp tuyến chung ngoài của mỗi đường tròn giao nhau lần lượt tại  $M, N, P$ . Chứng minh rằng  $M, N, P$  thẳng hàng

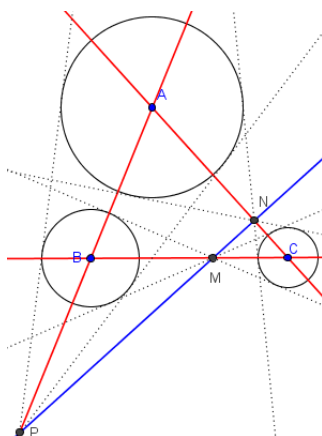
**Chứng minh.**



Vì  $M, N, P$  là tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn  $(B)$  và  $(C)$ ,  $(C)$  và  $(A)$ ,  $(A)$  và  $(B)$  nên ta có  $\frac{PA}{PB} = \frac{R_1}{R_2}, \frac{MB}{MC} = \frac{R_2}{R_3}, \frac{NC}{NA} = \frac{R_3}{R_1}$ . Nhân theo vế 3 đẳng thức trên và áp dụng định lý Menelaus, ta có đpcm.

**Định lý 1.1.73** (Định lý Monge & d'Alembert 2) Cho 3 đường tròn  $(A, R_1), (B, R_2), (C, R_3)$  có bán kính khác nhau và ngoài nhau. Tiếp tuyến chung trong của  $(A)$  và  $(C)$ ,  $(B)$  và  $(C)$  giao nhau lần lượt tại  $N, M$ ; tiếp tuyến chung ngoài của  $(A)$  và  $(B)$  giao nhau tại  $(P)$ . Chứng minh rằng  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Chứng minh.**



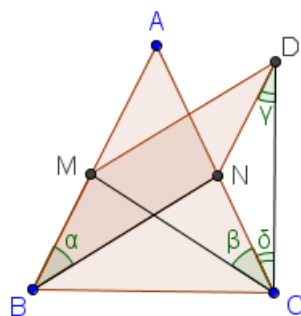
Cách chứng minh hoàn toàn tương tự với cách chứng minh định lý 1. Ngoài ra, ta còn suy ra rằng nếu cả 3 cặp là tiếp tuyến chung trong hoặc 1 cặp tiếp tuyến chung trong và 2 cặp tiếp tuyến chung ngoài thì  $AM, BN, CP$  đồng quy.

**Định lý 1.1.74** (Định lý Steiner về bán kính các đường tròn) Trong tam giác bất kì ta có hệ thức sau  $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ .

**Chứng minh.**  $r_a + r_b + r_c = 4R + r \Leftrightarrow \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{abc}{S} + \frac{S}{p} \Leftrightarrow S^2 \left( \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p} \right) = abc$   
 $\Leftrightarrow p \left( \sum (p-a)(p-b) \right) - (p-a)(p-b)(p-c) = abc$  Khai triển về trái và rút gọn ta có đpcm.

**Định lý 1.1.75** (Định lý Steiner-Lehmus) Một tam giác có 2 đường phân giác trong bằng nhau là tam giác cân.

**Chứng minh.**

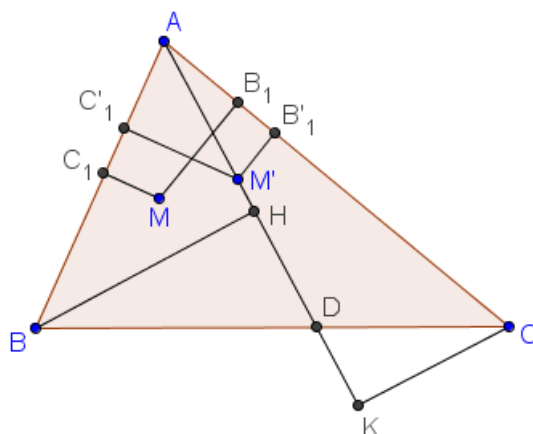


Giả sử  $\Delta ABC$  có 2 đường phân giác trong  $BN, CM$  bằng nhau. Dựng hình bình hành  $BMDN$  và kí hiệu các góc  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  như hình vẽ.  $\Delta CMD$  cân tại  $M$  nên  $\alpha + \gamma = \delta$  (1) Nếu  $\alpha > \beta$ , ta xét hai tam giác  $BCN$  và  $CBM$  có  $BC$  chung,  $BN = CM, \widehat{CBN} > \widehat{BCM} \Rightarrow CN > BM = ND \Rightarrow \gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \delta$ , mâu thuẫn với (1).

Tương tự, trường hợp  $\alpha < \beta$  cũng không thể xảy ra. Do đó  $\alpha = \beta$ , suy ra đpcm.

**Định lý 1.1.76** (Bất đẳng thức Erdős – Mordell) Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  nằm trong tam giác ( $M$  không nằm trên biên của tam giác). Gọi  $d_a, d_b, d_c$  là khoảng cách từ  $M$  đến các cạnh tam giác;  $R_a, R_b, R_c$  là khoảng cách từ  $M$  đến các đỉnh tam giác. Khi đó ta có bất đẳng thức sau  $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$

**Chứng minh.**



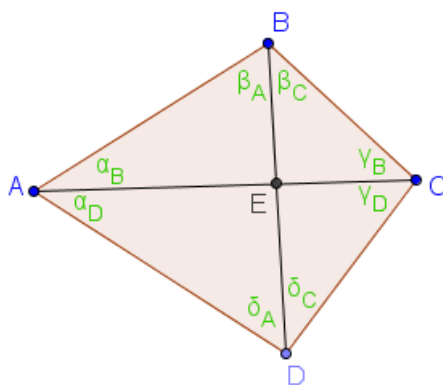
Gọi  $A_1, B_1, C_1$  theo thứ tự là hình chiếu của  $M$  trên các cạnh  $BC, CA, AB$ . Lấy  $M'$  đối xứng với  $M$  qua phân giác trong của góc  $A$ , gọi  $B'_1, C'_1$  là hình chiếu của  $M'$  trên  $AC, AB$ . Gọi  $D$  là giao điểm  $AM'$  và  $BC$ ;  $H, K$  là hình chiếu của  $B, C$  trên  $AM'$ .

Ta có  $a = BD + DC \geq BH + CK \Rightarrow a.M'A \geq BH.M'A + CK.M'A = 2S_{M'AB} + 2S_{M'CA} = c.M'C'_1 + b.M'B'_1$ . Vì  $M'$  và  $M$  đối xứng với nhau qua phân giác trong góc  $A$  nên  $R_a = M'A, M'C'_1 = MB_1 = d_b, M'B'_1 = MC_1 = d_c$ . Do đó  $a.R_a \geq c.d_b + b.d_c \Rightarrow R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ . Tương tự, ta có 2 bất đẳng thức tương tự:  $R_b \geq \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a, R_c \geq \frac{b}{c}d_a + \frac{a}{c}d_b$ . Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có  $R_a + R_b + R_c \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)d_c + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)d_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)d_b \geq 2(d_a + d_b + d_c)$  (đpcm)

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều và  $M$  là tâm của tam giác.

**Định lý 1.1.77** (Định lý Bellavitis) Cho  $ABCD$  là một "balanced quadrilateral" (tứ giác có tích các cặp cạnh đối bằng nhau); kí hiệu các góc như hình vẽ, khi đó ta có  $\alpha_B + \beta_C + \gamma_D + \delta_A = \alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C = 180^\circ$

**Chứng minh.**



Gọi các góc của tứ giác là  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , góc giữa hai đường chéo là  $\epsilon$ . Áp dụng định lý sin và định nghĩa "balanced quadrilateral", ta có:

$$\sin \gamma_D \cdot \sin \alpha_D = \sin \alpha_B \cdot \sin \gamma_D$$

$$\Rightarrow \cos (\gamma_B + \alpha_D) - \cos (\gamma_B - \alpha_D) = \cos (\alpha_B + \gamma_D) - \cos (\alpha_B - \gamma_D)$$

$$\Rightarrow \cos (\gamma_B + \alpha_D) - \cos (\gamma_B - \alpha + \alpha_B) = \cos (\alpha_B + \gamma_D) - \cos (\alpha_B - \gamma + \gamma_B)$$

$$\Rightarrow \cos (\gamma_B + \alpha_D) + \cos (\alpha + \delta) = \cos (\alpha_B + \gamma_D) + \cos (\gamma + \delta)$$

Hoán vị đẳng thức trên, ta có

$$\cos (\delta_C + \beta_A) + \cos (\alpha + \beta) = \cos (\beta_C + \delta_A) + \cos (\alpha + \delta)$$

Cộng các đẳng thức trên, chú ý rằng  $\cos (\alpha + \beta) = \cos (\gamma + \delta)$ , ta có

$$\cos (\gamma_B + \alpha_D) + \cos (\delta_C + \beta_A) = \cos (\alpha_B + \gamma_D) + \cos (\beta_C + \delta_A)$$

$$\Rightarrow \cos \frac{1}{2} (\alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C) \cdot \cos \frac{1}{2} (\alpha_D - \beta_A + \gamma_B - \delta_C)$$

$$= \cos \frac{1}{2} (\alpha_B + \beta_C + \gamma_D + \delta_A) \cdot \cos \frac{1}{2} (\alpha_B - \beta_C + \gamma_D - \delta_A)$$

Chú ý rằng  $\alpha_D - \beta_A + \gamma_B - \delta_C = 360^\circ - 2\epsilon - \beta - \delta, \alpha_B - \beta_C + \gamma_D - \delta_A = 2\epsilon -$

$\beta - \delta$  và  $\frac{1}{2} (\alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C) + \frac{1}{2} (\alpha_B + \beta_C + \gamma_D + \delta_A) = 180^\circ$ . Ta suy ra

$$\cos \frac{1}{2} (\alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C) \cdot \cos \left( \epsilon + \frac{1}{2} (\beta + \delta) \right) = - \cos \frac{1}{2} (\alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C) \cdot \cos \left( \epsilon - \frac{1}{2} (\beta + \delta) \right)$$

$$\Rightarrow \cos \frac{1}{2} (\alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C) \cdot \cos \epsilon \cdot \cos \frac{1}{2} (\beta + \delta) = 0$$

1. Nhân tử đầu tiên bằng 0, ta có ngay đpcm.

2. Nhân tử thứ 2 bằng 0, ta suy ra  $ABCD$  là tứ giác có hai đường chéo vuông góc, suy ra  $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ . Kết hợp với  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$  (định nghĩa), suy ra mỗi cạnh tứ giác bằng với một trong 2 cạnh kề với nó. Để thấy định lý Bellavitis đúng trong trường hợp này.

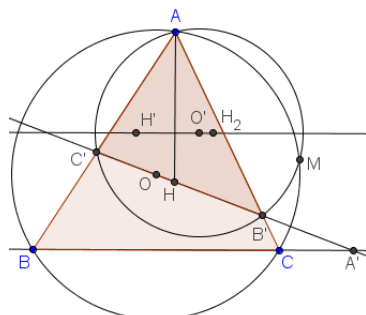
3. Nhân tử thứ 3 bằng 0, khi đó  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp, theo tính chất góc nội tiếp, ta có đpcm.

**Định lý 1.1.78** (Định lý Gossard) Cho tam giác  $ABC$ , đường thẳng Euler  $l$  của tam giác cắt các cạnh tại  $A', B', C'$ . Gọi  $l_a, l_b, l_c$  là đường thẳng Euler của các tam giác  $AB'C', BC'A', CA'B'$ . Khi đó tam giác được tạo bởi các đường thẳng  $l_a, l_b, l_c$

là ảnh của tam giác  $ABC$  qua một phép đối xứng tâm có tâm đối xứng nằm trên đường thẳng Euler của tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.** Ta có 2 bổ đề sau:

1. Đường thẳng Euler của tam giác  $AB'C'$  song song với  $BC$ .



