ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM **TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU** **ĐỀ CHÍNH THỨC** *(Đề gồm 1 trang)*	**KIỂM TRA CUỐI HỌC KỲ II** **NĂM HỌC 2025 - 2026** MÔN: TOÁN 10 CHUYÊN *(Thời gian làm bài: 90 phút)*

Bài 1 (2 điểm). Giải bất phương trình và phương trình sau.

a) $\dfrac{(x^2-5x+4)(9-x^2)}{x^2-3x-10} \leq 0$

b) $2x^2-8x-3\sqrt{x^2-4x-5}=12$

Bài 2 (1 điểm). Tìm m để bất phương trình $(m-3)x^2-2(m+1)x-4m-1 \leq 0$ có nghiệm.

Bài 3 (3 điểm). Cho đường thẳng $\Delta : x-3y+2=0$ và điểm $A(8;0)$

a) Gọi B là điểm nằm trên đường thẳng Δ và có hoành độ là 4. Viết phương trình đường thẳng d đi qua B và d vuông góc với Δ

b) Viết phương trình đường tròn (T) đi qua A và (T) tiếp xúc với đường thẳng A tại B.

c) Gọi $C(4;-2)$. Chứng tỏ C nằm trong đường tròn (T). Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho từ M vẽ được hai tiếp tuyến ME, MF với (T) (E, F là hai tiếp điểm) sao cho đường thẳng EF đi qua C.

Bài 4 (3 điểm).

a) Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $(1+x^2-x^3)^7$.

b) Từ các số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên n có 6 chữ số đồng thời thỏa : sáu chữ số của n đôi một khác nhau và tổng của 3 chữ số đầu (chữ số hàng trăm ngàn, chữ số hàng chục ngàn, chữ số hàng ngàn) nhỏ hơn tổng của 3 chữ số sau (chữ số hàng trăm, chữ số hàng chục, chữ số hàng đơn vị) một đơn vị.

c) Một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Giáo viên chọn một tổ trực nhật gồm 4 học sinh. Tính xác suất để trong 4 học sinh được chọn luôn có học sinh nam.

Bài 5 (1 điểm). Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết hai điểm $M(3;\dfrac{16}{5})$ và $N(4;\dfrac{12}{5})$ thuộc (E).

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:.....
(Thí sinh không được sử dụng tài liệu)

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1 (2 điểm).

a) Xét bất phương trình: $\dfrac{(x^2-5x+4)(9-x^2)}{x^2-3x-10} \le 0$

Điều kiện xác định: $x^2-3x-10 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -2$ và $x \ne 5$.

Ta có các nghiệm của tử số:
$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=4$.
$9-x^2=0 \Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=-3$.

Lập bảng xét dấu cho biểu thức $f(x)=\dfrac{(x^2-5x+4)(9-x^2)}{x^2-3x-10}$:

x	$-\infty$		-3		-2		1		3		4		5		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$9-x^2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$x^2-3x-10$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thu được: $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-3] \cup (-2;1] \cup [3;4] \cup (5;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-3] \cup (-2;1] \cup [3;4] \cup (5;+\infty)$.

b) Xét phương trình: $2x^2-8x-3\sqrt{x^2-4x-5}=12$

Điều kiện xác định: $x^2-4x-5 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1$ hoặc $x \ge 5$.

Phương trình tương đương: $2(x^2-4x-5)-3\sqrt{x^2-4x-5}-2=0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x-5}$ $(t \ge 0)$. Phương trình trở thành: $2t^2-3t-2=0 \Leftrightarrow t=2$ (nhận) hoặc $t=-\dfrac{1}{2}$ (loại).

Với $t=2 \Rightarrow \sqrt{x^2-4x-5}=2 \Leftrightarrow x^2-4x-5=4 \Leftrightarrow x^2-4x-9=0$.
Giải phương trình bậc hai, ta được $x=2\pm\sqrt{13}$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2-\sqrt{13};2+\sqrt{13}\}$.

Bài 2 (1 điểm).

Xét bất phương trình $f(x)=(m-3)x^2-2(m+1)x-4m-1 \le 0$.
Để bất phương trình có nghiệm, ta xét bài toán ngược: "Tìm m để bất phương trình vô nghiệm", tức là $f(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Trường hợp 1: $m=3$, $f(x)=-8x-13$. Bất phương trình trở thành $-8x-13 \le 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{13}{8}$. Bất phương trình có nghiệm, suy ra $m=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: $m \neq 3$. Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:
$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 > 0 \\ (m+1)^2 - (m-3)(-4m-1) < 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m^2 + 2m + 1 + 4m^2 - 11m - 3 < 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ 5m^2 - 9m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -\dfrac{1}{5} < m < 2 \end{cases}$ (Vô lý).

Vậy không có giá trị nào của m để bất phương trình vô nghiệm. Điều này đồng nghĩa với việc mọi giá trị của m, bất phương trình luôn có nghiệm.

Kết luận: $m \in \mathbb{R}$.