Đặt  $(BC, OH) \equiv \alpha \pmod{\pi}$ ,  $k = \frac{R_{(AB'C')}}{R_{(ABC)}}$ ,  $f^\alpha = Q_\alpha \circ V_k$ ,  $h^\alpha = Q_\alpha \circ V_{\frac{1}{k}}$ ,  $M$  là giao điểm khác  $A$  của  $(ABC)$  và  $(AB'C')$ . Ta có  $f_M^\alpha : (MBC) \rightarrow (MB'C') \Rightarrow (MO, MO') \equiv \alpha \pmod{\pi}$ . Do  $A$  đối xứng với  $M$  qua  $OO'$  nên  $(AO, AO') \equiv \alpha \pmod{\pi}$ . Suy ra  $f_A^{-\alpha} : O \rightarrow O'$  (1)

Gọi  $\delta$  là phân giác trong của  $\widehat{BAC}$ , ta có  $D_\delta \circ V_{2\cos A} : H \rightarrow O, H' \rightarrow O'$ . Suy ra  $\Delta AOO'$  đồng dạng ngược hướng với  $\Delta AHH'$ .

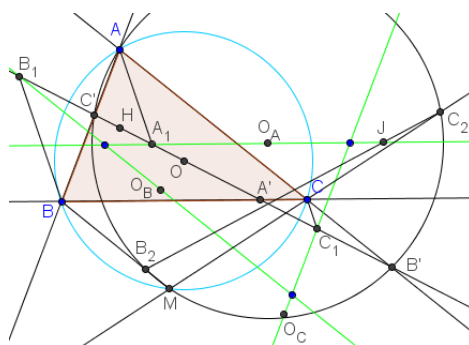
Gọi  $H_2$  là điểm đối xứng với  $H'$  qua  $AH$ , ta có  $\Delta AOO'$  đồng dạng cùng hướng với  $\Delta AHH_2$ . Do đó  $f_A^{-\alpha} : H \rightarrow H_2$  (2)

Từ (1) và (2), ta có  $f_A^{-\alpha} : OH \rightarrow O'H_2 \Rightarrow (OH, O'H_2) \equiv -\alpha \pmod{\pi}$ . Mà  $(BC, OH) \equiv \alpha \pmod{\pi}$  nên ta có  $(O'H_2, BC) \equiv 0 \pmod{\pi} \Rightarrow O'H_2 // BC \Rightarrow O'H_2 \perp AH \Rightarrow O', H', H_2$  thẳng hàng  $\Rightarrow O'H' // BC$

2. Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp  $(O)$ , đường thẳng  $d$  bất kì qua  $O$  cắt  $BC, CA, AB$  tại  $A', B', C'$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1$  là các điểm đối xứng với  $A', B', C'$  qua  $O$ , khi đó  $AA_1, BB_1, CC_1$  đồng quy tại một điểm trên  $(O)$ .

Chứng minh đơn giản bằng cách sử dụng góc định hướng.

Trở lại bài toán:



Gọi  $A_1, B_1, C_1$  là giao điểm của  $l_a, l_b, l_c$  với  $l$ . Ta sẽ chứng minh  $AA_1, BB_1, CC_1$  đôi một song song.

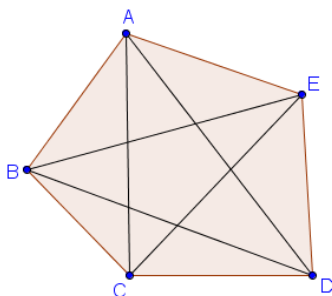
Gọi  $B_2, C_2$  là giao điểm của  $MB, MC$  với  $(AB'C')$ . Đặt  $J = B_2C_2 \cap l_a$ .

Ta chứng minh được  $f_A^{-\alpha} : B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1 \Rightarrow f_A^{-\alpha} : BC \rightarrow B_1C_1$ . Mặt khác  $f_A^{-\alpha} : l \rightarrow l_a; A' = l \cap BC; J = l_a \cap B_2C_2 \Rightarrow f_A^{-\alpha} : A' \rightarrow J$ . Ta chứng minh được  $B'C_2C'B_2$  là hình thang cân và  $O_A$  là trung điểm  $A_1J$ . Gọi  $A_3 = h_A^\alpha(A_1) \Rightarrow A_3 \in l$ . Ta có  $h_A^\alpha : A_1 \rightarrow A_3, J \rightarrow A', O_A \rightarrow O$ , suy ra  $O$  trung điểm  $A'A_3$ . Tương tự ta xác định các điểm  $B_3, C_3$ . Theo bổ đề 2, ta có  $AA_3, BB_3, CC_3$  đồng quy tại  $P$  nằm trên  $(O)$ . Từ đó suy ra  $(A_1A, AB) \equiv (B_1B, BA) \equiv (CC_1, AB) \pmod{\pi}$ . Suy ra  $AA_1, BB_1, CC_1$  đôi một song song với nhau.

Do  $AA_1 // BB_1$  nên  $(AA_1, l) \equiv (BB_1, l) \pmod{\pi} \Rightarrow$  tam giác  $A'B_1B$  đồng dạng cùng hướng với tam giác  $AA_1A_3$ . Suy ra  $\frac{A'B}{A'B_1} = \frac{R}{R'}$ , tương tự, ta có  $\frac{A'C}{A'C_1} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{R}{R'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow B'C' = B_1C_1$ . Chứng minh tương tự, ta có  $A'B' = A_1B_1, B'C' = B_1C_1, C'A' = C_1A_1 \Rightarrow$  các đoạn  $A'A_1, B'B_1, C'C_1$  có cùng trung điểm  $X$ . Suy ra 2 tam giác  $ABC$  và tam giác  $\Delta(l_a, l_b, l_c)$  đối xứng với nhau qua  $X$  (đpcm)

**Định lý 1.1.79** (Định lý Möbius) Cho ngũ giác  $ABCDE$  có diện tích  $S$ . Đặt  $S_{ABC} = a, S_{BCD} = b, S_{CDE} = c, S_{DEA} = d, S_{EAB} = e$ . Ta có đẳng thức:  $S^2 - S(a + b + c + d + e) + (ab + bc + cd + de + ea) = 0$

**Chứng minh.**



**Bổ đề:** Với 4 vector bất kì  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}$ , ta có  $(\vec{x} \wedge \vec{y})(\vec{z} \wedge \vec{t}) + (\vec{x} \wedge \vec{z})(\vec{t} \wedge \vec{y}) + (\vec{x} \wedge \vec{t})(\vec{y} \wedge \vec{z}) = 0$

**Chứng minh:**

Trước hết, với 3 vector bất kì, ta có  $\vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z}) + \vec{y} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{x}) + \vec{z} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{y}) = \vec{0}$ . Mặt khác  $(\vec{x} \wedge \vec{y})(\vec{z} \wedge \vec{t}) = \vec{x} \wedge (\vec{y} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{t}))$ . Suy ra:

$$(\vec{x} \wedge \vec{y})(\vec{z} \wedge \vec{t}) + (\vec{x} \wedge \vec{z})(\vec{t} \wedge \vec{y}) + (\vec{x} \wedge \vec{t})(\vec{y} \wedge \vec{z}) = \vec{x} \wedge (\vec{y} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{t})) + \vec{x} \wedge (\vec{z} \cdot (\vec{t} \wedge \vec{y})) + \vec{x} \wedge (\vec{t} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z})) = \vec{x} \wedge (\vec{y} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{t}) + \vec{z} \cdot (\vec{t} \wedge \vec{y}) + \vec{t} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z})) = \vec{x} \wedge \vec{0} = \vec{0}$$

Trở lại bài toán, đặt  $\vec{x} = \overrightarrow{AB}, \vec{y} = \overrightarrow{AC}, \vec{z} = \overrightarrow{AD}, \vec{t} = \overrightarrow{AE}$ . Khi đó

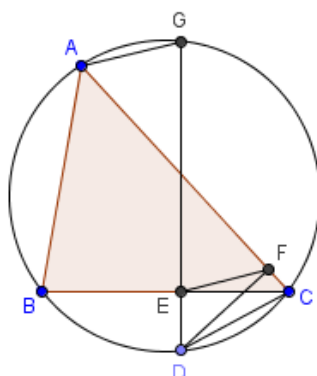
$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \vec{y} \wedge \vec{z} \Rightarrow S = a + \frac{1}{2} \vec{y} \wedge \vec{z} + d \Rightarrow \vec{y} \wedge \vec{z} = 2(S - a - d). \text{ Do đó } (\vec{x} \wedge \vec{t})(\vec{y} \wedge \vec{z}) = 4(S - a - d)e. \text{ Tương tự: } (\vec{x} \wedge \vec{y})(\vec{z} \wedge \vec{t}) = 4ad, (\vec{x} \wedge \vec{z})(\vec{t} \wedge \vec{y}) = -4(S - b - d)(S - a - c).$$

Áp dụng bổ đề, ta suy ra  $(S - a - d)e - (S - a - c)(S - d - b) + ad = 0 \Rightarrow S^2 - S(a + b + c + d + e) + (ab + bc + cd + de + ea) = 0$  (đpcm)

**Định lý 1.1.80** (Đường tròn Hagge) Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp  $(O)$ ,  $P$  là một điểm bất kì trong tam giác. Các tia  $AP, BP, CP$  cắt  $(O)$  tại  $A_1, B_1, C_1$ . Gọi  $A_2, B_2, C_2$  lần lượt là điểm đối xứng với  $A_1, B_1, C_1$  qua  $BC, CA, AB$ . Khi đó trực tâm  $H$  của  $\Delta ABC$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp  $\Delta A_2B_2C_2$

**Chứng minh.** Ta có 3 bổ đề sau:

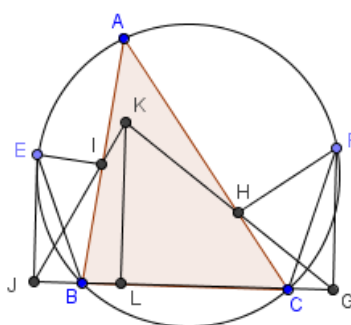
1. Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp  $(O)$ ,  $D$  là một điểm trên  $(O)$ . Đường thẳng qua  $D$  vuông góc với  $BC$  cắt  $(O)$  tại  $G$ . Khi đó  $AG$  song song với đường thẳng Simson của  $D$ .



Gọi  $E, F$  là chân các đường vuông góc kẻ từ  $D$  lên  $BC, AC$ , ta có  $EF$  là đường thẳng Simson của  $D$ .

Ta có  $(AG, AC) \equiv (DG, DC) \equiv (FE, FA) \pmod{\pi} \Rightarrow AG // EF$  (đpcm)

2. Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp  $(O)$ ,  $E, F$  là hai điểm trên  $(O)$ . Khi đó góc giữa hai đường thẳng Simson của  $E$  và  $F$  bằng một nửa số đo cung  $EF$ .



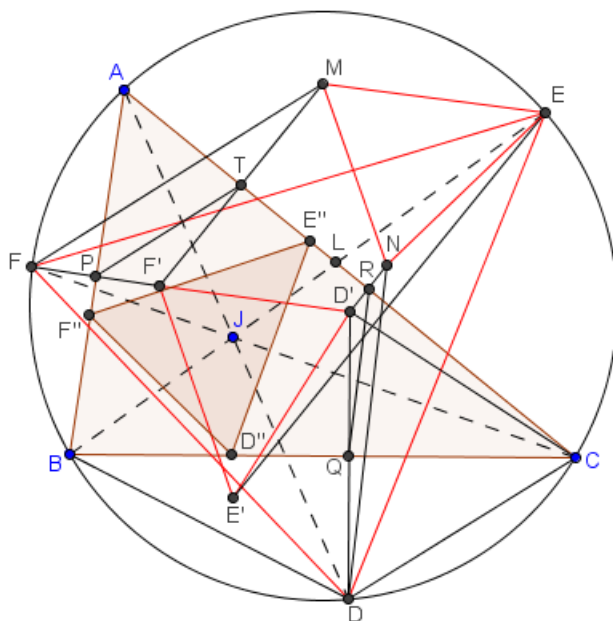
Gọi  $I, J$  là hình chiếu vuông góc của  $E$  trên  $AB, BC$ ,  $G, H$  là hình chiếu vuông góc của  $F$  trên  $BC, AC$ ,  $K = IJ \cap GH$ ,  $L$  là hình chiếu vuông góc của  $L$  trên  $BC$ .

Ta có  $(KJ, KL) \equiv (JE, JI) \equiv (BE, BA) \pmod{\pi}; (KL, KG) \equiv (GK, GF) \equiv (CA, CF) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow$  đpcm.

3. Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp  $(O)$ ,  $J$  là một điểm bất kì trong tam giác.  $AJ, BJ, CJ$  cắt

(O) tại  $D, E, F$ . Gọi  $D', E', F'$  là điểm đối xứng với  $D, E, F$  qua  $BC, CA, AB$ . Khi đó  $\Delta D'E'F' \sim \Delta DEF$ .



Gọi  $M, N$  là điểm đối xứng với  $F', D'$  qua  $AC$ ;  $R = D'N \cap AC, Q = D'D \cap BC, S = BC \cap ED, L = BE \cap AC, P = FF' \cap AB, T = MF' \cap AC$ .

Ta có  $RQ \parallel ND \Rightarrow \widehat{NDE} = \widehat{RUE} = \widehat{QDS} - \widehat{D'QR} = 90^\circ - \widehat{BSD} - \widehat{D'CR} = 90^\circ - \widehat{BSD} - (\widehat{ACB} - \widehat{BCD}) = 90^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{EDC} = 90^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{ECB} = 90^\circ - (AC, BE)$  (( $AC, BE$ ) là kí hiệu góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $BE$ ).

Tương tự, ta có  $\widehat{MFE} = 90^\circ - (AC, BE) \Rightarrow \widehat{NDE} = \widehat{MFE}$  (1)

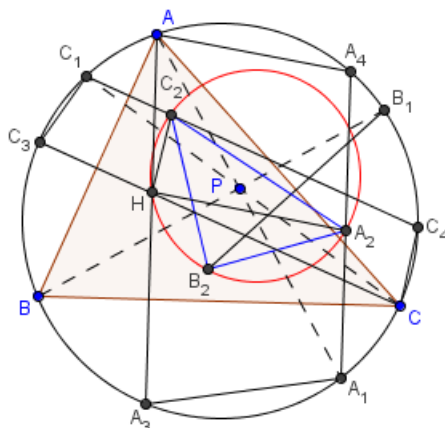
Mặt khác,  $\frac{ND}{MF} = \frac{2RQ}{2TP} = \frac{D'C \cdot \sin C}{F'A \sin A} = \frac{DC \cdot \sin C}{FA \sin A} = \frac{JC \cdot \sin C}{JA \sin A}$  (2)

Gọi  $D''E''F''$  là tam giác hình chiếu của  $J$  trong  $\Delta ABC$ , khi đó  $\Delta DEF \sim \Delta D''E''F'' \Rightarrow \frac{DE}{FE} = \frac{D''E''}{F''E''} = \frac{JC \cdot \sin C}{JA \sin A}$  (3)

Từ (1), (2) và (3), ta suy ra  $\Delta DNE \sim \Delta FME \Rightarrow \frac{DE}{NE} = \frac{FE}{ME} \Rightarrow \frac{DE}{D'E'} = \frac{FE}{F'E'}$ .

Tương tự, suy ra  $\frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FD}{F'D'} \Rightarrow \text{đpcm.}$

Trở lại với bài toán:



Gọi  $A_3, C_3$  là điểm đối xứng với  $H$  qua  $BC, AB$ , khi đó  $A_3, C_3 \in (O); A_4 = A_1A_2 \cap (O), C_4 = C_1C_2 \cap (O)$ .

Ta có  $AA_3 // A_1A_4$  và  $A, A_1, A_3, A_4$  đồng viên  $\Rightarrow AA_4A_1A_3$  là hình thang cân. Mặt khác,  $HA_2A_1A_3$  là hình thang cân  $\Rightarrow HA_2 \Rightarrow AA_4$ . Tương tự, ta có  $HC_2 // CC_4 \Rightarrow \widehat{C_2HA_2} = \widehat{(AA_4, CC_4)}$ . Áp dụng bổ đề 1, ta có  $\widehat{(AA_4, CC_4)} = (d_a, d_c)$ , trong đó  $d_a, d_c$  là đường thẳng Simson của  $A_1, C_1$ .

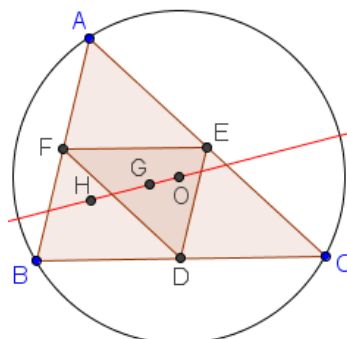
Áp dụng bổ đề 2,  $(d_a, d_c) = \widehat{C_1B_1A_1} \Rightarrow \widehat{C_2HA_2} = \widehat{C_1B_1A_1}$ .

Áp dụng bổ đề 3,  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2 \Rightarrow \widehat{C_1B_1A_1} = \widehat{C_2B_2A_2} \Rightarrow \widehat{C_2HA_2} = \widehat{C_2B_2A_2} \Rightarrow H, A_2, B_2, C_2$  đồng viên (đpcm)

## 1.2 Một số điểm và đường đặc biệt được xác định duy nhất với tam giác và tứ giác

**Định lý 1.2.1** (Đường thẳng Euler của tam giác) Cho tam giác  $ABC$ , tâm ngoại tiếp  $O$ , trọng tâm  $G$ , trực tâm  $H$ . Khi đó  $O, G, H$  thẳng hàng và  $\overline{OH} = 3\overline{OG}$ .

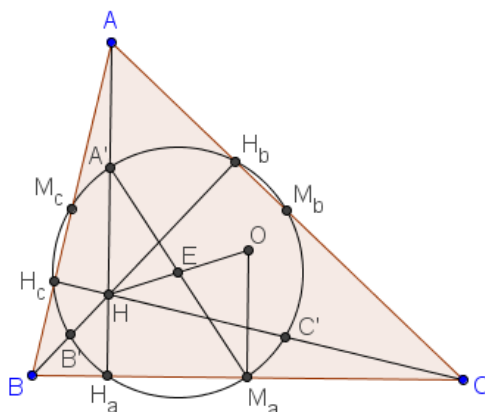
**Chứng minh.**



Gọi  $D, E, F$  là trung điểm các cạnh của tam giác  $ABC$ , dễ thấy  $O$  là trực tâm tam giác  $DEF$ . Ta có phép vị tự tâm  $G$ , tỉ số  $-2$  biến tam giác  $DEF$  thành tam giác  $ABC$ . Do đó biến  $O$  thành  $H \Rightarrow \overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ . Từ đó suy ra đpcm.

**Định lý 1.2.2** (Đường tròn và tâm Euler) Cho  $\Delta ABC$ , 3 trung điểm các cạnh, 3 chân đường cao, 3 trung điểm của 3 đoạn thẳng nối 3 đỉnh tam giác với trực tâm cùng nằm trên đường tròn Euler của  $\Delta ABC$ . Đường tròn Euler của  $\Delta ABC$  có bán kính bằng  $\frac{R}{2}$  ( $R$  là bán kính ngoại tiếp của  $\Delta ABC$ ) và tâm  $E$  của nó là trung điểm  $OH$ .

**Chứng minh.**

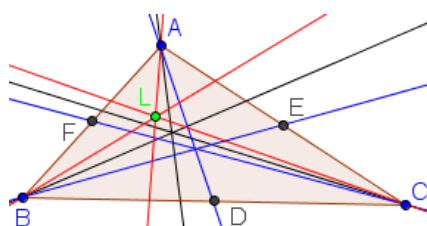


Đặt tên các điểm như hình vẽ. Dễ thấy  $O$  và  $H$  là 2 điểm đẳng giác trong  $\Delta ABC$ , suy ra các điểm  $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c$  cùng nằm trên một đường tròn tâm là trung điểm  $E$  của  $OH$ . Mặt khác, ta chứng minh được  $AH = 2OM_a$ , suy ra  $A'HM_aO$  là hình bình hành  $\Rightarrow M_a$  đối xứng với  $A'$  qua  $E$ , do đó  $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, A', B', C'$  cùng nằm trên  $(E)$ .

Ta có  $EA'$  là đường trung bình của  $\Delta AOH \Rightarrow R_{(E)} = EA' = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$  (đpcm)

**Định lý 1.2.3** (Đường đối trung, điểm Lemoine) Trong tam giác, đường thẳng đối xứng với trung tuyến qua phân giác tại cùng một đỉnh được gọi là đường đối trung của tam giác. 3 đường đối trung của tam giác đồng quy tại điểm Lemoine của tam giác. Điểm Lemoine còn được gọi là điểm symmedian (symmedian point) hoặc điểm Grebe.

**Chứng minh.**



Đây là một trường hợp riêng của hai điểm liên hợp đẳng giác và điểm Lemoine là điểm liên hợp đẳng giác của trọng tâm tam giác. Ta có một số kết quả sau liên

quan đến đường đối trung và điểm Lemoine (Gọi trung điểm các cạnh tam giác là  $D, E, F$ ; chân các đường đối trung là  $X, Y, Z$ ; điểm Lemoine là  $L$ )

1. Đường đối trung xuất phát từ một đỉnh là quỹ tích các điểm có tỉ số khoảng cách đến hai cạnh kề của tam giác tỉ lệ thuận với độ dài hai cạnh. Quỹ tích này còn một đường thẳng nữa là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tại đỉnh xuất phát của đường đối trung.

2. Đường đối trung xuất phát từ một đỉnh tam giác đi qua giao điểm của 2 tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tại 2 đỉnh còn lại.

3. Đường đối trung chia cạnh tam giác thành 2 đoạn tỉ lệ với bình phương 2 cạnh kề.

$$4. \frac{AX}{AD} = \frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

5. Tổng bình phương các khoảng cách từ một điểm bất kì nằm trên một cạnh của tam giác đến 2 cạnh kia nhỏ nhất khi điểm đó trùng với chân đường đối trung ứng với cạnh đó.

6. Tổng bình phương các khoảng cách từ một điểm bất kì trong tam giác đến 3 cạnh của nó nhỏ nhất khi điểm đó trùng với điểm Lemoine.

7. Điểm Lemoine là trọng tâm của tam giác hình chiếu ứng với nó trong tam giác ABC.

8. Diện tích tam giác hình chiếu của điểm Lemoine bằng  $\frac{12S_{ABC}^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$ .

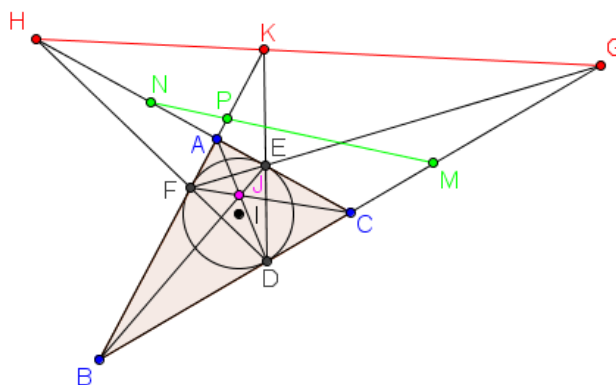
9/. Trong tất cả các tam giác nội tiếp trong một tam giác thì tam giác hình chiếu ứng với điểm Lemoine có tổng bình phương các cạnh nhỏ nhất.

$$10. a^2\vec{LA} + b^2\vec{LB} + c^2\vec{LC} = \vec{0}$$

**Định lý 1.2.4** (Điểm Gergonne, điểm Nobb, đường thẳng Gergonne) Tam giác ABC với đường tròn nội tiếp ( $I$ ). Tiếp điểm của ( $I$ ) trên  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $D, E, F$ . Khi đó  $AD, BE, CF$  đồng quy tại điểm Gergonne của tam giác ABC.