Bài 3 (3 điểm).

a) $B \in \Delta$ và $x_B = 4 \Rightarrow 4 - 3y_B + 2 = 0 \Rightarrow y_B = 2$. Vậy $B(4;2)$.
Đường thẳng $d \perp \Delta \Rightarrow$ VTPT của d chính là VTCP của Δ: $\vec{n}_d = \vec{u}_\Delta = (3;1)$.
Phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $B(4;2)$:
$3(x-4) + 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 14 = 0$.

b) Đường tròn (T) tiếp xúc với Δ tại B nên tâm I của (T) nằm trên đường thẳng $d \perp \Delta$ tại B.
Suy ra $I \in d \Rightarrow I(t; 14-3t)$.
Vì (T) đi qua A và B nên $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$.
$(8-t)^2 + (0-(14-3t))^2 = (4-t)^2 + (2-(14-3t))^2$
$\Leftrightarrow 64 - 16t + t^2 + 9t^2 - 84t + 196 = 16 - 8t + t^2 + 9t^2 - 72t + 144$
$\Leftrightarrow -100t + 260 = -80t + 160 \Leftrightarrow 20t = 100 \Leftrightarrow t = 5$.
Vậy tâm $I(5;-1)$. Bán kính $R = IB = \sqrt{(4-5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$.
Phương trình đường tròn $(T): (x-5)^2 + (y+1)^2 = 10$.

c) Khoảng cách $IC = \sqrt{(4-5)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < R = \sqrt{10}$.
Vậy C nằm trong đường tròn (T).
Vì $M \in Oy \Rightarrow M(0;m)$.
Gọi $E(x_0;y_0)$ là một tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (T).
Phương trình tiếp tuyến của (T) tại $E(x_0;y_0)$ là: $(x_0-5)(x-5) + (y_0+1)(y+1) = 10$.
Vì tiếp tuyến này đi qua $M(0;m)$ nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình tiếp tuyến:
$(x_0-5)(0-5) + (y_0+1)(m+1) = 10$
$\Leftrightarrow -5x_0 + 25 + (m+1)y_0 + m + 1 = 10$
$\Leftrightarrow -5x_0 + (m+1)y_0 + m + 16 = 0 \quad (1)$.
Lập luận tương tự, tọa độ tiếp điểm F cũng thỏa mãn hệ thức (1).
Do đó, phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm E và F là: $-5x + (m+1)y + m + 16 = 0$.
Vì đường thẳng EF đi qua $C(4;-2)$ nên tọa độ C thỏa mãn phương trình EF:
$-5(4) + (m+1)(-2) + m + 16 = 0 \Leftrightarrow -20 - 2m - 2 + m + 16 = 0 \Leftrightarrow -m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -6$.
Vậy tọa độ điểm cần tìm là $M(0;-6)$.

Bài 4 (3 điểm).

a) Số hạng tổng quát trong khai triển của $(1 + x^2 - x^3)^7$ là:
$\dfrac{7!}{a!b!c!} 1^a (x^2)^b (-x^3)^c = \dfrac{7!}{a!b!c!} (-1)^c x^{2b+3c}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $a + b + c = 7$.
Để có x^7, ta cần $2b + 3c = 7$. Do $c \in \mathbb{N}$ và $3c \leq 7 \Rightarrow c \in \{0, 1, 2\}$.

- Nếu $c = 0 \Rightarrow 2b = 7$ (loại).
- Nếu $c = 1 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 4$.
- Nếu $c = 2 \Rightarrow 2b = 1$ (loại).

Vậy hệ số của x^7 là $\dfrac{7!}{4!2!1!}(-1)^1 = -105$.

b) Gọi S_1 là tổng 3 chữ số đầu, S_2 là tổng 3 chữ số sau.
Ta có: $S_1 + S_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.
Theo đề bài, $S_1 = S_2 - 1$. Giải hệ, ta được $S_2 = 11, S_1 = 10$.
Ta cần chọn 3 chữ số từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sao cho có tổng bằng 10. Các tập con thỏa mãn: $\{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}$.
Có 3 cách chọn bộ 3 chữ số đầu. Mỗi bộ có 3! cách xếp 3 chữ số đầu và 3! cách xếp 3 chữ số còn lại vào 3 vị trí sau.
Vậy số lượng các số tự nhiên thỏa mãn là: $3 \times 3! \times 3! = 108$ số.

c) Tổng số học sinh là $20 + 15 = 35$. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{35}^4 = 52360$.
Gọi A là biến cố: "Trong 4 học sinh được chọn luôn có học sinh nam".
Biến cố đối $\overline{A}$: "Cả 4 học sinh được chọn đều là nữ". Số cách chọn là $n(\overline{A}) = C_{15}^4 = 1365$.
Số cách chọn có ít nhất 1 học sinh nam: $n(A) = 52360 - 1365 = 50995$.
Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{50995}{52360} = \dfrac{1457}{1496} \approx 0.9739$.

Bài 5 (1 điểm).

Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.
Vì (E) đi qua $M(3; \dfrac{16}{5})$ và $N(4; \dfrac{12}{5})$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a^2} + \dfrac{256}{25b^2} = 1 \\ \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{144}{25b^2} = 1 \end{cases}$$

Đặt $u = \dfrac{1}{a^2}, v = \dfrac{1}{b^2}$ $(u, v > 0)$, hệ trở thành:

$$\begin{cases} 9u + \dfrac{256}{25}v = 1 \\ 16u + \dfrac{144}{25}v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 144u + \dfrac{4096}{25}v = 16 \\ 144u + \dfrac{1296}{25}v = 9 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế ta thu được: $\dfrac{2800}{25}v = 7 \Leftrightarrow 112v = 7 \Leftrightarrow v = \dfrac{1}{16} \Rightarrow b^2 = 16$.
Thế $v = \dfrac{1}{16}$ vào phương trình đầu: $9u + \dfrac{256}{25} \cdot \dfrac{1}{16} = 1 \Leftrightarrow 9u + \dfrac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow 9u = \dfrac{9}{25} \Leftrightarrow u = \dfrac{1}{25} \Rightarrow$ $a^2 = 25$.

Vì $a^2 = 25 > b^2 = 16$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.