Kết quả về điểm Nobb và đường thẳng Gergonne (vẫn với các kí hiệu trên): Một tam giác không cân có 3 điểm Nobb tương ứng là giao điểm của các cặp đường thẳng  $EF$  và  $BC, DE$  và  $AB, DF$  và  $AC$ . Và 3 điểm Nobb cùng nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Gergonne của tam giác ABC.

**Chứng minh.**



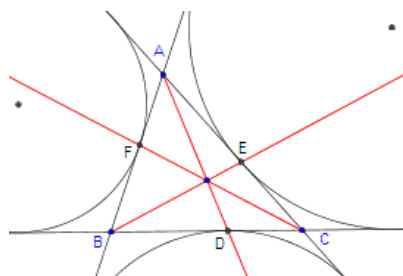
1. Áp dụng định lý Ceva và các kết quả đơn giản:  $DB = DC, EA = EC, FA = FB$  ta có ngay đpcm.
2. Xét cực và đối cực đối với  $(I)$ : đường đối cực của  $A$  là  $EF$  đi qua  $G$ , nên đường đối cực của  $G$  đi qua  $A$ . Mặt khác dễ thấy đường đối cực của  $G$  đi qua  $D$  nên suy ra đường đối cực của  $G$  là  $AD$ . Hoàn toàn tương tự ta có đường đối cực của  $H$  là  $BE$  và đường đối cực của  $K$  là  $CF$ . Mà  $AD, BE, CF$  đồng quy nên ta có điều phải chứng minh. Ngoài ra ta có kết quả sau:  $(BCDG) = (CAEH) = (BAFK) = -1$ ; gọi  $M, N, P$  là trung điểm của các đoạn  $GD, HE, KF$  thì  $M, N, P$  thẳng hàng và đường thẳng đi qua chúng là trục đẳng phương của 2 đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác.

Kết quả trên có thể mở rộng như sau:

Cho tam giác  $ABC$  và 3 điểm  $D, E, F$  theo thứ tự thuộc  $BC, CA, AB$  sao cho  $AD, BE, CF$  đồng quy và  $D, E, F$  khác trung điểm đoạn thẳng. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $(EF, BC), (DF, CA), (DE, AB)$ . Khi đó  $M, N, P$  thẳng hàng. Kết quả này chính là hệ quả của định lý Desargues.

**Định lý 1.2.5** (Điểm Nagel) Cho tam giác  $ABC$ , các đường tròn bàng tiếp tiếp xúc với các cạnh tương ứng tại  $D, E, F$ . Ta có 3 đường thẳng  $AD, BE, CF$  đồng quy tại điểm Nagel của tam giác.

**Chứng minh.**



Áp dụng định lý Ceva, chú ý rằng  $FA = CD = p - b, AE = BD = p - c, CE = BF = p - a$ , ta có đpcm.

**Định lý 1.2.6** (Điểm Brocard) Trong tam giác  $ABC$ , tồn tại 2 điểm  $M$  và  $N$  thỏa mãn  $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \alpha$  và  $\widehat{NAC} = \widehat{NCB} = \widehat{NBA} = \alpha$ . Mỗi điểm này được gọi là điểm Brocard của  $\Delta ABC$ . Trong một tam giác thì 2 điểm Brocard liên hợp đẳng giác với nhau. Ta có hệ thức  $\cot \alpha = \cot A + \cot B + \cot C$ .

**Chứng minh.** Đặt  $MA = x, MB = y, MC = z$ , ta có  $\cot \alpha = \frac{c^2 + x^2 - y^2}{4S_{MAB}} = \frac{a^2 + y^2 - z^2}{4S_{MBC}} = \frac{b^2 + z^2 - x^2}{4S_{MCA}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}$ .

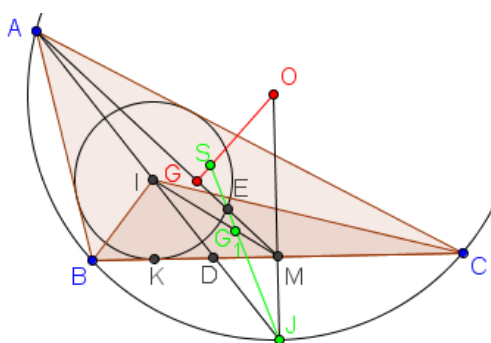
Mặt khác,  $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S_{ABC}} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S_{ABC}} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S_{ABC}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}$ , suy ra đpcm.

Một số tính chất của hai điểm Brocard:

1. Đường thẳng  $OL$  ( $O$  là tâm ngoại tiếp,  $L$  là điểm Lemoine) là trung trực của  $MN$  và 4 điểm  $O, L, M, N$  cùng nằm trên đường tròn Brocard.
2.  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}$
3.  $\sin^3 \alpha = \sin(A - \alpha) \sin(B - \alpha) \sin(C - \alpha)$
4.  $MA \cdot MB \cdot MC = 8R^3 \sin^3 \alpha$
5. Tam giác hình chiếu của 2 điểm Brocard đồng dạng với tam giác  $ABC$  và diện tích của chúng bằng nhau.

**Định lý 1.2.7** (Điểm Schiffler) Cho tam giác  $ABC$  có  $I$  là tâm nội tiếp. Khi đó 4 đường thẳng Euler của 4 tam giác  $IAB, IBC, ICA, ABC$  đồng quy tại điểm Schiffler của tam giác.

**Chứng minh.**



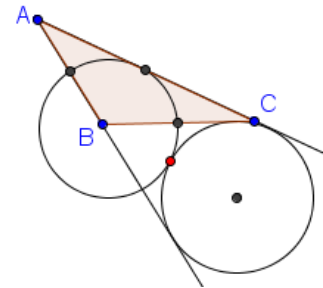
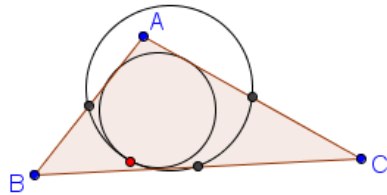
Gọi  $O$  là tâm ngoại tiếp tam giác,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $G_1$  là trọng tâm tam giác  $IBC$ ,  $AI$  cắt  $BC$  tại  $D$ , cắt  $(O)$  tại  $J$ ,  $(I)$  tiếp xúc với  $BC$  tại  $K$ ,  $JG_1$  cắt  $AM$  tại  $E$ ,  $OG$  tại  $S$ .

Để thấy  $J$  là tâm ngoại tiếp tam giác  $IBC$ . Do đó  $JG_1$  là đường thẳng Euler của tam giác  $IBC$ . Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $GOM$  với cát tuyến  $SEJ$ ,

ta có  $\frac{SG}{SO} \cdot \frac{JO}{JM} \cdot \frac{EM}{EG} = 1 \Rightarrow \frac{SG}{SO} = \frac{JM}{R} \cdot \frac{EG}{EM}$ . Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $IAM$  với cát tuyến  $JG_1E$ , ta có  $\frac{JI}{JA} \cdot \frac{EA}{EM} \cdot \frac{G_1M}{G_1I} = 1 \Rightarrow \frac{EA}{EM} = 2 \frac{JA}{JI} = 2 \frac{JI}{JD}$  (vì  $JI^2 = JB^2 = JA \cdot JD$ )  
 Do đó  $\frac{EG}{EM} = \frac{GM}{EM} - 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{AM}{EM} - 1 = \frac{1}{3} \left( \frac{EA}{EM} + 1 \right) - 1 = \frac{2}{3} \left( \frac{JI}{JD} - 1 \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{ID}{JD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{IK}{JM} = \frac{2r}{3JM} \Rightarrow \frac{SG}{SO} = \frac{JM}{R} \cdot \frac{EG}{EM} = \frac{2r}{3R}$ . Tương tự ta thấy các đường thẳng Euler của các tam giác  $IAC, IAB$  cũng đi qua điểm  $S$  được xác định như trên, suy ra đpcm.

**Định lý 1.2.8** (Điểm Feuerbach) Trong một tam giác, đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp của nó, và tiếp điểm đó được gọi là điểm Feuerbach của tam giác trên, ngoài ra đường tròn Euler còn tiếp xúc ngoài với 3 đường tròn bàng tiếp của tam giác.

**Chứng minh.**



Ta có nhận xét sau:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{mOA} + \overrightarrow{nOB} + \overrightarrow{pOC})^2 &= R^2 (m^2 + n^2 + p^2) + mn \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + np \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + pm \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= R^2 (m^2 + n^2 + p^2) + mn (2R^2 - c^2) + np (2R^2 - a^2) + pm (2R^2 - b^2) \\ &= R^2 (m + n + p)^2 - (mn \cdot c^2 + np \cdot a^2 + pm \cdot b^2) \end{aligned}$$

Từ các hệ thức vector quen thuộc:  $\begin{cases} \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}; \\ a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{cases}$ , ta có:  $\begin{cases} 2p\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} \\ 2p\overrightarrow{OE} = p\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC} \end{cases}$

Do đó  $\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{IE} = \frac{p-a}{2p} \overrightarrow{OA} + \frac{p-b}{2p} \overrightarrow{OB} + \frac{p-c}{2p} \overrightarrow{OC}$ , áp dụng nhận xét, ta

có:

$$EI^2 = \frac{R^2}{4} - \frac{(p-b)(p-c)a^2 + (p-c)(p-a)b^2 + (p-a)(p-b)c^2}{4p^2}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} &4 \left( (p-b)(p-c)a^2 + (p-c)(p-a)b^2 + (p-a)(p-b)c^2 \right) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4pabc \\ &= 4pabc - 16S^2 = 16pSR - 16p^2r^2 = 16p^2r(R-r) \end{aligned}$$

(khai triển công thức Héron  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ )

$$\text{Vậy } EI^2 = \frac{R^2}{4} - Rr + r^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 \Rightarrow EI = \frac{R}{2} - r, \text{ suy ra đpcm.}$$

Để chứng minh đường tròn Euler tiếp xúc ngoài với đường tròn bàng tiếp, ta sử dụng hệ thức vector  $-a\vec{I_aA} + b\vec{I_aB} + c\vec{I_aC} = \vec{0}$ ,  $(I_a, r_a)$  là đường tròn bàng tiếp trong góc  $A$  của tam giác.

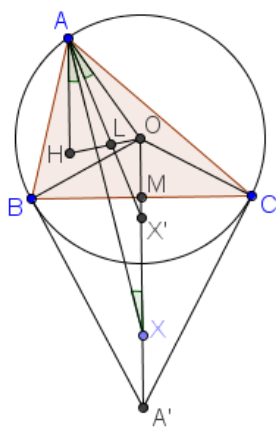
$$\text{Tương tự như trên, ta có } \vec{I_aE} = \vec{OE} - \vec{OI_a} = \frac{p}{2(p-a)}\vec{OA} + \frac{p-a-b}{2(p-a)}\vec{OB} + \frac{p-a-c}{2(p-a)}\vec{OC}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } I_aE^2 &= \frac{R^2}{4} - \frac{1}{4(p-a)^2} \left( p(p-a-b).c^2 + p(p-a-c).b^2 + (p-a-b)(p-a-c).a^2 \right) \\ &= \frac{R^2}{4} - \frac{1}{4(p-a)^2} \left( -4S^2 + abc(a-p) \right) = \frac{R^2}{4} - \frac{1}{4(p-a)^2} \left( -4(p-a)^2.r_a^2 - R(p-a)^2.r_a \right) \\ &= \frac{R^2}{4} + r_a^2 + Rr_a = \left(\frac{R}{2} + r_a\right)^2 \Rightarrow I_aE = \frac{R}{2} + r_a \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Gọi  $M, N, P$  là trung điểm các cạnh tam giác  $ABC$  thì trong số 3 đoạn thẳng  $FM, FN, FP$  có một đoạn độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn còn lại ( $F$  là điểm Feuerbach của tam giác)

**Định lý 1.2.9** (Điểm Kosnita) Cho tam giác  $ABC$ , tâm ngoại tiếp  $O$ .  $X, Y, Z$  theo thứ tự là tâm ngoại tiếp các tam giác  $BOC, COA, AOB$ . Khi đó các đường thẳng  $AX, BY, CZ$  đồng quy tại điểm Kosnita của tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.** Ta xét bài toán tổng quát sau: Cho tam giác  $ABC$ , tâm ngoại tiếp  $O$ . Các tiếp tuyến tại  $A, B, C$  của  $(O)$  cắt nhau tạo thành các giao điểm  $A', B', C'$ . Gọi  $X, Y, Z$  lần lượt là các điểm chia đoạn  $OA', OB', OC'$  theo tỉ số  $\frac{OX}{OA'}, \frac{OY}{OB'}, \frac{OZ}{OC'}$ . Khi đó các đường thẳng  $AX, BY, CZ$  đồng quy.

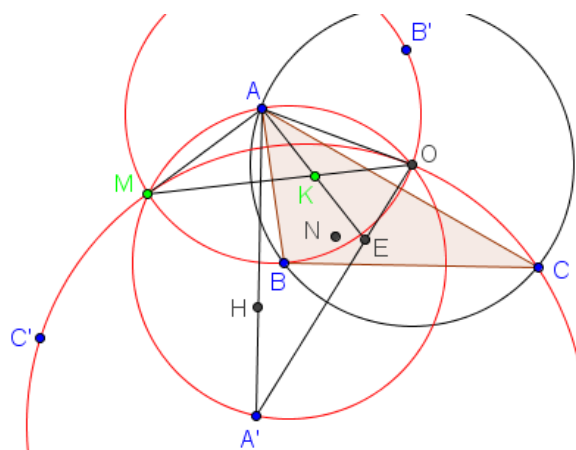


Gọi  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ . Giả sử đường đẳng giác của  $AX$  trong góc  $BAC$  cắt  $OA'$  tại  $X'$  và  $L$  là giao điểm của  $AX'$  và  $OH$ . Do  $O$

và  $H$  là 2 điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác  $ABC$  nên  $\widehat{OAX'} = \widehat{HAX} = \widehat{AXO}, \widehat{OX'A} = \widehat{HAX'} = \widehat{XAO} \Rightarrow \Delta AOX' \sim \Delta XOA \Rightarrow \overline{OM} \cdot \overline{OA'} = OA^2 = \overline{OX} \cdot \overline{OX'}$ . Suy ra  $\frac{\overline{OX'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OX}} = t \Rightarrow \frac{\overline{OL}}{\overline{LH}} = \frac{\overline{OX'}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{OX'}}{2\overline{OM}} = \frac{1}{2t} \Rightarrow L$  cố định  $\Rightarrow AH$  đi qua điểm liên hợp đẳng giác  $L'$  của  $L$  trong tam giác  $ABC$  cố định. Tương tự các đường thẳng  $BY, CZ$  đi qua  $L'$ . Khi  $t = \frac{1}{2}$  thì  $X, Y, Z$  là tâm ngoại tiếp các tam giác  $BOC, COA, AOB$  thì  $AX, BY, CZ$  đồng quy tại điểm Kosnita là điểm liên hợp đẳng giác của tâm Euler trong tam giác  $ABC$ .

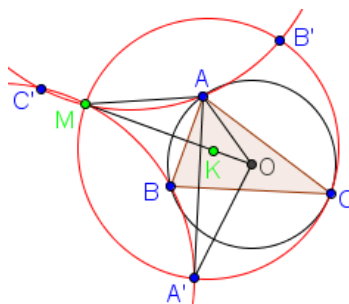
**Định lý 1.2.10** (Điểm Musselman, định lý Paul Yiu về điểm Musselman) Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp  $(O)$ , các điểm  $A', B', C'$  lần lượt đối xứng với  $A, B, C$  qua các cạnh đối diện. Khi đó các đường tròn  $(AOA'), (BOB'), (COC')$  có một giao điểm chung (khác  $O$ ) là ảnh của điểm Kosnita qua phép nghịch đảo đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  (tức là  $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OM} = R^2$ ,  $K$  là điểm Kosnita,  $M$  là điểm Musselman)

**Chứng minh.**



Gọi  $M$  và  $E$  lần lượt là ảnh của điểm Kosnita  $K$  và  $A'$  qua phép nghịch đảo đường tròn  $(ABC)$ . Khi đó ta có  $OK \cdot OM = OA^2 = OE \cdot OA' \Rightarrow \Delta OAK \sim \Delta OMA, \Delta OAE \sim \Delta OA' \Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OAK}, \widehat{OA'A} = \widehat{OAE}$ . Ta có điểm Kosnita  $K$  và tâm Euler  $N, O$  và trực tâm  $H$  là 2 cặp điểm liên hợp đẳng giác  $\Rightarrow \widehat{OAK} = \widehat{NAH}$ . Mặt khác, nếu gọi  $O'$  là điểm đối xứng với  $O$  qua  $BC$  thì  $AHO'O$  là hình bình hành  $\Rightarrow A, N, O'$  thẳng hàng  $\Rightarrow \widehat{NAH} = \widehat{O'AH} = \widehat{OA'A} \Rightarrow \widehat{OAK} = \widehat{OA'A} \Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OA'A} \Rightarrow O, A, A', M$  đồng viên. Tương tự với 2 đường tròn còn lại ta suy ra đpcm.

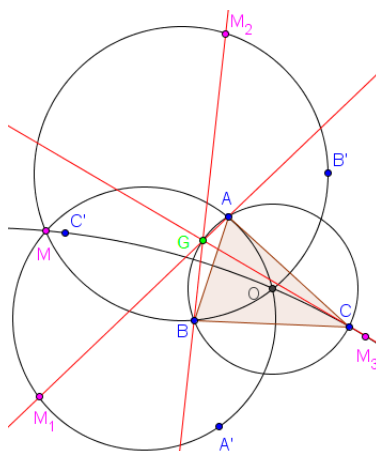
**Định lý Paul Yiu về điểm Musselman:** Với giả thiết như trên thì 3 đường tròn  $(AB'C'), (BC'A'), (CA'B')$  cũng đi qua điểm  $M$ .



Ta có  $(MB', MC') \equiv (MB', MO) + (MO, MC') \equiv (BB', BO) + (CO, CC') \equiv (BB', BC) + (BC, BO) + (CO, CB) + (CB, CC') \equiv \frac{\pi}{2} - (CB, CA) + \frac{\pi}{2} - (BA, BC) + 2(AC, AB) \equiv 3(AC, AB) \pmod{\pi}$   
 Mặt khác,  $(AB', AC') \equiv (AB', AC) + (AC, AB) + (AB, AC') \equiv 3(AC, AB) \pmod{\pi}$   
 $\Rightarrow (MB', MC') \equiv (AB', AC') \pmod{\pi} \Rightarrow M, B', C', A$  đồng viên (đpcm)

**Định lý 1.2.11** (Điểm Gilbert) Cho tam giác  $ABC$ , điểm Musselman  $M$ .  $M_1, M_2, M_3$  là các điểm đối xứng với  $M$  qua các cạnh tam giác. Khi đó các đường thẳng  $AM_1, BM_2, CM_3$  đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác.

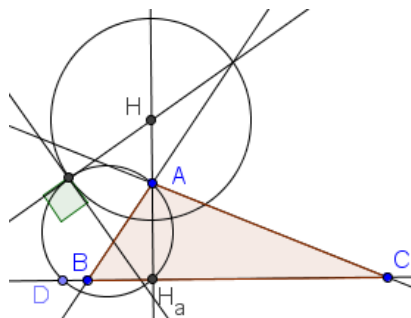
**Chứng minh.**



Gọi giao điểm của  $AM_1$  và  $BM_2$  là  $G$ . Ta có:

$(GM_1, GB) \equiv (AM_1, AB) + (BA, BM_2) \equiv (A'B, A'M) + (B'M, B'A) \equiv (C'B, C'M) + (C'M, C'A) \equiv (C'B, C'A) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi} \Rightarrow G$  nằm trên  $(ABC)$ . Chứng minh tương tự, ta có đpcm.

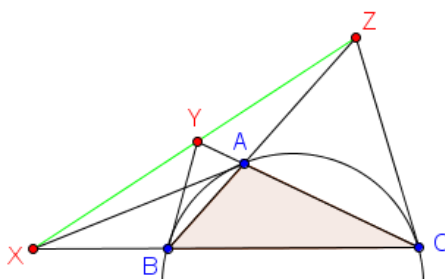
**Định lý 1.2.12** (Khái niệm đường tròn cực của tam giác tù) Cho tam giác tù  $ABC$ . Chân các đường cao đối diện các đỉnh là  $H_a, H_b, H_c$ . Khi đó đường tròn cực của tam giác là đường tròn có tâm là  $H$  và bán kính  $r$  xác định bởi  $r^2 = \overline{HA} \cdot \overline{HH_a} = \overline{HA} \cdot \overline{HH_b} = \overline{HA} \cdot \overline{HH_c} = -4R^2 \cos A \cos B \cos C = 4R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$



Đường tròn cực của tam giác tù có tính chất: cho 3 điểm bất kì chuyển động trên các đường cạnh của tam giác  $ABC$  dựng các đường tròn có đường kính là đoạn thẳng nối một đỉnh với điểm chuyển động trên cạnh đối diện thì khi đó vòng cực của tam giác trực giao với tất cả các đường tròn đó (2 đường tròn được gọi là trực giao với nhau nếu chúng có 2 giao điểm và tại mỗi giao điểm thì tiếp tuyến của 2 đường tròn tại giao điểm đó vuông góc với nhau).

**Định lý 1.2.13** (Trục Lemoine) Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Tiếp tuyến tại  $A$  của đường tròn cắt đường thẳng  $BC$  tại  $X$ . Định nghĩa tương tự cho  $Y, Z$ . Khi đó  $X, Y, Z$  thẳng hàng và đường thẳng đi qua  $X, Y, Z$  được gọi là trục Lemoine của tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.**



*Cách 1:*

Hai tam giác  $ABX$  và  $CAX$  đồng dạng  $\Rightarrow \frac{XB}{XA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{XA}{XC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{AB^2}{AC^2}$ .

Tương tự, ta có  $\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} = \frac{BC^2}{BA^2}, \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{CA^2}{CB^2}$ . Nhân theo vế 3 đẳng thức trên và áp dụng định lý Menelaus, ta có đpcm.

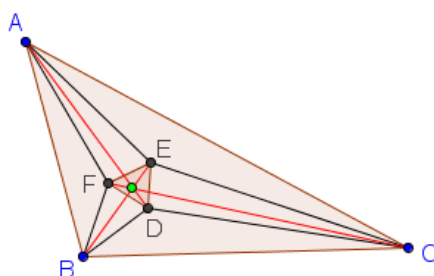
*Cách 2:*

Gọi  $S$  là giao điểm của  $BY$  và  $CZ \Rightarrow BC$  là đường đối cực của  $S$  đối với  $(ABC) \Rightarrow$  đường đối cực của  $X$  đi qua  $S$ . Mặt khác  $AX$  là tiếp tuyến của  $(ABC)$  tại  $A \Rightarrow$  đường đối cực của  $X$  đi qua  $A$ . Do đó  $AS$  là đường đối cực của  $X$  đối với  $(ABC)$ . Từ cách xác định điểm  $S$ , ta suy ra  $AS$  là đường đối trung của tam giác  $ABC$  (xem mục 2.3). Suy ra 3 đường đối cực của  $X, Y, Z$  là 3 đường đối trung trong tam giác

$ABC \Rightarrow X, Y, Z$  thẳng hàng và đường thẳng  $XYZ$  là đường đối cực của điểm Lemoine đối với  $(ABC)$ .

**Định lý 1.2.14** (Tâm Morley) Tâm Morley thứ nhất là tâm của tam giác Morley. Tâm Morley thứ hai là tâm phối cảnh của một tam giác với tam giác Morley của nó (tâm phối cảnh, nếu có, của 2 tam giác là điểm đồng quy của 3 đường thẳng nối các đỉnh tương ứng của 2 tam giác)  
**Chứng minh:** (sự tồn tại tâm phối cảnh của 2 tam giác)

**Chứng minh.**



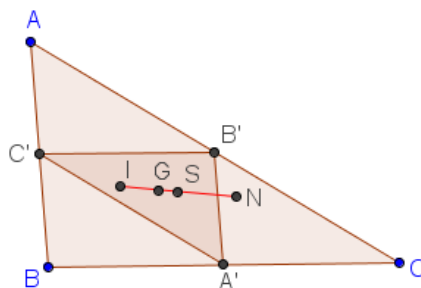
Trong tam giác  $ABC$  có  $AD, BE, CD$  đồng quy tại  $D$ , theo định lý Ceva dạng sin, ta có

$$\frac{\sin \widehat{BAD} \cdot \sin \widehat{CBD} \cdot \sin \widehat{ACD}}{\sin \widehat{CAD} \cdot \sin \widehat{ABD} \cdot \sin \widehat{BCD}} = 1 \Rightarrow \frac{\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{CAD}} = \frac{\sin \frac{2B}{3} \cdot \sin \frac{C}{3}}{\sin \frac{B}{3} \sin \frac{2C}{3}}$$

điểm  $E, F$ , ta suy ra  $AD, BE, CF$  đồng quy (đpcm)

**Định lý 1.2.15** (Tâm Spieker và đường thẳng Nagel) Cho tam giác  $ABC; A', B', C'$  là trung điểm các cạnh tam giác. Tâm Spieker được định nghĩa là tâm nội tiếp tam giác  $A'B'C'$ . Ta có 4 điểm trọng tâm, tâm nội tiếp, điểm Nagel, tâm Spieker cùng nằm trên đường thẳng Nagel của tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.**



Trước hết, ta có nhận xét sau: cho các điểm  $M, N, P$  thuộc các đường thẳng  $BC, CA, AB$  và thỏa mãn

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma \neq 0 \\ \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = \gamma \vec{NC} + \alpha \vec{NA} = \alpha \vec{PA} + \beta \vec{PB} = \vec{0} \end{cases}$$

Khi đó  $AM, BN, CP$  đồng quy và  $\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} = \vec{0}$ . (chứng minh bằng cách sử dụng định lý Ceva và định lý Van Aubel).

Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là các tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp với các cạnh  $BC, CA, AB$ . Ta tính được  $BM = p - c, MC = p - b$ , suy ra  $(p - b)\vec{MB} + (p - c)\vec{MC} = \vec{0}$ . Từ đó và 2 hệ thức vector tương tự, ta có  $(p - a)\vec{NA} + (p - b)\vec{NB} + (p - c)\vec{NC} = \vec{0} \Rightarrow p\vec{GN} = (p - a)\vec{GA} + (p - b)\vec{GB} + (p - c)\vec{GC}$ . Mặt khác, ta có  $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow 2p\vec{GI} = a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC}$ . Do đó  $2p\vec{GI} + p\vec{GN} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GN} = 2\vec{GI} \Rightarrow \vec{IN} = 3\vec{IG}$ .

Xét phép vị tự tâm  $G$ , tỉ số  $-2$  biến tam giác  $A'B'C'$  thành tam giác  $ABC \Rightarrow \vec{GI} = 2\vec{GS}$ , suy ra đpcm.

Ngoài ra ta còn có điểm Spieker là tâm đẳng phương của 3 đường tròn bàng tiếp tam giác  $ABC$ .

**Định lý 1.2.16** (Hai điểm Fermat) Cho tam giác  $ABC$ . Dựng ra phía ngoài (vào trong)  $\Delta ABC$  các tam giác đều  $BCM, CAN, ABP$ . Khi đó tâm phối cảnh của hai tam giác  $ABC$  và  $MNP$  được gọi là điểm Fermat thứ nhất (thứ hai) hoặc còn gọi là điểm Fermat dương (âm).

**Chứng minh.** Gọi giao điểm của  $AM, BN, CP$  với  $BC, CA, AB$  là  $X, Y, Z$ . Ta có



$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{S_{[ABM]}}{S_{[ACM]}} = \frac{BM \cdot BA \cdot \sin(\vec{BM}; \vec{BA})}{CM \cdot CA \cdot \sin(\vec{CM}; \vec{CA})}$$

Tương tự, ta suy ra  $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\sin(\vec{BM}; \vec{BA}) \cdot \sin(\vec{CN}; \vec{CB}) \cdot \sin(\vec{AP}; \vec{AC})}{\sin(\vec{CM}; \vec{CA}) \cdot \sin(\vec{AN}; \vec{AB}) \cdot \sin(\vec{BP}; \vec{BC})}$ . Mặt khác:

$$(\vec{AP}; \vec{AC}) \equiv (\vec{AP}; \vec{AB}) + (\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv (\vec{AC}; \vec{AN}) + (\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv (\vec{AB}; \vec{AN}) \pmod{\pi}$$

Từ đó suy ra đpcm.

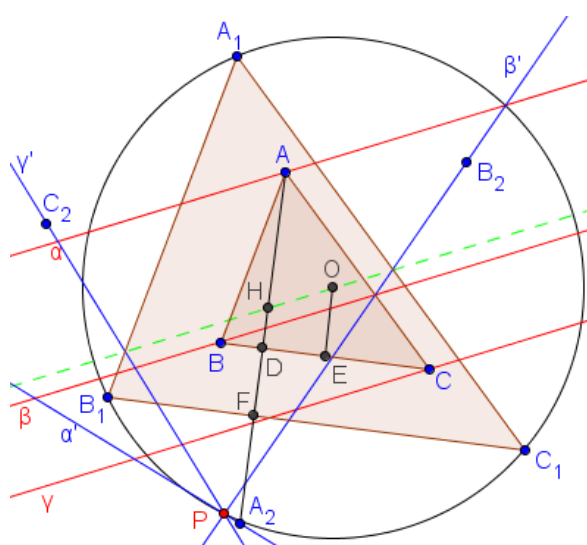
Trong trường hợp tam giác  $ABC$  không có góc nào quá  $120^\circ$ , điểm Fermat dương còn được gọi là điểm Torricelli và là cực tiểu của hàm điểm  $f(X) = XA + XB + XC$  với mọi điểm  $X$  trong mặt phẳng tam giác.

Hai điểm Fermat cùng với tâm ngoại tiếp  $O$ , tâm đường tròn Euler  $E$  nằm trên

đường tròn Lester, đường tròn này trục giao với đường tròn đường kính  $GH$  (orthocentroidal circle). Trung điểm của 2 điểm Fermat nằm trên đường tròn Euler của tam giác  $ABC$ .

**Định lý 1.2.17** (Điểm Parry reflection) Cho tam giác  $ABC$ . Kẻ qua  $A, B, C$  các đường thẳng  $\alpha, \beta, \gamma$  song song với đường thẳng Euler của tam giác. Gọi  $\alpha', \beta', \gamma'$  là các đường thẳng đối xứng với  $\alpha, \beta, \gamma$  qua  $BC, CA, AB$ . Khi đó các đường thẳng này đồng quy tại điểm Parry reflection của tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.**

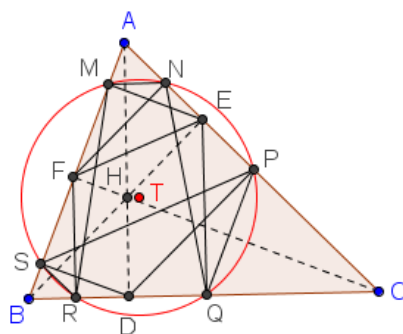


Gọi  $H, O$  là trực tâm, tâm ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số 2 biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A_1B_1C_1 \Rightarrow$  đường thẳng Euler của 2 tam giác này trùng nhau.  $A_2, B_2, C_2$  là các điểm đối xứng với  $A, B, C$  qua các cạnh đối. Gọi giao điểm của  $AA_2$  với  $BC, B_1C_1$  là  $D, F$ .  $E$  là trung điểm  $BC$ .

Ta có  $\overline{HA_2} = \overline{AA_2} - \overline{AH} = 2(\overline{AD} - \overline{OE}) = 2(\overline{AH} + \overline{HD} - \overline{OE}) = 2(\overline{HD} + \overline{DF}) = 2\overline{HF}$ . Do đó  $A_2$  đối xứng với  $H$  qua  $B_1C_1$ . Từ đó suy ra  $\alpha'$  đối xứng với đường thẳng Euler của tam giác  $A_1B_1C_1$  qua  $B_1C_1$ . Tương tự với các đường thẳng còn lại, ta suy ra  $\alpha', \beta', \gamma'$  đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $A_1B_1C_1$  (định lý Collings)

**Định lý 1.2.18** (Đường tròn Taylor, tâm Taylor) Cho tam giác  $ABC$ , các đường cao  $AD, BE, EF$ . Ta có 6 chân các đường vuông góc hạ từ  $D, E, F$  xuống các cạnh tam giác cùng nằm trên đường tròn Taylor của tam giác và tâm của đường tròn này được gọi là tâm Taylor của tam giác.

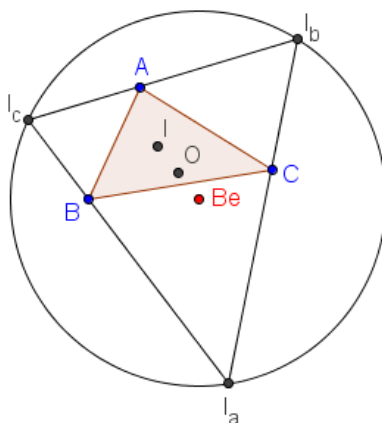
**Chứng minh.**



Ta có  $(SM, SP) \equiv (DA, DP) \equiv (HA, HE) \equiv (FA, FE) \equiv (NM, NA) \pmod{\pi} \Rightarrow M, N, S, P$  đồng viên. Tương tự cho các bộ 4 điểm  $(R, S, M, Q), (P, Q, R, N)$ . Lại có  $(RM, RQ) \equiv (SM, SQ) \equiv (SM, SP) + (SP, SQ) \equiv (NM, NA) + (NP, NQ) \equiv (NM, NQ) \pmod{\pi} \Rightarrow M, N, Q, R$  đồng viên, suy ra đpcm.

**Định lý 1.2.19** (Điểm Bevan) Cho tam giác  $ABC$ .  $I_a, I_b, I_c$  là các tâm bàng tiếp. Khi đó tâm ngoại tiếp tam giác  $I_a I_b I_c$  được gọi là điểm Bevan của tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.**



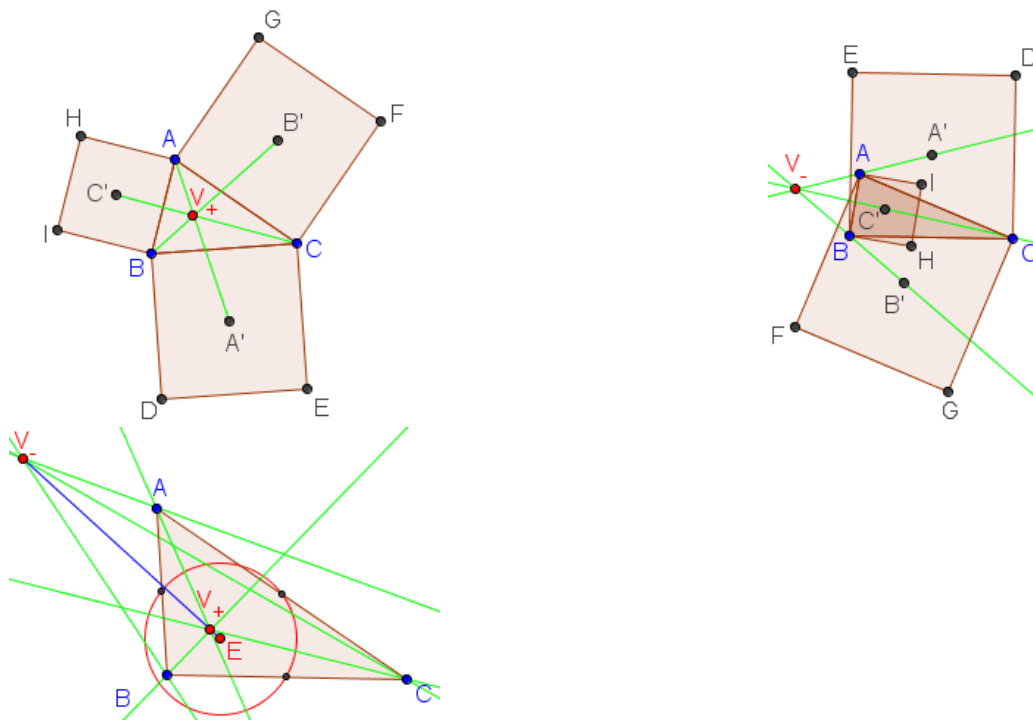
Một số tính chất của điểm Bevan:

1. Ta thấy tâm nội tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$  là trực tâm của tam giác  $I_a I_b I_c$ , tâm ngoại tiếp  $O$  của tam giác  $ABC$  là tâm đường tròn 9 điểm của tam giác  $I_a I_b I_c$ . Suy ra  $O$  là trung điểm của  $I$  và  $Be$ .
2. Tâm Spieker là trung điểm của trực tâm  $H$  và điểm Bevan.
3. Điểm Bevan là trung điểm của điểm Nagel và điểm de Longchamps, trong đó điểm deLongchamps là điểm đối xứng với trực tâm qua tâm đường tròn ngoại tiếp.

**Định lý 1.2.20** (Điểm Vecten) Cho tam giác  $ABC$ , dựng ra phía ngoài (vào trong) 3 hình vuông trên các cạnh tam giác. Khi đó đường nối một đỉnh của tam giác

với tâm hình vuông dựng trên cạnh đối diện đồng quy tại điểm Vecten của tam giác  $ABC$ .

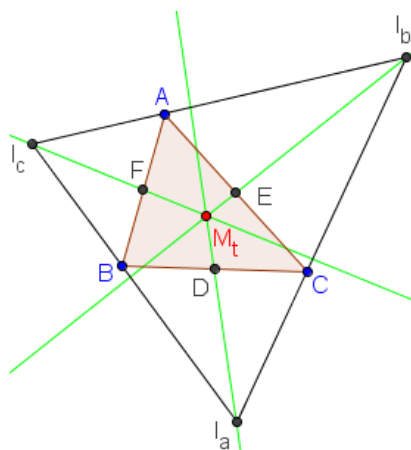
**Chứng minh.**



Theo định lý Kiepert thì điều này hiển nhiên và cũng dễ dàng suy ra có 2 điểm Vecten trong (ngoài) hay dương (âm). Ta có tính chất sau về điểm Vecten: 2 điểm Vecten thẳng hàng với tâm đường tròn Euler của tam giác  $ABC$ .

**Định lý 1.2.21** (Điểm Mittenpunkt) Cho tam giác  $ABC$ ,  $I_a, I_b, I_c$  là các tâm bàng tiếp.  $D, E, F$  là trung điểm các cạnh tam giác  $ABC$ . Khi đó các đường  $I_aD, I_bE, I_cF$  đồng quy tại điểm Mittenpunkt của tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.**



Ta có  $2\vec{I_aD} = \vec{I_aB} + \vec{I_aC} = \frac{\sin I_c \cdot \cos I_a}{\sin I_b} \vec{I_aI_c} + \frac{\sin I_b \cdot \cos I_a}{\sin I_c} \vec{I_aI_b}$ . Chiếu hệ thức trên theo phương  $I_aD$  lên trục  $I_bI_c$ , ta có  $\frac{\sin I_c \cdot \cos I_a}{\sin I_b} \overline{XI_c} + \frac{\sin I_b \cdot \cos I_a}{\sin I_c} \overline{XI_b} = 0 \Rightarrow \frac{\overline{XI_b}}{\overline{XI_c}} = - \left( \frac{\sin I_c}{\sin I_b} \right)^2$  ( $X$  là giao điểm của  $I_aD$  với  $I_bI_c$ ). Tương tự, ta suy ra đpcm.

Ta có một số tính chất sau về điểm Mittenpunkt:

1. Gọi  $M, N, P$  là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác với các cạnh thì  $I_aM, I_bN, I_cP$  đồng quy tại điểm liên hợp đẳng giác với điểm Mittenpunkt trong tam giác  $ABC$ .
2. Điểm Mittenpunkt, trục tâm và tâm Spieker thẳng hàng.
3. Điểm Mittenpunkt, tâm nội tiếp và điểm Lemoine thẳng hàng.
4. Điểm Mittenpunkt, trọng tâm và điểm Gergonne thẳng hàng với  $G_eG : GM_t = 2 : 1$ .
5. Điểm Mittenpunkt là điểm Lemoine của tam giác  $I_aI_bI_c$ .

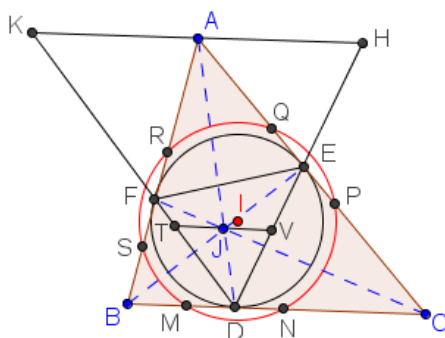
**Định lý 1.2.22** (Điểm Napoleon) Cho tam giác  $ABC$ , dựng ra phía ngoài (hay vào trong) các tam giác đều trên các cạnh  $BC, CA, AB$ . Khi đó đường nối một đỉnh của tam giác với trọng tâm tam giác đều dựng trên cạnh đối diện đồng quy tại điểm Napoleon của tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.** Áp dụng định lý Kiepert, ta có ngay đpcm.



**Định lý 1.2.23** (Đường tròn Adam) Cho tam giác  $ABC$  với điểm Gergonne  $J$ . Gọi  $(I)$  là đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ , tiếp điểm của  $(I)$  trên  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $D, E, F$ . Đường thẳng qua  $J$  song song với  $EF$  cắt  $AB, AC$  ở  $S, P$ . Đường thẳng qua  $J$  song song với  $DE$  cắt  $AC, BC$  ở  $Q, M$ . Đường thẳng qua  $J$  song song với  $DF$  cắt  $BA, BC$  ở  $R, N$ . Khi đó các điểm  $M, N, P, Q, R, S$  cùng thuộc một đường tròn gọi là đường tròn Adam của tam giác  $ABC$ .

**Chứng minh.**



Đường thẳng qua A và J song song với BC tương ứng cắt DE, DF ở (H, K), (V, T).

Ta thấy:

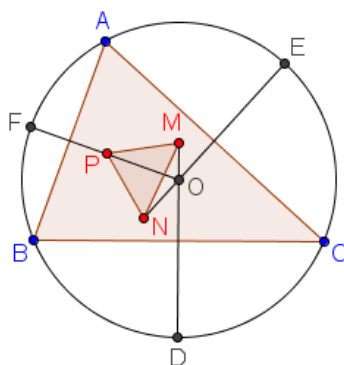
$$\frac{AK}{AH} = \frac{AK \cdot BD \cdot C}{BD \cdot DC \cdot AH} = \frac{AF \cdot BF \cdot EC}{FB \cdot EC \cdot AE} = 1 \Rightarrow AK = AH \Rightarrow JT = JV$$

Để ý rằng JTDN và JVDM là hai hình bình hành nên ta cũng có DM = DN.

Kết hợp với ID ⊥ BC ta có IM = IN. Tương tự IP = IQ, IR = IS. Ta có IC ⊥ DE ⇒ IC ⊥ MQ; IC đi qua trung điểm DE ⇒ IC đi qua trung điểm MQ (theo Thales), do đó tam giác IMQ cân tại I ⇒ IM = IQ. Tương tự ta cũng có IN = IR. Từ các khẳng định trên ta suy ra điều cần chứng minh.

Gọi X, Y, Z là các giao điểm của các cặp đường thẳng (MS, NP), (NP.RQ), (RQ, MS) thì điểm Gergonne của ΔABC là điểm Lemoine của ΔXYZ.

**Định lý 1.2.24** (Tam giác Fuhrmann, đường tròn Fuhrmann) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi D, E, F là trung điểm các cung BC, CA, AB không chứa đỉnh đối diện. Lấy các điểm trên đối xứng qua các cạnh tương ứng ta được 3 điểm M, N, P. Tam giác MNP được gọi là tam giác Fuhrmann của tam giác ABC và đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP được gọi là đường tròn Fuhrmann. Đường tròn Fuhrmann là một trường hợp riêng của đường tròn Hagge.



Tính chất:

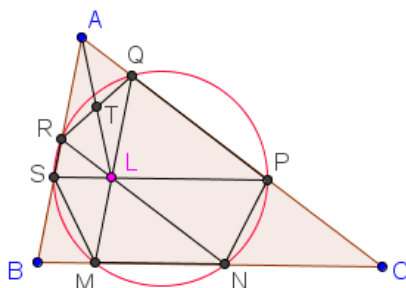
$$1. S_{MNP} = \frac{(a + b + c) OI^2}{4R} = \frac{\left( \sum a^3 + 3abc - \sum_{sym} a^2b \right) S_{ABC}}{(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}$$

$$2. NP = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}}OI; PM = \sqrt{\frac{(a+b+c)(c+a-b)}{ca}}OI; MN = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}OI$$

3. Trục tâm của tam giác Fuhrmann trùng với tâm đường tròn nội tiếp của tam giác  $ABC$ .
4. Tâm đường tròn chín điểm của tam giác Fuhrmann và tam giác  $ABC$  trùng nhau. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác Fuhrmann bằng  $OI$ .
5. Trục tâm và điểm Nagel của  $\Delta ABC$  nằm trên đường tròn Fuhrmann và đoạn thẳng nối chúng là một đường kính của đường tròn Fuhrmann.

**Định lý 1.2.25** (Hình lục giác và đường tròn Lemoine thứ nhất) Cho tam giác  $ABC$ , điểm Lemoine  $L$ . Qua  $L$  kẻ các đường thẳng song song với các cạnh cắt các cạnh còn lại tại  $M, N, P, Q, R, S$ . Lục giác  $MNPQRS$  được gọi là lục giác Lemoine thứ nhất của tam giác  $ABC$ . Lục giác Lemoine thứ nhất nội tiếp trong đường tròn Lemoine thứ nhất của tam giác.

**Chứng minh.**



Gọi  $T$  là giao điểm của  $AL$  và  $RQ$ ;  $m, n$  lần lượt là khoảng cách từ  $T$  đến  $AB, AC$ . Tứ giác  $AQLR$  là hình bình hành nên  $T$  là trung điểm  $RQ \Rightarrow S_{ATR} = S_{ATQ} \Rightarrow m \cdot AR = n \cdot AQ$

Do đó  $\frac{AQ}{AR} = \frac{m}{n} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AQR \Rightarrow \widehat{AQR} = \widehat{ABC}$ .

Tương tự, ta có  $\Delta CBA \sim \Delta CPN \Rightarrow \widehat{CBA} = \widehat{CPN}$ . Suy ra  $\widehat{AQR} = \widehat{CPN} \Rightarrow QPNR$  là hình thang cân. Do đó 4 điểm  $N, P, Q, R$  đồng viên. Tương tự, ta có 4 điểm  $Q, R, S, M$  đồng viên. Mặt khác, ta có  $\widehat{AQR} = \widehat{ABC} = \widehat{ASP} \Rightarrow P, Q, R, S$  đồng viên. Suy ra lục giác  $MNPQRS$  nội tiếp (đpcm)

Tính chất:

1.  $MN : PQ : RS = a^3 : b^3 : c^3$
2.  $NP = QR = SM$
3.  $BM : MN : NC = c^2 : a^2 : b^2$
4. Tâm của lục giác Lemoine thứ nhất là trung điểm đoạn  $OL$ .
5. Bán kính  $R_1 = \frac{abc\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{(a^2 + b^2 + c^2) \cdot 4S_{ABC}} = \frac{R^2 + R_2^2}{4}$ , trong đó  $R_2$  là bán kính

đường tròn Lemoine thứ hai.

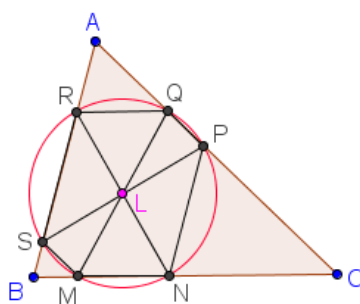
**Định lý 1.2.26** (Hình lục giác và đường tròn Lemoine thứ hai)

*Khái niệm về đường đối song (antiparallel):* Cho tam giác  $ABC$ . Chọn 2 điểm  $D, E$  trên  $AB, AC$  sao cho tam giác  $AED$  đồng dạng với tam giác  $ABC$ . Khi đó  $DE$  và  $BC$  được gọi là các đường đối song trong góc  $A$ .

Tính chất của đường đối song: Đường đối trung luôn đi qua trung điểm của các đường đối song tương ứng với cùng một đỉnh.

*Kết quả về hình lục giác và đường tròn Lemoine thứ hai:* Cho tam giác  $ABC$  và điểm Lemoine  $L$ . Qua  $L$  kẻ các đường đối song tương ứng với các cạnh của tam giác  $ABC$  cắt các cạnh còn lại tại  $M, N, P, Q, R, S$ . Khi đó lục giác  $MNPQRS$  được gọi là lục giác Lemoine thứ hai của tam giác  $ABC$ . Lục giác Lemoine thứ hai nội tiếp trong đường tròn Lemoine thứ hai của tam giác, còn được gọi là đường tròn cosin (cosine circle).

**Chứng minh.**



Vì  $SP, RN$  là các đường đối song trong  $\triangle ABC$  nên ta có  $\widehat{ASL} = \widehat{ACB} = \widehat{BRL} \Rightarrow \triangle LRS$  cân tại  $L \Rightarrow LR = LS$ . Tương tự, ta có  $LM = LN, LP = LQ$ .

Mặt khác,  $L$  là trung điểm  $SP$  (tính chất đường đối song), suy ra  $LM = LN = LP = LQ = LR = LS$ . Do đó 6 điểm  $M, N, P, Q, R, S$  cùng nằm trên một đường tròn tâm  $L$ .

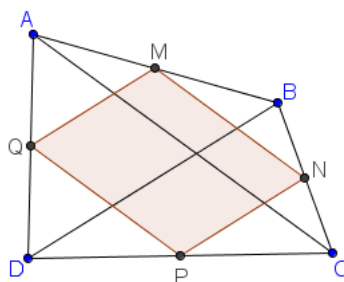
Tính chất:

1. Bán kính  $R_2 = \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}$

2. Các cặp đoạn thẳng  $(MN, QR), (PN, RS), (PQ, SM)$  song song và bằng nhau. Độ dài của các đoạn thẳng  $MN, PQ, RS$  tỉ lệ với cosin của các góc của  $\triangle ABC$ , điều này giải thích cho tên gọi đường tròn cosin.

**Định lý 1.2.27** (Hình bình hành Varignon của tứ giác) Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Khi đó  $M, N, P, Q$  là bốn đỉnh của một hình bình hành gọi là hình bình hành Varignon của tứ giác  $ABCD$ .

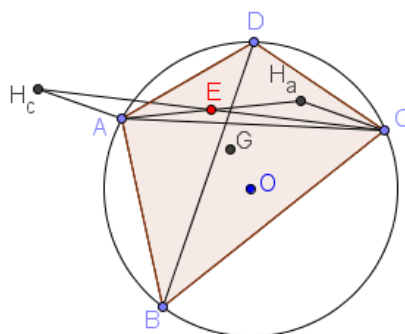
**Chứng minh.**



$MN, PQ$  tương ứng là đường trung bình của các tam giác  $ABC$  và  $ACD \Rightarrow MN // PQ, MN = PQ = \frac{AC}{2}$ . Do đó  $MNPQ$  là hình bình hành (đpcm)

**Định lý 1.2.28** (Điểm Euler của tứ giác nội tiếp) Cho tứ giác nội tiếp  $ABCD$ .  $H_a, H_b, H_c, H_d$  lần lượt là trực tâm các tam giác  $BCD, CDA, DAB, ABC$ . Khi đó các đường thẳng  $AH_a, BH_b, CH_c, DH_d$  đồng quy tại điểm Euler của tứ giác  $ABCD$ .

**Chứng minh.**



Ta có  $AH_c$  và  $CH_a$  song song và cùng bằng 2 lần khoảng cách từ  $O$  đến  $BD$  nên tứ giác  $ACH_aH_c$  là hình bình hành, suy ra  $AH_c$  và  $CH_a$  giao nhau tại trung điểm của mỗi đường. Tương tự ta suy ra đpcm.

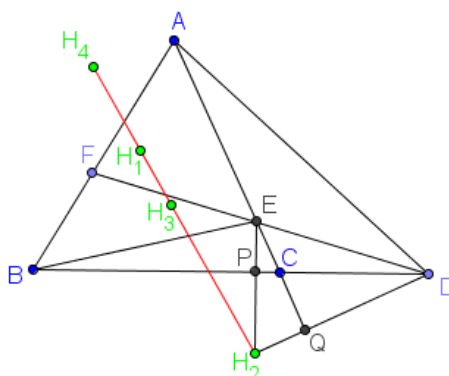
Ta có một số tính chất sau về điểm Euler:

1. Điểm Euler đối xứng với tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tứ giác qua trọng tâm  $G$  của tứ giác.
2. Điểm Euler nằm trên đường vuông góc hạ từ trung điểm một cạnh tới cạnh đối diện (hoặc trung điểm đường chéo tới đường chéo còn lại).
3. Điểm Euler nằm trên đường thẳng Simson của đỉnh  $A$  với tam giác  $BCD$ , tương tự với 3 đỉnh còn lại.
4. Đường tròn 9 điểm của 4 tam giác  $ABC, BCD, CDA, DAB$  đồng quy tại điểm Euler.

**Định lý 1.2.29** (Đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần) Cho tứ giác toàn phần  $ABCDEF$ . Khi đó trực tâm của các tam giác  $AEF, DCE, ABC, BDF$  cùng

nằm trên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần.

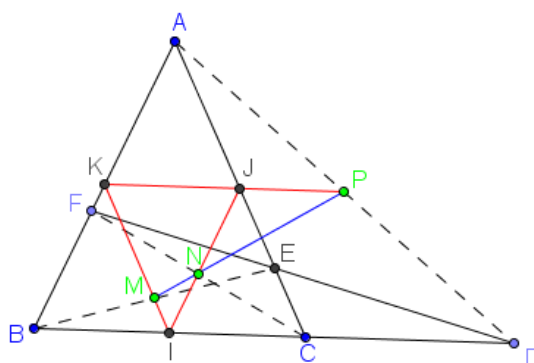
**Chứng minh.**



Gọi  $H_1, H_2, H_3, H_4$  lần lượt là trực tâm các tam giác  $AEF, DCE, ABC, BDF$ . Gọi  $X, Z$  là trung điểm các đường chéo  $BE, AD$ . Ta có  $P_{H_2/(X, XB)} = H_2P.H_2E = H_2Q.H_2D = P_{H_2/(Z, ZD)}$ . Do đó  $H_2$  nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn  $(X, XB)$  và  $(Z, ZD)$ . Tương tự với 3 điểm còn lại, ta suy ra đpcm.

**Định lý 1.2.30** (Đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần) Cho tứ giác toàn phần  $ABCDEF$ . Khi đó trung điểm các đường chéo cùng nằm trên một đường thẳng được gọi là đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần.

**Chứng minh.**



Gọi  $M, N, P$  là trung điểm các đường chéo  $BE, CF, AD$ ;  $IJK$  là tam giác trung bình của tam giác  $ABC$ . Khi đó các điểm  $M, N, P$  nằm trên các cạnh của tam giác  $IJK$ .

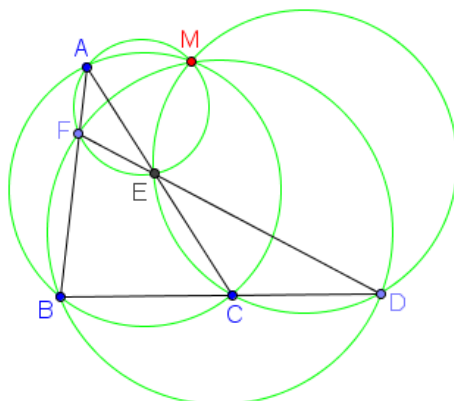
Áp dụng định lý Thales, ta có:

$$\frac{\overline{MK}}{\overline{MI}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}; \frac{\overline{NI}}{\overline{NJ}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}; \frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} \Rightarrow \frac{\overline{MK}}{\overline{MI}} \cdot \frac{\overline{NI}}{\overline{NJ}} \cdot \frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

**Định lý 1.2.31** (Điểm Miquel của tứ giác toàn phần) Cho tứ giác toàn phần

$ABCDEF$ . Khi đó các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $AEF, DCE, ABC, BDF$  đồng quy tại điểm Miquel của tứ giác toàn phần.

**Chứng minh.**

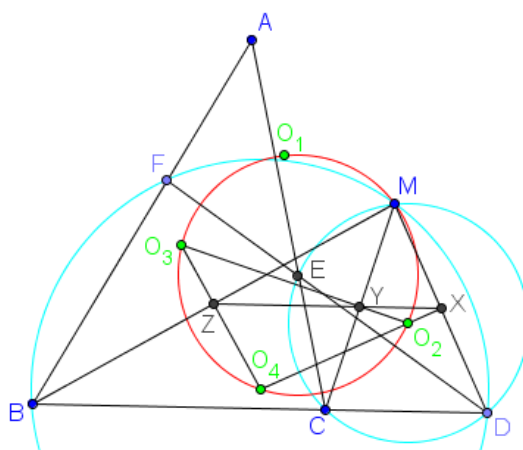


Gọi  $M$  là giao điểm khác  $E$  của  $(AEF)$  và  $(CDE)$ . Áp dụng định lý Miquel cho tam giác  $DBF$  và 3 điểm  $C, E, A$  ta có  $(ABC)$  đi qua  $M$ .

Vậy  $M$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Tương tự, ta suy ra đpcm.

**Định lý 1.2.32** (Đường tròn Miquel của tứ giác toàn phần) Cho tứ giác toàn phần  $ABCDEF$ , ta có điểm Miquel  $M$  và tâm ngoại tiếp các tam giác  $AEF, CDE, ABC, BDF$  cùng nằm trên đường tròn Miquel của tứ giác toàn

**Chứng minh.**



Gọi  $O_1, O_2, O_3, O_4$  là tâm ngoại tiếp các tam giác  $AEF, CDE, ABC, BDF$ . Gọi  $X, Y, Z$  là trung điểm các đoạn thẳng  $MD, MC, MB$ . Ta có  $MD$  là giao của  $(O_4)$  và  $(O_2)$  nên  $O_4O_2 \perp MD$ . Tương tự, ta có  $MY \perp O_3O_2, MZ \perp O_3O_4$ . Mặt khác,  $X, Y, Z$  thẳng hàng (theo Thales). Do đó theo định lý đảo về đường thẳng Simson ta có  $M, O_2, O_3, O_4$  đồng viên. Tương tự, ta suy ra đpcm.